El trabajo dignifica

Algebra I: Ejercicios Resueltos de Conjuntos

Profesor Ricardo Santander Baeza

2017

Introducción

Recordamos que si p es una proposición lógica entonces tenemos dos dialectos, para el mismo idioma en el siguiente sentido:
Si p es una proposición lógica entonces tenemos

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid p \text{ verdadera}\} \\ A^c &= \{x \mid \sim p \text{ verdadera}\} \end{aligned}$$

Entonces

- $x \in A \Longleftrightarrow x \notin A^c$
- $x \in A^c \Longleftrightarrow x \notin A$

Si p y q son proposiciones lógicas entonces tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid p \text{ verdadera}\} \\ B &= \{x \mid q \text{ verdadera}\} \end{aligned}$$

Entonces

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ e.e. $x \in (A \cup B) \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ e.e. $x \in (A \cap B) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
- $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ e.e. $x \in (A - B) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c$
- $A \subset B \Longleftrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in B)$
- $A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$

Algunas consecuencias

1. $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología

Algunas consecuencias

1. $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología
   Usando tabla tenemos

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\Longleftrightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

Algunas consecuencias

1. $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología
   Usando tabla tenemos

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\Longleftrightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

   En particular tenemos que

$$(A^c)^c = A$$

Algunas consecuencias

1. $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología
   Usando tabla tenemos

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\Longleftrightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

   En particular tenemos que

$$(A^c)^c \;=\; A$$

   Pues,

$$x \in (A^c)^c \iff x \not\in A^c \iff A$$

Algunas consecuencias

1. $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología
   Usando tabla tenemos

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\Longleftrightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

   En particular tenemos que

$$(A^c)^c = A$$

   Pues,

$$x \in (A^c)^c \Longleftrightarrow x \not\in A^c \Longleftrightarrow A$$

2. $p \vee \sim p$ es una tautología.

Algunas consecuencias

1. $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología
   Usando tabla tenemos

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\Longleftrightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

   En particular tenemos que

$$(A^c)^c \;=\; A$$

   Pues,

$$x \in (A^c)^c \;\Longleftrightarrow\; x \notin A^c \Longleftrightarrow A$$

2. $p \vee \sim p$ es una tautología.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	1
0	1	1

Algunas consecuencias

1. $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología
   Usando tabla tenemos

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\Longleftrightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

   En particular tenemos que

$$(A^c)^c = A$$

   Pues,

$$x \in (A^c)^c \Longleftrightarrow x \not\in A^c \Longleftrightarrow A$$

2. $p \vee \sim p$ es una tautología.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	1
0	1	1

   Equivalentemente

$$A \cup A^c \text{ es siempre verdadera}$$

3. $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

3. $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

3. $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

Equivalentemente

$$A \cap A^c = \emptyset \text{ es siempre falso}$$

3. $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

Equivalentemente

$$A \cap A^c = \emptyset \text{ es siempre falso}$$

4. $p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$ Es una tautología.

3. $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

Equivalentemente

$$A \cap A^c = \emptyset \text{ es siempre falso}$$

4. $p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$ Es una tautología.
En efecto, podemos usar una tabla de verdad y obtenemos que

p	q	$\sim p$	$p \Longrightarrow q$	$\Longleftrightarrow$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

3. $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

Equivalentemente

$$A \cap A^c = \emptyset \text{ es siempre falso}$$

4. $p \implies q \iff \sim p \vee q$ Es una tautología.
En efecto, podemos usar una tabla de verdad y obtenemos que

p	q	$\sim p$	$p \implies q$	$\iff$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

En particular tenemos que

$$A \subset B \iff A^c \cup B$$

5. Si A y B son dos conjuntos entonces demuestre que

♦ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ley de De Morgan)

5. Si A y B son dos conjuntos entonces demuestre que

♦ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ley de De Morgan)

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin (A \cup B) \\ &\iff (x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\iff (x \in A^c \wedge x \in B^c) \\ &\iff x \in (A^c \cap B^c) \end{aligned}$$

5. Si A y B son dos conjuntos entonces demuestre que

♦ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ley de De Morgan)

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin (A \cup B) \\ &\iff (x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\iff (x \in A^c \wedge x \in B^c) \\ &\iff x \in (A^c \cap B^c) \end{aligned}$$

♦ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Ley de De Morgan)

5. Si A y B son dos conjuntos entonces demuestre que

♦ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ley de De Morgan)

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin (A \cup B) \\
&\iff (x \notin A \wedge x \notin B) \\
&\iff (x \in A^c \wedge x \in B^c) \\
&\iff x \in (A^c \cap B^c)
\end{aligned}$$

♦ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Ley de De Morgan)

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B)^c &\iff x \notin (A \cap B) \\
&\iff (x \notin A \vee x \notin B) \\
&\iff (x \in A^c \vee x \in B^c) \\
&\iff x \in (A^c \cup B^c)
\end{aligned}$$

6. Si A, B y C son conjuntos entonces demuestre que

♦ $A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ (Transitividad de la Inclusión)

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $A \subset C$, es decir por demostrar que $x \in A \Longrightarrow x \in C$

