El trabajo dignifica

Algebra I: Ejercicios Resueltos de Lógica

Profesor Ricardo Santander Baeza

2017

1. Dada la proposición lógica

$$\sim (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\sim p \Longrightarrow \sim q) \qquad (*)$$

1.1 Muestre que $(*)$ es una Tautología usando una tabla de verdad.

1. Dada la proposición lógica

$$\sim (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\sim p \Longrightarrow \sim q) \qquad (*)$$

1.1 Muestre que $(*)$ es una Tautología usando una tabla de verdad.

Para mostrar que $(*)$ es una Tautología usando una tabla de verdad, recurrimos al formato usual. e.e.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Longrightarrow q$	$\sim (p \Longrightarrow q)$	$\Longrightarrow$	$\sim p \Longrightarrow \sim q$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1

Luego, $(*)$ es una Tautología

1.2 Muestre que $(*)$ es una Tautología usando propiedades.

1.2 Muestre que $(*)$ es una Tautología usando propiedades.
En efecto

$$
\begin{aligned}
\sim (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\sim p \Longrightarrow \sim q) &\equiv \sim (\sim p \vee q) \Longrightarrow (\sim (\sim p) \vee \sim q) \\
&\equiv (\sim (\sim p) \wedge \sim q) \Longrightarrow (p \vee \sim q) \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \Longrightarrow (p \vee \sim q) \\
&\equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee (p \vee \sim q) \\
&\equiv (\sim p \vee q) \vee (p \vee \sim q) \\
&\equiv \sim p \vee q \vee p \vee \sim q \\
&\equiv \sim p \vee p \vee q \vee \sim q \\
&\equiv T \vee T \\
&\equiv T
\end{aligned}
$$

2. Determine que la proposición del problema 2. es una tautología, usando una tabla de verdad:

$$(p \Longrightarrow [q \vee r]) \Longleftrightarrow (\sim [q \vee r] \Longrightarrow \sim p) \qquad (*)$$

2. Determine que la proposición del problema 2. es una tautología, usando una tabla de verdad:

$$(p \Longrightarrow [q \vee r]) \Longleftrightarrow (\sim [q \vee r] \Longrightarrow \sim p) \quad (*)$$

Si en $(*)$ hacemos $s = q \vee r$ entonces reducimos el problema a mostrar que:

$$p \Longrightarrow s \Longleftrightarrow \sim s \Longrightarrow \sim p \qquad (**)$$

Así que ahora, aplicamos nuestro formato a (**) y obtenemos la siguiente tabla:

p	s	$\sim p$	$\sim s$	$p \Longrightarrow s$	$\Longleftrightarrow$	$\sim s \Longrightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

T

Luego $(*)$ es una Tautología.

2. Determine que la proposición del problema 2. es una tautología, usando una tabla de verdad:

$$(p \Longrightarrow [q \vee r]) \Longleftrightarrow (\sim [q \vee r] \Longrightarrow \sim p) \qquad (*)$$

Si en $(*)$ hacemos $s = q \vee r$ entonces reducimos el problema a mostrar que:

$$p \Longrightarrow s \Longleftrightarrow \sim s \Longrightarrow \sim p \qquad (**)$$

Así que ahora, aplicamos nuestro formato a (**) y obtenemos la siguiente tabla:

p	s	$\sim p$	$\sim s$	$p \Longrightarrow s$	$\Longleftrightarrow$	$\sim s \Longrightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

T

Luego $(*)$ es una Tautología.
Ahora usemos propiedades para mostrar $(*)$ es una tautología

2. Determine que la proposición del problema 2. es una tautología, usando una tabla de verdad:

$$(p \Longrightarrow [q \vee r]) \Longleftrightarrow (\sim [q \vee r] \Longrightarrow \sim p) \qquad (*)$$

Si en $(*)$ hacemos $s = q \vee r$ entonces reducimos el problema a mostrar que:

$$p \Longrightarrow s \Longleftrightarrow \sim s \Longrightarrow \sim p \qquad (**)$$

Así que ahora, aplicamos nuestro formato a (**) y obtenemos la siguiente tabla:

p	s	$\sim p$	$\sim s$	$p \Longrightarrow s$	$\Longleftrightarrow$	$\sim s \Longrightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

T

Luego $(*)$ es una Tautología.
Ahora usemos propiedades para mostrar $(*)$ es una tautología

$$\begin{aligned}
(p \Longrightarrow [q \vee r]) &\Longleftrightarrow (\sim p \vee [q \vee r]) \\
&\Longleftrightarrow ([q \vee r] \vee \sim p) \\
&\Longleftrightarrow (\sim (\sim [q \vee r]) \vee \sim p) \\
&\Longleftrightarrow (\sim [q \vee r] \Longrightarrow \sim p)
\end{aligned}$$

