Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
Álgebra III LEMC

Una solución del Taller N°2
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Miércoles 24 de mayo del 2017

El trabajo solidario es lo único
que hace humano al ser humano

1. Algunas sugerencias

- Lean cuidadosamente el problema
- Reconozcan lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a ustedes se les consulta.
- Traten de entender en la forma más clara para ustedes, lo que se les pide, en particular si pueden usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!. Este acto nunca estará de más.
- Analicen cuidadosamente sus datos extrayendo la información que corresponde, orientados por su entendimiento de lo que deben probar.

2. Objetivos

- Fomentar el **trabajo en equipo.**
- Estimular **la comprensión de lectura** en problemas matemáticos.
- Clasificar después de leer el problema, **entre información y resultado pedido.**
- Estimular **el uso de una sintaxis adecuada** en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos
- Aprender a **generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente)**, para responder al problema planteado.

3. Ejercicios Propuestos

(1) Si $\mathbb{W} = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$ entonces usando el producto interno definido por

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

Determine

(a) Una base ortogonal del subespacio $\mathbb{W}$

Una solución: Debemos determinar una base ortogonal de $\mathbb{W}$, por tanto procedemos a aplicar los respectivos protocolos y algoritmos.

Así que iniciamos determinando un sistema de generadores para $\mathbb{W}$, y para ello

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(1) = 0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 + a_1 + a_2 = 0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_2 = -a_0 - a_1\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + (-a_0 - a_1)x^2;\ (a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R})\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x - a_0x^2 - a_1x^2;\ (a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R})\\
&\iff p(x) = a_0 - a_0x^2 + a_1x - a_1x^2;\ (a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R})\\
&\iff p(x) = a_0(1 - x^2) + a_1(x - x^2);\ (a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Ahora, vemos por cálculo directo que:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 - 1^2 = 0 & \Longrightarrow & (1 - x^2) \in \mathbb{W}\\ 1 - 1^2 = 0 & \Longrightarrow & (x - x^2) \in \mathbb{W}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{W} = \langle\{1 - x^2, x - x^2\}\rangle$$

Así que $\alpha = \{1 - x^2, x - x^2\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{W}$, además como

$$c(1 - x^2) + d(x - x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \quad \Rightarrow \quad c + dx + (-c - d)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow c = d = 0$$

[1]Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 60'

entonces α es una base de $\mathbb{W}$.
Verifiquemos ahora su ortogonalidad respecto del producto definido encima.

$$\langle 1-x^2, x-x^2\rangle = (1-0^2)(0-0^2)+(1-1^2)(1-1^2)+(1-2^2)(2-2^2) = 0+0+6 = 6$$

Por tanto aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt y obtenemos

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= 1-x^2 \\
p_2(x) &= (x-x^2) - \frac{\langle x-x^2, 1-x^2\rangle}{\langle 1-x^2, 1-x^2\rangle}(1-x^2) \\
&= (x-x^2) - \frac{6}{10}(1-x^2) \\
&= x - x^2 - \frac{3}{5} + \frac{3x^2}{5} \\
&= -\frac{3}{5} + x - x^2 + \frac{3x^2}{5} \\
&= -\frac{3}{5} + x - \frac{2x^2}{5} \\
&= -\frac{1}{5}(3-5x+2x^2)
\end{aligned}$$

Y

$$\langle 1-x^2, 3-5x+2x^2\rangle = (1)(3)+(0)(0)+(-3)(1) = 0$$

Por tanto, podemos escoger para $\mathbb{W}$, la base ortogonal $\alpha = \{1-x^2, 3-5x+2x^2\}$

(b) La proyección ortogonal $P_{\mathbb{W}}(a_0+a_1x+a_2x^2)$

Una solución. Observmos que para definir la proyección ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ en $\mathbb{W}$ debemos usar una base ortogonal de $\mathbb{W}$, por tanto procedemos a utilizar la base ortogonal obtenida en el punto anterior, y entonces la proyecció quedarìa definida como sigue:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(a_0+a_1x+a_2x^2) &= \frac{\langle a_0+a_1x+a_2x^2, 1-x^2\rangle}{\langle 1-x^2, 1-x^2\rangle}(1-x^2) + \frac{\langle a_0+a_1x+a_2x^2, 3-5x+2x^2\rangle}{\langle 3-5x+2x^2, 3-5x+2x^2\rangle}(3-5x+2x^2) \\
&= \left(\frac{-2a_0-6a_1-12a_2}{10}\right)(1-x^2) + \left(\frac{4a_0+2a_1+4a_2}{10}\right)(3-5x+2x^2) \\
&= \left(\frac{-a_0-3a_1-6a_2}{5}\right)(1-x^2) + \left(\frac{2a_0+a_1+2a_2}{5}\right)(3-5x+2x^2)
\end{aligned}$$

