Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
Álgebra III LEMC

Una Solución del Control N°1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Viernes 07 de abril del 2017

El Profesor se forja en el aula

(1) Si $\alpha = \{(1,1,1,1),(1,1,-1,0),(1,1,0,0),(1,\lambda,-1,1)\}$ entonces determine el conjunto

$$\beta = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es una base } \mathbb{R}^4\}$$

Una solución. Debemos determinar el conjunto β entonces de acuerdo a nuestras prácticas y costumbres:

$$\begin{aligned} \lambda \in \beta &\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ es una base } \mathbb{R}^4 \\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ Linealmente independiente y un sistema de generadores para } \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

Como la cardinalidad de α es 4 y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4$ entonces conforme a nuestro "corolario del teorema mágico"para que α sea una base, basta que sea linealmente independiente o un sistema de generadores.

Así que basta mostrar que α es Linealmente independiente y entonces de nuevo conforme a nuestras prácticas, tenemos que

$$a_1(1,1,1,1) + a_2(1,1,-1,0) + a_3(1,1,0,0) + a_4(1,\lambda,-1,1) = (0,0,0,0) \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + \lambda a_4 & = & 0 \\ a_1 - a_2 - a_4 & = & 0 \\ a_1 + a_4 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Ahora $(*)$ tiene solución única si y sólo si $|A| \neq 0$ entonces

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = -\left|\begin{pmatrix} 0 & \lambda-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \lambda - 1$$

Luego, $(*)$ tiene solución única si y sólo si $|A| = \lambda - 1 \neq 0$. Y en tal caso la solución es

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así que, α linealmente independiente si y sólo si $\lambda - 1 \neq 0$, e.e. $\lambda \neq 1$. Por tanto $\lambda \in \beta \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda \neq 1$.

Y,

$$\beta \quad = \quad \mathbb{R} - \{1\}$$

(2) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. Sea $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_i = av_1 + v_i$, para $(i = 1, 2, \dots n)$ y $a \neq -1$ es un escalar fijo.

- Demuestre, si es posible, que β es una base, caso contrario justifique.

  Una solución.

[1]Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 80'

Ya que la cardinalidad de β es n y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = n$, así que en virtud de nuestro Teorema mágico, basta mostrar que β es linealmente independiente o un sistema de generadores, en el caso intentaremos mostrar que β es un sistema de generadores, dado el tenor de la pregunta siguiente.

En consecuencia, si $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es una base entonces es un sistema de generadores y para cada u existen únicos escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que u se escribe únicamente de la forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \qquad (*)$$

Ahora, intentemos resolver la ecuación

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \qquad (**)$$

Como, $w_i = w_i = av_1 + v_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$ entonces sustituyendo en $(**)$ tenemos que

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n} x_i(av_1 + v_i) \\ &= x_1(av_1 + v_1) + x_2(av_1 + v_2) + x_3(av_1 + v_3) + \cdots + x_n(av_1 + v_n) \\ &= x_1(a+1)v_1 + x_2(av_1 + v_2) + x_3(av_1 + v_3) + \cdots + x_n(av_1 + v_n) \\ &= x_1(a+1)v_1 + x_2av_1 + x_2v_2 + x_3av_1 + x_3v_3 + \cdots + x_nav_1 + x_nv_n \\ &= (x_1(a+1) + x_2a + x_3a + \cdots + x_na)v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + \cdots + x_nv_n \quad (***) \end{aligned}$$

De $(*)$ y $(***)$ sigue que

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(a+1) + x_2a + x_3a + \cdots + x_na & = & c_1 \\ x_2 & = & c_2 \\ x_3 & = & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & c_n \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_1(a+1) + c_2a + c_3a + \cdots + c_na & = & c_1 \\ x_2 & = & c_2 \\ x_3 & = & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & c_n \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(a+1) + a(c_2 + c_3 + \cdots + c_n) & = & c_1 \\ x_2 & = & c_2 \\ x_3 & = & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & c_n \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcc} x_1 & = & \frac{c_1 - a(c_2+c_3+\cdots+c_n)}{a+1} \\ x_2 & = & c_2 \\ x_3 & = & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & c_n \end{array}\right|$$

Como los c_i existen y son únicos (ver$(*)$) y $a \neq 1$ entonces β es un sistema de generadores y por ende una base y tenemos la representación única:

$$u = \left(\frac{c_1 - a(c_2 + c_3 + \cdots + c_n)}{a+1}\right) w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 + \cdots + c_nw_n \tag{1}$$

- Si sus respuesta es afirmativa, es decir β es una base entonces determine la matriz $[I]_\alpha^\beta$

Una solución: Por definición tenemos que

$$[I]_\alpha^\beta = \left([v_1]_\beta \quad [v_2]_\beta \quad [v_3]_\beta \cdots [v_v]_\beta\right)$$

