Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
Álgebra I LEMC

Solución y Discusión del Taller N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Lunes 27 de Marzo del 2017

El trabajo dignifica
al ser humano

1. Algunas sugerencias

- Lean cuidadosamente el problema
- Reconozcan lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a ustedes se les consulta.
- Traten de entender en la forma más clara para ustedes, lo que se les pide, en particular si pueden usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!. Este acto nunca estará de más.
- Analicen cuidadosamente sus datos extrayendo la información que corresponde, orientados por su entendimiento de lo que deben probar.

2. Objetivos

- Fomentar el **trabajo en equipo.**
- Estimular **la comprensión de lectura** en problemas matemáticos.
- Clasificar después de leer el problema, **entre información y resultado pedido.**
- Estimular **el uso de una sintaxis adecuada** en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos
- Aprender a **generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente)**, para responder al problema planteado.

3. Ejercicios Propuestos

(1) Dadas las proposiciones lógicas, p, q, r, s, y

$$(q \Longrightarrow [(\sim p \vee r) \wedge \sim s]) \wedge [\sim s \Longrightarrow (\sim r \wedge q)] \tag{1}$$

Determine los valores de verdad que pueden admitir las proposiciones p, q, r, si q y (1) son verdaderas.

Solución, partamos preparando el ambiente: Si llamamos

$$\left.\begin{array}{rcl} A & = & (q \Longrightarrow [(\sim p \vee r) \wedge \sim s]) \\ B & = & [\sim s \Longrightarrow (\sim r \wedge q)] \end{array}\right\} \text{entonces} \quad (1) \equiv A \wedge B \qquad (*)$$

Luego,

$$\begin{array}{rcll} q\,(Verd)\ \wedge\ (1)\,(Verd) & \Longleftrightarrow & q\,(Verd)\ \wedge\ (A \wedge B)\,(Verd) & \text{ver } (*) \\ & \Longleftrightarrow & q\,(Verd)\ \wedge\ (A\,(Verd)\ \wedge\ B\,(Verd)) & \text{ver } \begin{array}{|c|c|c|} A & \wedge & B \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad (2*) \end{array}$$

Ahora, estudiemos la subcondición: $q\,(Verd)\ \wedge\ A\,(Verd)$

[1]Cada problema vale 3.0 puntos

$$
\begin{aligned}
q\ (Verd)\ \wedge\ A\ (Verd) &\iff q\ (Verd)\ \wedge\ (q \Longrightarrow [(\sim p \vee r) \wedge \sim s])\ (Verd) && \text{ver } (*)\\
&\iff q\ (Verd)\ \wedge\ [(\sim p \vee r) \wedge \sim s]\ (Verd) && \text{ver} \begin{array}{|c|c|c|} P & \Rightarrow & Q \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} (3*)\\
&\iff q\ (Verd)\ \wedge\ [(\sim p \vee r)\ (Verd) \wedge \sim s\ (Verd)] && \text{ver } (2*)\\
&\iff q\ (Verd)\ \wedge\ [(p \Rightarrow r)\ (Verd) \wedge \sim s\ (Verd)] && \text{Taut } [m \Rightarrow n \Leftrightarrow \sim m \vee n]\\
&\iff q\ (Verd)\ \wedge\ [(p \Rightarrow r)\ (Verd) \wedge s\ (Fals)] && \text{ver} \begin{array}{|c|c|} s & \sim s \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{array}\\
&\iff q\ (Verd)\ \wedge \left[\left. \begin{array}{c} p\ (Verd) \wedge r\ (Verd) \\ \vee \\ p\ (Fals) \wedge r\ (Verd) \\ \vee \\ p\ (Fals) \wedge r\ (Fals) \end{array} \right\} \wedge s\ (Fals) \right] && \text{ver } (3*)
\end{aligned}
$$

Luego, podemos tener como subconclusión que

$$
q\ (Verd)\ \wedge\ A\ (Verd) \iff \left[\begin{array}{c} q\ (Verd)\ \wedge\ p\ (Verd) \wedge r\ (Verd) \wedge s\ (Fals) \\ \vee \\ q\ (Verd)\ \wedge\ p\ (Fals) \wedge r\ (Verd) \wedge s\ (Fals) \\ \vee \\ q\ (Verd)\ \wedge\ p\ (Fals) \wedge r\ (Fals) \wedge s\ (Fals) \end{array} \right] \quad (4*)
$$