Luego, nuestra candidata es

$$P_{\mathbb{W}}(a_0+a_1x+a_2x^2) = \left(\frac{-a_0-3a_1-6a_2}{5}\right)(1-x^2) + \left(\frac{2a_0+a_1+2a_2}{5}\right)(3-5x+2x^2)$$

Pero entonces comprobamos usando una de sus propiedades:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(1-x^2) &= \left(\frac{(-1)-3(0)-6(-1)}{5}\right)(1-x^2) + \left(\frac{2(1)+0+2(-1)}{5}\right)(3-5x+2x^2) \\
&= \left(\frac{5}{5}\right)(1-x^2) + \left(\frac{0}{5}\right)(3-5x+2x^2) \\
&= (1)(1-x^2) + (0)(3-5x+2x^2) \\
&= 1-x^2 \quad (\text{ Perfecto})
\end{aligned}$$

(c) La distancia $d(1+x+x^2, \mathbb{W})$

Una solución. Ahora aplicamos la proyección obtenida encima y conseguimos lo siguiente:

$$d(1+x+x^2, \mathbb{W}) = \|1+x+x^2 - P_{\mathbb{W}}(1+x+x^2)\|$$

Pero,

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(1+x+x^2) &= \left(\frac{(-1)-3(1)-6(1)}{5}\right)(1-x^2)+\left(\frac{2(1)+1+2(1)}{5}\right)(3-5x+2x^2)\\
&= \left(\frac{-10}{5}\right)(1-x^2)+\left(\frac{5}{5}\right)(3-5x+2x^2)\\
&= (-2)(1-x^2)+(3-5x+2x^2)\\
&= 1-5x+4x^2
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
d(1+x+x^2,\mathbb{W}) &= \|1+x+x^2-1+5x-4x^2\|\\
&= \|6x-3x^2\|\\
&= \sqrt{0^2+3^2+0^2}\\
&= 3
\end{aligned}
$$

(2) Sea $\alpha=\{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\}\subset\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$. Usando el producto usual de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\langle(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle=0\Longrightarrow\alpha \text{ Linealmente independiente}$$

Una solución. Debemos demostrar que α es linealmente independiente y entonces iniciamos el proceso suponiendo que

$$a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2) \quad = \quad (0,0,0)$$

Pero entonces podemos multiplicar por ejemplo por el vector (x_1,y_1,z_1) y obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\langle a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2),(x_1,y_1,z_1)\rangle &= \langle(0,0,0),(x_1,y_1,z_1)\rangle\Longrightarrow\\
a\langle(x_1,y_1,z_1),(x_1,y_1,z_1)\rangle+b\underbrace{\langle(x_2,y_2,z_2),(x_1,y_1,z_1)\rangle}_{0} &= 0\Longrightarrow\\
a\langle(x_1,y_1,z_1),(x_1,y_1,z_1)\rangle &= 0\Longrightarrow\\
a=0\vee\langle(x_1,y_1,z_1),(x_1,y_1,z_1)\rangle=0 &
\end{aligned}
$$

Luego, $a_0=0$, pues $\langle(x_1,y_1,z_1),(x_1,y_1,z_1)\rangle\neq 0$, ya que por hipótesis, $(x_1,y_1,z_1)\neq(0,0,0)$.

Finalmente, podemos iterar el proceso o bien observar que

$$b(x_2,y_2,z_2) \quad = \quad (0,0,0)\Longrightarrow b=0 \text{ pues, } (x_2,y_2,z_2)\neq(0,0,0)$$

Una solución alternativa:

Si α es linealmente dependiente entonces existe $\lambda\in\mathbb{R};\lambda\neq 0$ tal que $(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)$, pues si $\lambda=0$ entonces $(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$, pero por hipótesis $(x_1,y_1,z_1)\neq(0,0,0)$. Así que

$$\langle(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle \quad = \quad \langle\lambda(x_2,y_2,z_2),(x_2,y_2,z_2)\rangle=\lambda\langle(x_2,y_2,z_2),(x_2,y_2,z_2)\rangle\neq 0$$

Luego,

$$\langle(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle \quad \neq \quad 0$$