3. Si p y q son proposiciones demuestre usando una tabla de verdad que:

$$(p \Longrightarrow q) \iff [(p \wedge \sim q) \Longrightarrow (r \wedge \sim r)] \quad \text{Es una Tautología}$$

3. Si p y q son proposiciones demuestre usando una tabla de verdad que:

$$(p \Longrightarrow q) \iff [(p \wedge \sim q) \Longrightarrow (r \wedge \sim r)] \quad \text{Es una Tautología}$$

Construyamos la tabla de verdad.

p	q	r	$\sim q$	$(p \Longrightarrow q)$	$\iff$	$p \wedge \sim q$	$\Longrightarrow$	$r \wedge \sim r$
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Luego, la proposición es una tautología.

4. Dadas las proposiciones p, q y

$$\{q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]\} \Longleftrightarrow p \wedge q \qquad (*)$$

♦ Demuestre usando Tablas de verdad que la proposición $(*)$ es una Tautología.

4. Dadas las proposiciones p, q y

$$\{q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]\} \Longleftrightarrow p \wedge q \qquad (*)$$

♦ Demuestre usando Tablas de verdad que la proposición $(*)$ es una Tautología.

p	$\wedge$	q	$\Longrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$	$\sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]$	$q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]$	$\Longleftrightarrow$	$p \wedge q$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0

4. Dadas las proposiciones p, q y

$$\{q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]\} \Longleftrightarrow p \wedge q \qquad (*)$$

♦ Demuestre usando Tablas de verdad que la proposición $(*)$ es una Tautología.

p	$\wedge$	q	$\Longrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$	$\sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]$	$q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]$	$\Longleftrightarrow$	$p \wedge q$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0

♦ Demuestre usando propiedades que la proposición $(*)$ es una tautología.

4. Dadas las proposiciones p, q y

$$\{q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]\} \Longleftrightarrow p \wedge q \qquad (*)$$

♦ Demuestre usando Tablas de verdad que la proposición $(*)$ es una Tautología.

p	$\wedge$	q	$\Longrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$	$\sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]$	$q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]$	$\Longleftrightarrow$	$p \wedge q$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0

♦ Demuestre usando propiedades que la proposición $(*)$ es una tautología.

$$\begin{aligned}
\{q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow (\sim p \vee \sim q)]\} &\Longleftrightarrow q \wedge \sim [(p \wedge q) \Longrightarrow \sim (p \wedge q)] && (\text{ De Morgan}) \\
&\Longleftrightarrow q \wedge \sim [\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \wedge q)] && (a \Longrightarrow b \Longleftrightarrow \sim a \vee b) \\
&\Longleftrightarrow q \wedge \sim [\sim (p \wedge q)] && (p \vee p \Longleftrightarrow p) \\
&\Longleftrightarrow q \wedge (p \wedge q) && (\sim\sim p \Longleftrightarrow p) \\
&\Longleftrightarrow (q \wedge q) \wedge p && (p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p) \\
&\Longleftrightarrow q \wedge p
\end{aligned}$$

5. Determine usando propiedades que la siguiente proposición

$$[(\sim p \vee q) \wedge (r \implies s) \wedge \sim (q \wedge s)] \implies (p \implies \sim r)$$

Es una tautología.

5. Determine usando propiedades que la siguiente proposición

$$[(\sim p \vee q) \wedge (r \Longrightarrow s) \wedge \sim (q \wedge s)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow \sim r)$$

Es una tautología.

$$\begin{aligned}
(\sim p \vee q) \wedge (r \Longrightarrow s) \wedge \sim (q \wedge s) &\Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \\
&\Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s) \wedge (q \Longrightarrow \sim s) \\
&\Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow \sim s) \wedge (r \Longrightarrow s) \\
&\Longrightarrow (p \Longrightarrow \sim s) \wedge (r \Longrightarrow s) \\
&\Longrightarrow (p \Longrightarrow \sim s) \wedge (\sim s \Longrightarrow \sim r) \\
&\Longrightarrow p \Longrightarrow \sim r
\end{aligned}$$

6. Demuestre justificando paso a paso, (usando propiedades no tablas de verdad), la siguiente proposición es verdadera:

$$\sim [\{(\sim q \Longrightarrow \sim p) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Longrightarrow (p \wedge r)$$

6. Demuestre justificando paso a paso, (usando propiedades no tablas de verdad), la siguiente proposición es verdadera:

$$\sim [\{(\sim q \Longrightarrow \sim p) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Longrightarrow (p \wedge r)$$