Ahora, estudiemos la subcondición: $B\ (Verd)$

$$
\begin{aligned}
B\ (Verd) &\iff [\sim s \Longrightarrow (\sim r \wedge q)]\ (Verd) \\
&\iff [s \vee (\sim r \wedge q)]\ (Verd) && \text{Taut } [m \Rightarrow n \Leftrightarrow \sim m \vee n]\\
&\iff \left[\begin{array}{c} s\ (Verd) \wedge (\sim r \wedge q)\ (Verd) \\ \vee \\ s\ (Verd) \wedge (\sim r \wedge q)\ (Fals) \\ \vee \\ s\ (Fals) \wedge (\sim r \wedge q)\ (Verd) \end{array} \right] && \text{ver} \begin{array}{|c|c|c|} m & \vee & n \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

Ahora, obtenemos otra subconclusión:

$$
B\ (Verd) \iff \left[\begin{array}{c} s\ (Verd) \wedge (\sim r \wedge q)\ (Verd) \\ \vee \\ s\ (Verd) \wedge (\sim r \wedge q)\ (Fals) \\ \vee \\ s\ (Fals) \wedge (\sim r \wedge q)\ (Verd) \end{array} \right] \quad (5*)
$$

Finalmente, sustituyendo $(4*)$ y $(5*)$ en $(2*)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
q\,(Verd)\ \wedge\ (1)\,(Verd) \quad &\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Verd)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge s\,(Fals)\end{array}\right] \wedge \left[\begin{array}{c} s\,(Verd)\wedge(\sim r\wedge q)\,(Verd)\\ \vee \\ s\,(Verd)\wedge(\sim r\wedge q)\,(Fals)\\ \vee \\ s\,(Fals)\wedge(\sim r\wedge q)\,(Verd)\end{array}\right]\\
&\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Verd)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge s\,(Fals)\end{array}\right] \wedge \left[\ s\,(Fals)\wedge(\sim r\wedge q)\,(Verd)\ \right]\\
&\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Verd)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge s\,(Fals)\end{array}\right] \wedge \left[\ s\,(Fals)\wedge \sim r\,(Verd)\wedge q\,(Verd)\ \right]\\
&\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Verd)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge s\,(Fals)\end{array}\right] \wedge \left[\ s\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge q\,(Verd)\ \right]\\
&\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Verd)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Verd)\wedge s\,(Fals)\\ \vee \\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge s\,(Fals)\end{array}\right] \wedge \left[\ s\,(Fals)\wedge \sim r\,(Verd)\wedge q\,(Verd)\ \right]\\
&\Longleftrightarrow \left[\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge s\,(Fals)\ \right]\wedge\left[\ s\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge q\,(Verd)\ \right]\\
&\Longleftrightarrow \left[\ q\,(Verd)\ \wedge\ p\,(Fals)\wedge r\,(Fals)\wedge s\,(Fals)\ \right]
\end{aligned}
$$

Finalmente, podemos comprobar nuestros resultados, implementando una tabla de verdad que de cuenta de la situación in comento.

Tabla de Verdad

p	q	r	s	~p	~r	~s	~p∨r	(~p∨r)∧~s	q ⇒ (p∨r)∧~s	[q ⇒ (p∨r)∧~s]∧[~s ⇒ (~r∨q)]	~r∧q	~s ⇒ (~r∧q)
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	**0**	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	**0**	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	**0**	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	**0**	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	**1**	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	**0**	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	**1**	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	**0**	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	**0**	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	**0**	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	**0**	1	1
0	**1**	**0**	**0**	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	**1**	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	**1**	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	**0**	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**0**	0	0

(2) Dadas las proposiciones p, q, r, s, y

$$[(p \Longrightarrow r) \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow s)] \Longrightarrow [(\sim r \Longrightarrow s)] \tag{2}$$

(a) Demuestre usando Tablas de verdad que la proposición (2) es una Tautología.

Solución, procedemos a implementar la tabla de verdad ad-hoc al problema planteado.

Así que es una tautología.

(b) Demuestre usando propiedades que la proposición (2) es una Tautología.

Solución, procedemos a usar las tautologías que conocemos para resolver el problema planteado. Le dejo la tarea de completar las propiedades usadas.

$$\begin{aligned}
[(p \Longrightarrow r) \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow s)] &\Longrightarrow [(p \Longrightarrow r) \wedge (\sim p \Longrightarrow s)] \\
&\Longrightarrow [(\sim r \Longrightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Longrightarrow s)] \\
&\Longrightarrow [(\sim r \Longrightarrow s)]
\end{aligned}$$