Etapa 2. Gestión de la información

$$A \subset B \Longleftrightarrow x \in A \Longrightarrow x \in B \qquad (*)$$

$$B \subset C \Longleftrightarrow x \in B \Longrightarrow x \in C \qquad (**)$$

Etapa 3. Articulación de la información

$$x \in A \overset{\text{De } (*)}{\Longrightarrow} x \in B \overset{\text{De } (**)}{\Longrightarrow} x \in C$$

♦ $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$

♦ $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$

Solución, usando propiedades:

♦ $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$

Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C) \cup A^c \Longleftrightarrow ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$$

♦ $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$
Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C) \cup A^c \Longleftrightarrow ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$$

Solución, usando los elementos de los conjuntos:

♦ $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$
Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C) \cup A^c \Longleftrightarrow ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$$

Solución, usando los elementos de los conjuntos:

Mostremos primero que

$$\underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c}_{\text{Por demostrar}}$$

♦ $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$
Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C) \cup A^c \Longleftrightarrow ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$$

Solución, usando los elementos de los conjuntos:

Mostremos primero que

$$\underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in (B \cup C)^c \implies x \notin (B \cup C) \overset{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin A \Longrightarrow x \in A^c$$

♦ $A \subset (B \cup C) \iff (B \cup C)^c \subset A^c$
Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \iff (B \cup C) \cup A^c \iff ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \iff (B \cup C)^c \subset A^c$$

Solución, usando los elementos de los conjuntos:

Mostremos primero que

$$\underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in (B \cup C)^c \Longrightarrow x \notin (B \cup C) \overset{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin A \Longrightarrow x \in A^c$$

Luego, $A \subset (B \cup C) \Longrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$

♦ $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$
Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C) \cup A^c \Longleftrightarrow ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$$

Solución, usando los elementos de los conjuntos:

Mostremos primero que

$$\underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in (B \cup C)^c \implies x \notin (B \cup C) \stackrel{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin A \Longrightarrow x \in A^c$$

Luego, $A \subset (B \cup C) \Longrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$

Recíprocamente, mostremos que

$$\underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Por demostrar}}$$

♦ $A \subset (B \cup C) \iff (B \cup C)^c \subset A^c$
Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \iff (B \cup C) \cup A^c \iff ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \iff (B \cup C)^c \subset A^c$$

Solución, usando los elementos de los conjuntos:

Mostremos primero que

$$\underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in (B \cup C)^c \implies x \notin (B \cup C) \overset{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin A \Longrightarrow x \in A^c$$

Luego, $A \subset (B \cup C) \Longrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$

Recíprocamente, mostremos que

$$\underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in A \implies x \notin A^c \overset{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin (B \cup C)^c \Longrightarrow x \in (B \cup C)$$

♦ $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$
Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow (B \cup C) \cup A^c \Longleftrightarrow ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \Longleftrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$$

Solución, usando los elementos de los conjuntos:

Mostremos primero que

$$\underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in (B \cup C)^c \implies x \notin (B \cup C) \overset{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin A \Longrightarrow x \in A^c$$

Luego, $A \subset (B \cup C) \Longrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$

Recíprocamente, mostremos que

$$\underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in A \implies x \notin A^c \overset{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin (B \cup C)^c \Longrightarrow x \in (B \cup C)$$

Luego, $(B \cup C)^c \subset A^c) \Longrightarrow A \subset (B \cup C)$

♦ $A \subset (B \cup C) \iff (B \cup C)^c \subset A^c$
Solución, usando propiedades:

$$A \subset (B \cup C) \iff A^c \cup (B \cup C) \iff (B \cup C) \cup A^c \iff ((B \cup C)^c)^c \cup A^c \iff (B \cup C)^c \subset A^c$$

Solución, usando los elementos de los conjuntos:

Mostremos primero que

$$\underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in (B \cup C)^c \Longrightarrow x \notin (B \cup C) \overset{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin A \Longrightarrow x \in A^c$$

Luego, $A \subset (B \cup C) \Longrightarrow (B \cup C)^c \subset A^c$

Recíprocamente, mostremos que

$$\underbrace{(B \cup C)^c \subset A^c)}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{A \subset (B \cup C)}_{\text{Por demostrar}}$$

$$x \in A \Longrightarrow x \notin A^c \overset{\text{Por hipótesis}}{\Longrightarrow} x \notin (B \cup C)^c \Longrightarrow x \in (B \cup C)$$

Luego, $(B \cup C)^c \subset A^c) \Longrightarrow A \subset (B \cup C)$

Así que, $A \subset (B \cup C) \iff (B \cup C)^c \subset A^c$

♦ $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Etapa 1. Por demostrar que $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Etapa 2. Gestionando directamente la información obtenemos que

$$\begin{aligned}
(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B &\Longleftrightarrow [(A \cap B^c) \cup A^c] \cap [(A \cap B^c) \cup B)] = A \cup B \\
&\Longleftrightarrow [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)] \cap [(A \cup B) \cap (B^c \cup B))] = A \cup B \\
&\Longleftrightarrow (B^c \cup A^c) \cap (A \cup B) = A \cup B \\
&\Longleftrightarrow (B \cap A)^c \cap (A \cup B) = A \cup B \\
&\Longleftrightarrow (B \cap A) = \emptyset
\end{aligned}$$