Pero no debemos olvidar que la relación $(*)$ dice que la expresión de u depende de los c_i, para $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ en consecuencia:

$$
\begin{aligned}
v_1 = \underbrace{1}_{c_1}\cdot v_1 + \underbrace{0}_{c_2}\cdot v_2 + \underbrace{0}_{c_3}\cdot v_3 + \cdots + \underbrace{0}_{c_n}\cdots v_n \quad &\Longrightarrow \quad v_1 = \left(\frac{1-a\cdot 0}{a+1}\right) w_1 + 0\cdot w_2 + 0\cdot w_3 + \cdots + 0\cdot w_n \\
&\Longrightarrow \quad v_1 = \left(\frac{1}{a+1}\right) w_1 + 0\cdot w_2 + 0\cdot w_3 + \cdots + 0\cdot w_n \\
&\Longrightarrow \quad [v_1]_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_2 = \underbrace{0}_{c_1}\cdot v_1 + \underbrace{1}_{c_2}\cdot v_2 + \underbrace{0}_{c_3}\cdot v_3 + \cdots + \underbrace{0}_{c_n}\cdots v_n \quad &\Longrightarrow \quad v_2 = \left(\frac{0-a\cdot 1}{a+1}\right) w_1 + 1\cdot w_2 + 0\cdot w_3 + \cdots + 0\cdot w_n \\
&\Longrightarrow \quad v_2 = -\left(\frac{a}{a+1}\right) w_1 + 1\cdot w_2 + 0\cdot w_3 + \cdots + 0\cdot w_n \\
&\Longrightarrow \quad [v_2]_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{a}{a+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_3 = \underbrace{0}_{c_1}\cdot v_1 + \underbrace{0}_{c_2}\cdot v_2 + \underbrace{1}_{c_3}\cdot v_3 + \cdots + \underbrace{0}_{c_n}\cdots v_n \quad &\Longrightarrow \quad v_3 = \left(\frac{0-a\cdot 1}{a+1}\right) w_1 + 0\cdot w_2 + 1\cdot w_3 + \cdots + 0\cdot w_n \\
&\Longrightarrow \quad v_3 = -\left(\frac{a}{a+1}\right) w_1 + 1\cdot w_2 + 0\cdot w_3 + \cdots + 0\cdot w_n \\
&\Longrightarrow \quad [v_3]_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{a}{a+1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
v_n = \underbrace{0}_{c_1}\cdot v_1 + \underbrace{0}_{c_2}\cdot v_2 + \underbrace{0}_{c_3}\cdot v_3 + \cdots + \underbrace{1}_{c_n}\cdots v_n \quad &\Longrightarrow \quad v_n = \left(\frac{0-a\cdot 1}{a+1}\right) w_1 + 0\cdot w_2 + 0\cdot w_3 + \cdots + 1\cdot w_n \\
&\Longrightarrow \quad v_n = -\left(\frac{a}{a+1}\right) w_1 + 0\cdot w_2 + 0\cdot w_3 + \cdots + 1\cdot w_n \\
&\Longrightarrow \quad [v_n]_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{a}{a+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Así que

$$
[I]_\alpha^\beta \quad = \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & \cdots & -\frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

Una solución alternativa

Sabemos que

$$\begin{array}{rcl}
w_1 &=& av_1+v_1 \Longrightarrow v_1=\left(\frac{1}{a+1}\right)w_1\\
w_2 &=& av_1+v_2 \Longrightarrow w_2=a\left(\frac{1}{a+1}\right)w_1+v_2 \Longrightarrow v_2=-\left(\frac{a}{a+1}\right)w_1+1w_2\\
w_3 &=& av_1+v_3 \Longrightarrow w_3=a\left(\frac{1}{a+1}\right)w_1+v_3 \Longrightarrow v_3=-\left(\frac{a}{a+1}\right)w_1+1w_3\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
w_n &=& av_1+v_n \Longrightarrow w_n=a\left(\frac{1}{a+1}\right)w_1+v_n \Longrightarrow v_n=-\left(\frac{a}{a+1}\right)w_1+1w_n
\end{array} \tag{2}$$

Luego de (2) sigue que:

$$\begin{array}{rcl}
v_1 &=& \left(\frac{1}{a+1}\right)w_1+0w_2+\cdots+0w_n\\
v_2 &=& -\left(\frac{a}{a+1}\right)w_1+1w_2+0w_3+\cdots+0w_n\\
v_3 &=& -\left(\frac{a}{a+1}\right)w_1+0w_2+1w_3+\cdots+0w_n\\
\vdots & \vdots & \\
v_n &=& -\left(\frac{a}{a+1}\right)w_1+0w_2+0w_3+\cdots+1w_n
\end{array} \tag{3}$$

Y de (3) sigue que

$$\begin{array}{rcl}
[v_1]_\beta &=& \begin{pmatrix}\frac{1}{a+1}\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\
[v_2]_\beta &=& \begin{pmatrix}\frac{1}{a+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\
[v_3]_\beta &=& \begin{pmatrix}\frac{1}{a+1}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\
&\vdots&\\
[v_n]_\beta &=& \begin{pmatrix}\frac{1}{a+1}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}
\end{array}$$

Así que

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix}-\frac{1}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & \cdots & -\frac{1}{a+1}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$