Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
Álgebra I LEMC

Una Solución del Control N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Martes 04 de Abril del 2017

El Profesor se forja
en el aula

(1) Dadas las proposiciones p, q, r, s. Determine si la siguiente proposición lógica es una tautología. Justifique su respuesta:

$$(((p \wedge s) \vee r) \Longrightarrow [(q \vee r) \wedge s]) \Longleftrightarrow (\sim [(q \vee r) \wedge s] \Longrightarrow \sim ((p \wedge s) \vee r))$$

Una solución. Si hacemos $A = ((p \wedge s) \vee r)$ y $B = [(q \vee r) \wedge s]$ entonces debemos estudiar el valor de verdad de la proposición

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\sim B \Longrightarrow \sim A)$$

Pero esta es una tautología, pues usando esencialmente "la propiedad de reducción de la implicación para la disyunción", obtenemos que:

$$\begin{aligned} (A \Longrightarrow B) &\Longleftrightarrow \sim A \vee B \\ &\Longleftrightarrow \sim A \vee B \\ &\Longleftrightarrow \sim (\sim B) \vee \sim A \\ &\Longleftrightarrow \sim B \Longrightarrow \sim A \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(((p \wedge s) \vee r) \Longrightarrow [(q \vee r) \wedge s]) \Longleftrightarrow (\sim [(q \vee r) \wedge s] \Longrightarrow \sim ((p \wedge s) \vee r))$$

Es una Tautología.

(2) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s si se sabe que la siguiente proposición es verdadera.

$$[s \Rightarrow ((\sim r \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow \sim r)))] \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \wedge s \wedge \sim r]$$

Una solución. Observamos en primer lugar que:

$$\begin{aligned} [s \Rightarrow ((\sim r \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow \sim r))] &\Longleftrightarrow [s \Rightarrow ((\sim (\sim r) \vee r) \vee (\sim r \vee \sim r))] \\ &\Longleftrightarrow [s \Rightarrow (r \vee r) \vee (\sim r \vee \sim r)] \\ &\Longleftrightarrow [s \Rightarrow (r \vee \sim r)] \end{aligned}$$

Ahora, como $(r \vee \sim r)$ es siempre verdadero, sigue que $[s \Rightarrow (r \vee \sim r)]$ es verdadero, cualquiera sea el valor de verdad de s, y entonces $[s \Rightarrow ((\sim r \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow \sim r))]$ es verdadero.
En segundo lugar, como $(*)$ es verdadera entonces de la información anterior, sigue que

$$[\sim (p \Rightarrow q) \wedge s \wedge \sim r] \text{ es verdadera}$$

De donde obtenemos que $\sim (p \Rightarrow q)$ y s y $\sim r$ deben ser verdaderas, y entonces ya tenemos s verdadera, r falsa, además como

$$\sim (p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$$

Conclusión: p verdadera, q falsa, r falsa y s verdadera.

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 80'

(3) Si A, B y C son conjuntos entonces demuestre que

$$[(A \subset B) \wedge (B \subset C)] \implies (A \subset C)$$

Una solución

Debemos demostrar que $A \subset C$, e.e. Debemos demostrar que

$$x \in A \implies x \in C$$

Por hipótesis sabemos que

$$\begin{array}{rcll} A \subset B & \iff & x \in A \Longrightarrow x \in B & \qquad (*) \\ B \subset C & \iff & x \in B \Longrightarrow x \in C & \qquad (**) \end{array}$$

Entonces de $(*)$ y $(**)$ sigue que

$$x \in A \stackrel{(*)}{\Longrightarrow} x \in B \stackrel{(**)}{\Longrightarrow} x \in C$$