Si llamamos $w = [\{(\sim q \Longrightarrow \sim p) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)]$ entonces

$$\begin{aligned}
\sim w &\iff \sim [\{(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] && : \left(x \Longrightarrow y \overset{\text{Tautología}}{\iff} \sim y \Longrightarrow \sim x\right) \\
&\iff \sim [\{(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (s \Longrightarrow \sim q)] && : \left(x \Longrightarrow y \overset{\text{Tautología}}{\iff} y \vee \sim x\right) \\
&\iff \sim [(p \Longrightarrow q) \wedge \{(r \Longrightarrow s) \wedge (s \Longrightarrow \sim q)\}] && : (\text{Asociatividad de } \wedge) \\
&\Longrightarrow \sim [(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow \sim q)] && : (\text{Transitividad de } \wedge) \\
&\Longrightarrow \sim [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow \sim r)] && : \left(\left[x \Longrightarrow y \overset{\text{Tautología}}{\iff} \sim y \Longrightarrow \sim x\right]\right) \\
&\Longrightarrow \sim [(p \Longrightarrow \sim r)] && : (\text{Transitividad de } \wedge) \\
&\Longrightarrow \sim [(\sim r \vee \sim p)] && \\
&\Longrightarrow \sim\sim (r \wedge p) && : \text{ De Morgan} \\
&\Longrightarrow r \wedge p && : [\sim (\sim x) = x]
\end{aligned}$$

7. Si se define el conectivo lógico $*$ como:

$$p * q \text{ es Falsa sólo si } p \text{ y } q \text{ son verdaderas, caso contrario } p * q \text{ es Verdadera}$$

entonces determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) * \sim q] \tag{1}$$

7. Si se define el conectivo lógico $*$ como:

$$p * q \text{ es Falsa sólo si } p \text{ y } q \text{ son verdaderas, caso contrario } p * q \text{ es Verdadera}$$

entonces determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) * \sim q] \tag{1}$$

Como

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \equiv (\sim p \vee q)$$

entonces la proposición (1) queda :

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) * \sim q] \equiv (\sim p \vee q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) * \sim q] \tag{2}$$

Si hacemos $m = \sim p \vee q$ entonces $\sim m = p \wedge \sim q$ y la proposición (2) queda de la forma:

$$m \Leftrightarrow \sim m * \sim q \tag{3}$$

Y conforme a la definición de la proposición $*$ debemos estudiar los siguientes casos:

- Si m es verdadera entonces $\sim m$ es falsa y por tanto $\sim m * \sim q$ es verdadera,y se tiene:

$$\begin{array}{ccc} m & \Leftrightarrow & \sim m * \sim q \\ V & \Leftrightarrow & V \\ & V & \end{array}$$

- Si m es falsa entonces $\sim m$ es verdadera y se deben considerar dos casos:

  - si $\sim q$ es verdadera entonces $\sim m * \sim q$ es falsa,y se tiene:

$$\begin{array}{ccc} m & \Leftrightarrow & \sim m * \sim q \\ F & \Leftrightarrow & F \\ & V & \end{array}$$

  - Si $\sim q$ es falsa entonces q es verdadera y entonces $m =$ no es falsa$\sim m * \sim q$ es verdadera, y se tiene:

$$\begin{array}{ccc} m & \Leftrightarrow & \sim m * \sim q \\ F & \Leftrightarrow & F \\ & V & \end{array}$$

Y de los tres casos anteriores se concluye que la proposición dada es una tautología.

8. Demuestre que la proposición

$$[((\sim p \vee q) \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \Longrightarrow \sim t)] \Longrightarrow p$$

Es una tautología

8. Demuestre que la proposición

$$[((\sim p \vee q) \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \Longrightarrow \sim t)] \Longrightarrow p$$

Es una tautología
Sea $X = [((\sim p \vee q) \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \Longrightarrow \sim t)]$
Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
X &\Longrightarrow \{(\sim p \vee q) \Longrightarrow (s \vee t)\} \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (t \Longrightarrow u) \\
&\Longrightarrow \{(\sim p \vee q) \Longrightarrow (s \vee t)\} \wedge \sim s \wedge (\sim u \wedge (t \Longrightarrow u)) \\
&\Longrightarrow \{(\sim p \vee q) \Longrightarrow (s \vee t)\} \wedge \sim s \wedge \sim t \\
&\Longrightarrow (\sim p \vee q) \Longrightarrow (s \vee t) \wedge \sim (s \vee t) \\
&\Longrightarrow \sim (\sim p \vee q) \\
&\Longrightarrow p \wedge \sim q \\
&\Longrightarrow p
\end{aligned}$$

Luego como X implica p entonces se tiene que :

$$X \Longrightarrow p \quad \text{es una tautología}$$