Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Licenciatura en Matemática y C.C.

Álgebra II[1] - Una Solución de la Pep N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
02 de mayo del 2017

(1) Si definimos el conectivo lógico $*$ entre proposiciones lógicas como sigue:

$$u * v = \begin{cases} \text{Verdadera} & : \text{Si } u \text{ y } v \text{ poseen distinto valor de verdad} \\ \text{Falsa} & : \text{ En cualquier otro caso} \end{cases}$$

Y para las proposiciones lógicas p y q, definimos la proposición lógica h por:

$$h \quad = \quad [p \implies p \vee q] * [(\sim p \wedge \sim q) \implies \sim p]$$

Entonces

(a) Determine el valor de verdad de h usando una Tabla de Verdad.

Una solución:

En primer lugar observamos que:

u	v	$u * v$	$(u * v) \iff \sim (u \iff v)$	$u \iff v$	$\sim (u \iff v)$
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0

Luego,

$$u * v \quad \iff \quad \sim (u \iff v)$$

En segundo lugar con el punto anterior en mente, construimos una tabla para representar y analizar esta situación como sigue:

p	$\sim p$	q	$\sim q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow p \vee q$	$[p \Longrightarrow p \vee q] * [(\sim p \wedge \sim q) \Longrightarrow \sim p]$	$\sim p \wedge \sim q$	$(\sim p \wedge \sim q) \Longrightarrow \sim p$
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1

Luego, h es falsa.

(b) Determine el valor de verdad de h usando propiedades. (es decir, no use tabla de verdad)

Una solución.
En primer lugar observamos que por definición de $*$ tenemos que:

$$u * v \quad \iff \quad \sim (u \iff v)$$

En segundo lugar aplicamos propiedades y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} p \Longrightarrow p \vee q \quad & \iff \quad \sim (p \vee q) \Longrightarrow \sim p \quad && (\text{Tautología } a \Rightarrow b \Leftrightarrow \sim b \Rightarrow \sim a) \\ & \iff \quad \sim p \wedge \sim q \Longrightarrow \sim p \quad && (\text{Tautología: De Morgan}) \end{aligned}$$

Luego, h es falsa, pues;

$$\sim [(p \Longrightarrow p \vee q) \quad \iff \quad ((\sim p \wedge \sim q) \Longrightarrow \sim p)] \quad \text{Contradicción}$$

[1] Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 100'

(2) Dados los conjuntos A, B y $\mathbb{U}$ tal que $A \subset \mathbb{U}$ y $B \subset \mathbb{U}$ entonces

(a) Usando una tabla de verdad demuestre que

$$A \cap (A \cap B^c)^c \quad = \quad A \cap B$$

Una solución: Si definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid p(x) \text{ es verdadera}\} \\ B &= \{x \mid q(x) \text{ es verdadera}\} \end{aligned}$$

entonces

$$A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap B$$

Es equivalente a la tabla de verdad

$$p \wedge \sim (p \wedge \sim q) \quad \Longleftrightarrow \quad p \wedge q$$

entonces procedemos en consecuencia:

p	$\sim p$	q	$\sim q$	$(p\wedge \sim q)$	$\sim (p\wedge \sim q)$	$(p\wedge \sim (p\wedge \sim q))$	$p\wedge \sim (p\wedge \sim q) \Longleftrightarrow (p \wedge q)$	$p \wedge q$
1	0	1	0	0	1	1	**1**	1
1	0	0	1	1	0	0	**1**	0
0	1	1	0	0	1	0	**1**	0
0	1	0	1	0	1	0	**1**	0

Así que es una tautología.

(b) Demuestre usando propiedades que

$$A \cap (A \cap B^c)^c \quad = \quad A \cap B$$

Una solución.

$$\begin{aligned} A \cap (A \cap B^c)^c &= A \cap (A^c \cup (B^c)^c)) \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= A \cap A^c \cup A \cap B \\ &= \emptyset \cup A \cap B \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

(3) Dados los conjuntos A, B y U tal que $A \subset U$ y $B \subset U$ entonces demuestre que

(a) $A - [B \cap (A \cap B)^c]^c = \emptyset$

Una solución

$$\begin{aligned} A - [B \cap (A \cap B)^c]^c &= A \cap [B \cap (A \cap B)^c] \\ &= (A \cap B) \cap (A \cap B)^c \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

(b) $A \subset B \Longrightarrow (A \cap B^c) = \emptyset$

Una Solución. Por hipótesis

$$\begin{aligned} A \subset B &\Longleftrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in B) \\ &\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \qquad (*) \end{aligned}$$

Por otra parte, si $x \in (A \cap B^c)$ entonces

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B^c) &\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \\ &\Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B \qquad (**) \end{aligned}$$

Conclusión: de $(*)$ y $(**)$ sigue

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \in B \wedge x \in B^c \text{ Contradicción}$$