**Universidad de Santiago de Chile**
**Departamento de Matemática**
**Álgebra III LEMC**

**Una solución del Taller N° 1**
**Profesor Ricardo Santander Baeza**[1]
**24 de marzo del 2017**

**El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano**

## 1. Algunas sugerencias

- Lean cuidadosamente el problema
- Reconozcan lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a ustedes se les consulta.
- Traten de entender en la forma más clara para ustedes, lo que se les pide, en particular si pueden usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!. Este acto nunca estará de más.
- Analicen cuidadosamente sus datos extrayendo la información que corresponde, orientados por su entendimiento de lo que deben probar.

## 2. Objetivos

- Fomentar el **trabajo en equipo.**
- Estimular **la comprensión de lectura** en problemas matemáticos.
- Clasificar después de leer el problema, **entre información y resultado pedido.**
- Estimular **el uso de una sintaxis adecuada** en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos
- Aprender a **generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente)**, para responder al problema planteado.

## 3. Ejercicios Propuestos

(1) Si $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ entonces determine, si es posible, una base $\beta$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ tal que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución. Sea $\beta = \{A, B, C\}$ la base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ pedida entonces por construcción de la matriz cambio de base tenemos que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 2A + 3B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 2A - 2B + C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow B + 2C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Ahora, haciendo $(1) - (2)$ obtenemos que

$$5B - C = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow 10B - 2C = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Haciendo $(3) + (4)$ obtenemos que

$$11B = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} -\frac{6}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos

Sustituyendo (5) en (3) tenemos que

$$2C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\dfrac{6}{11} \\ \dfrac{3}{11} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{11} \\ \dfrac{8}{11} \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{11} \\ \dfrac{4}{11} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Finalmente, usando (5) y (6) en (1), tenemos que

$$2A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -\dfrac{6}{11} \\ \dfrac{3}{11} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{18}{11} \\ \dfrac{2}{11} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{11} \\ \dfrac{1}{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{9}{11} \\ \dfrac{1}{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dfrac{6}{11} \\ \dfrac{3}{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{3}{11} \\ \dfrac{4}{11} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) Sea $\beta = \{1, 1-x, 1-x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$, y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine, si es posible, una base $\alpha$ de $\mathbb{R}_2[x]$ del tal forma que $A = [I]_\alpha^\beta$. Si es posible exhiba una tal base $\alpha$, si no justifique con precisión meridiana su respuesta.

Solución. Supongamos que $\alpha = \{p_1(x), p_2(x),_3(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, que satisface las condiciones propuestas en el problema encima entonces por definición

$$[I]_\alpha^\beta = ([p_1(x)]_\beta \quad [p_2(x)]_\beta \quad [p_3(x)]_\beta)$$

Así que

$$([p_1(x)]_\beta \quad [p_2(x)]_\beta \quad [p_3(x)]_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$[p_1(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow p_1(x) = 1 + 3(1-x) + 2(1-x^2) = 6 - 3x - 2x^2$$

$$[p_2(x)]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow p_2(x) = -1 + 0(1-x) - 2(1-x^2) = -3 + 2x^2$$

$$[p_3(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow p_3(x) = 2 + 1(1-x) + 4(1-x^2) = 7 - x - 4x^2$$

Así que

$$\alpha = \{6 - 3x - 2x^2, -3 + 2x^2, 7 - x - 4x^2\}$$

Pero se debe observar que $\alpha$ no es base, pues es linealmente dependiente por un cálculo directo, o porque

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

. Luego, $A$ no puede ser una matriz cambio de base