Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
Álgebra III LEMC

Una Solución de la Pep N°1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
10 de Mayo del 2017

El Profesor y la Profesora
se forjan en el aula

(1) Si $\alpha = \{(1,2,3),(2,-1,4),(3,\lambda,4)\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ no es una base}\}$$

Una Solución. Observamos que

$$\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ no es una base} \qquad (*)$$

Conforme a lo que significa $(*)$ y como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$ y la cardinalidad de α es también 3, de acuerdo al "Teorema Mágico"nos basta con estudiar la dependencia lineal del conjunto α y en consecuencia, si suponemos que

$$a_1(1,2,3) + a_2(2,-1,4) + a_3(3,\lambda,4) = (0,0,0)$$

Entonces la reflexión es la siguiente:

$$\begin{aligned}
a_1(1,2,3) + a_2(2,-1,4) + a_3(3,\lambda,4) = (0,0,0) &\iff (a_1 + 2a_2 + 3a_3, 2a_1 - a_2 + \lambda a_3, 3a_1 + 4a_2 + 4a_3) = (0,0,0) \\
\left.\begin{array}{rcl} a_1 + 2a_2 + 3a_3 &=& 0 \\ 2a_1 - a_2 + \lambda a_3 &=& 0 \\ 3a_1 + 4a_2 + 4a_3 &=& 0 \end{array}\right| &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (**)
\end{aligned}$$

Ahora, el sistema $(**)$ tiene infinitas soluciones si y sólo si $|A| = 0$ y entonces esa es la impronta, e.e. bajo que condiciones $|A| = 0$.

$$|A| \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & \lambda - 6 \\ 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & \lambda - 6 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = \lambda + \frac{13}{2} \qquad (***)$$

Sustituyendo $(***)$ en $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{S} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ no es una base} \\
&\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ es linealmente dependiente} \\
&\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge |A| = 0 \\
&\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda + \frac{13}{2} = 0 \\
&\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda = -\frac{13}{2}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{S} \quad = \quad \left\{ -\frac{13}{2} \right\}$$

(2) Si consideramos las bases $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\beta = \{(-1,2,0)(2,0,1)(1,1,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y definimos

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$$

Entonces

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 100'

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A = [I]_{\alpha}^{\beta}\}$$

Una Solución. Observamos que

$$\lambda \in \mathbb{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ A = [I]_{\alpha}^{\beta} \qquad (*)$$

Luego, debemos estudiar conforme a su definición las propiedades de la matriz cambio de base $[I]_{\alpha}^{\beta}$ entonces

$$[I]_{\alpha}^{\beta} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

Pero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -3\lambda - 1$$

Luego, $\lambda \in \mathbb{S} \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda \neq -\frac{1}{3}$ y

$$\mathbb{S} \quad = \quad \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

(b) Determine la base α

Una Solución. Por definición

$$[I]_{\alpha}^{\beta} \quad = \quad ([v_1]_{\beta} \quad [v_2]_{\beta} \quad [v_3]_{\beta})$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
[v_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad & \Longleftrightarrow \quad v_1 = (-1,2,0) + 2(2,0,1) = (3,2,2) \\
[v_2]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad & \Longleftrightarrow \quad v_2 = 2(-1,2,0) + (2,0,1) + (1,1,3) = (1,5,4) \\
[v_3]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad & \Longleftrightarrow \quad v_3 = (-1,2,0) + 3(2,0,1) + \lambda(1,1,3) = (\lambda+5, \lambda+2, 3\lambda+3)
\end{aligned}$$

Así que, para que $A = [I]_{\alpha}^{\beta}$ entonces α debe ser una base de la forma

$$\alpha \quad = \quad \{(3,2,2), (1,5,4), (\lambda+5, \lambda+2, 3\lambda+3)\} \qquad \left(\lambda \neq -\frac{1}{3}\right)$$

(3) Si consideramos en $\mathbb{R}^4$ el producto interno usual y el subespacio

$$\mathbb{W} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - t = 0 \wedge x - y + z + t = 0\right\}$$

Entonces determine una base ortogonal para $\mathbb{W}$.

Solución. Determinamos en primer lugar una base de $\mathbb{W}$. e.e.

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} &\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x+y+2z-t=0 \wedge x-y+z+t=0\\
&\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& 0\\ x-y+z+t &=& 0\end{array}\right|\\
&\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& 0\\ 2x+3z &=& 0\end{array}\right|\\
&\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& 0\\ z &=& -\frac{2}{3}x\end{array}\right|\\
&\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+y-\frac{4}{3}x-t &=& 0\\ z &=& -\frac{2}{3}x\end{array}\right|\\
&\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} y &=& \frac{1}{3}x+t\\ z &=& -\frac{2}{3}x\end{array}\right|\\
&\Leftrightarrow u = \left(x, \frac{1}{3}x+t, -\frac{2}{3}x, t\right); \quad x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow u = \left(x, \frac{1}{3}x, -\frac{2}{3}x, 0\right) + (0,t,0,t); \quad x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow u = x\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right) + t\,(0,1,0,1); \quad x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego $\mathbb{W} = \langle\{(3,1,-2,0),(0,1,0,1)\}\rangle$.

Finalmente $\alpha = \{(3,1,-2,0),(0,1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{W}$, pues

$$x\,(3,1,-2,0) + t\,(0,1,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (3x, x+t, -2x, t) = (0,0,0,0) \Rightarrow x = t = 0$$

Ahora, para concluir aplicamos el proceso de Gram-Schmidt y para ello definimos:

$$\begin{aligned}
u_1' &= (0,1,0,1)\\
u_2' &= (3,1,-2,0) - \frac{\langle(3,1,-2,0),(0,1,0,1)\rangle}{\langle(0,1,0,1),(0,1,0,1)\rangle}\,(0,1,0,1)\\
&= (3,1,-2,0) - \frac{1}{2}\,(0,1,0,1)\\
&= \left(3, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,(6,1,-4,-1)
\end{aligned}$$

Podemos considerar la base ortogonal de $\mathbb{W}$

$$\alpha' = \{(0,1,0,1),(6,1,-4,-1)\}$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con un producto interno $\langle,\rangle$ y $\alpha = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{V}$, donde $v_1 \neq 0_{\mathbb{V}}$ y $v_2 \neq 0_{\mathbb{V}}$. Si aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto α, obtenemos el conjunto $\alpha' = \{v_1', v_2'\}$, donde $v_1' = v_1$. Demuestre, si es posible que

$$v_2' = 0_{\mathbb{V}} \implies \alpha \text{ es un conjunto linealmente dependiente}$$

Una Solución. Aplicamos el proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt y obtenemos

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1\\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1'
\end{aligned}$$

Ahora por hipótesis $v_2' = 0_{\mathbb{V}}$ entonces

$$\begin{aligned}
0_{\mathbb{V}} = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' &\iff v_2 = \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1\\
&\implies \alpha \text{ es un conjunto linealmente dependiente}
\end{aligned}$$