IV Congreso de Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas, 2011
Sede: Universidad Católica Silva Henríquez
Ortogonalización: Propiedades y Aplicaciones

Ricardo Santander Baeza

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile

Agosto 2011

Insumos básicos para la nueva Teoría

1. Sabemos que si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\begin{aligned} n &= a_s \cdot 10^s + a_{s-1} \cdot 10^{s-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \\ & \text{donde } (9 \leq a_i \leq 0) \text{ para } (i = 0, 1, 2, \ldots, s) \end{aligned} \tag{1}$$

   ✓ Por ejemplo,

   - $33 = 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
   - $987 = 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
   - La idea es que en la representación en potencias del número 10 (objetos del tipo 10^n), aceptamos como coeficientes (los números que multiplican a las potencias de 10) números mayores o iguales a 0 y menores que 10.

Basándonos en esta idea definimos informalmente a los polinomios, es decir

$$p(x) \in \mathbb{R}[x] \iff p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_s x^s \tag{2}$$

Y en este caso son los coeficientes los que nuevamente diferencian a un polinomio de otro.

Primera generalización de los Insumos básicos

Les recuerdo lo siguiente:

1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$ es definido por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ para } (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

2. Las operaciones naturales que lo hacen un espacio vectorial son para $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$u + v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \tag{3}$$

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n) \tag{4}$$

3. Una aplicación que permite estas operaciones es la siguiente:

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{R}^n &\Longleftrightarrow u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\Longleftrightarrow u = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + (0, 0, \ldots, x_n) \\ &\Longleftrightarrow u = x_1 \underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{e_1} + x_2 \underbrace{(0, 1, \ldots, 0)}_{e_2} + \cdots + x_n \underbrace{(0, 0, \ldots, 1)}_{e_n} \\ &\Longleftrightarrow u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n \end{aligned}$$

4. Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \mid (x_i \in \mathbb{R}); (i = 1, 2, \ldots, n))\} \\ &= \langle \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \rangle \end{aligned}$$

Ejemplos Motivadores para la Nueva Teoría 1

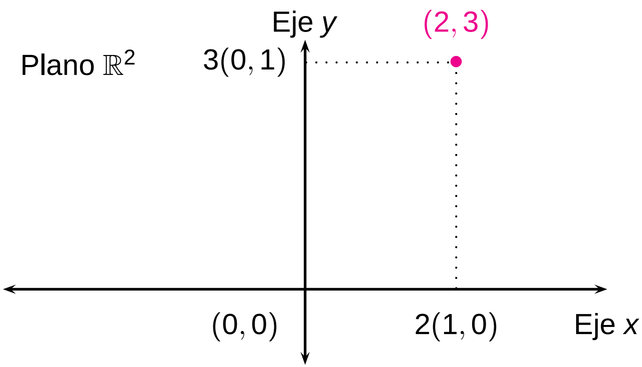
1. Ejemplo 1. Si $n = 2$ entonces para $u = (x, y)$

$$u = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2 \iff \mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$$

En particular,

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

2. La geometría envuelta es la siguiente:



$$\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle$$

Ejemplos Motivadores para la Nueva Teoría 2

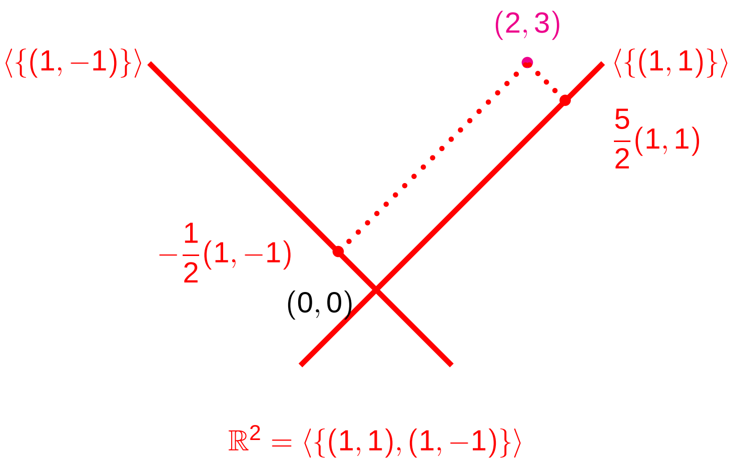
1. Ejemplo 2. Si $n = 2$ entonces para $u = (x, y)$

$$u = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1) \iff \mathbb{R}^2 = \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle$$

En particular,

$$(2,3) = \frac{5}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$$

2. La geometría envuelta para graficar $(2,3)$ es la siguiente:



Ejemplos Motivadores para la Nueva Teoría 3

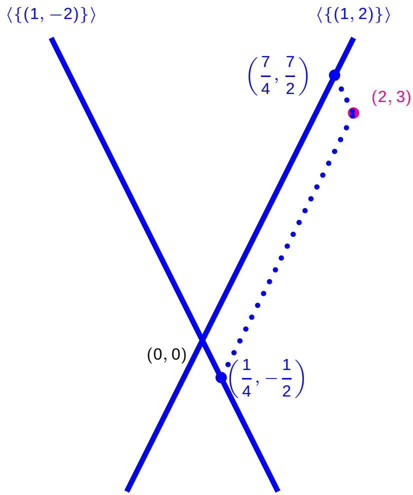
1. Ejemplo 2. Si $n = 2$ entonces para $u = (x, y)$

$$u = \frac{2x + y}{4}(1, 2) + \frac{2x - y}{4}(1, -2) \iff \mathbb{R}^2 = \langle\{(1, 2), (1, -2)\}\rangle$$

   En particular,

$$(2, 3) = \frac{7}{4}(1, 2) + \frac{1}{4}(1, -2)$$

2. La geometría envuelta para graficar $(2, 3)$ es la siguiente:



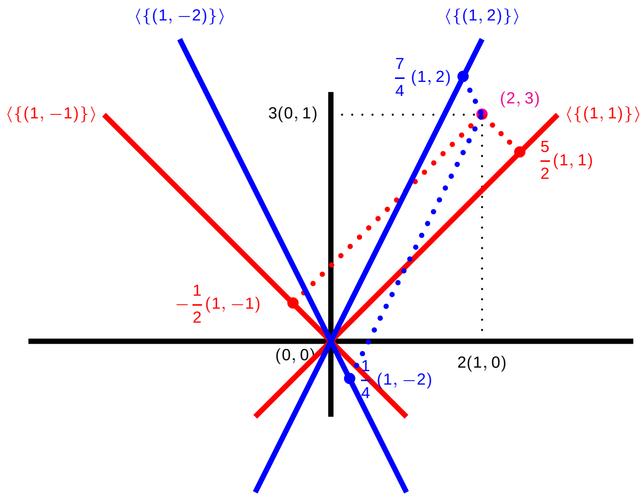
$$\mathbb{R}^2 = \langle\{(1, 2), (1, -2)\}\rangle$$

Compilado de Ejemplos Motivadores para la Nueva Teoría

1. Si $n = 2$ entonces para $u = (2,3)$ tenemos las situaciones siguientes:

$$\begin{aligned}(2,3) &= 2(1,0) + 3(0,1)\\ \mathbf{(2,3)} &= \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\mathbf{(1,1)} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{(1,-1)}\\ \mathbf{(2,3)} &= \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\mathbf{(1,2)} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{(1,-2)}\end{aligned}$$

2. La geometría envuelta para graficar $(2,3)$ es la siguiente:



$$\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle = \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle = \langle\{(1,2),(1,-2)\}\rangle$$

Buscando regularidades

Si definimos en $\mathbb{R}^n$, para $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ un producto interno como sigue:

$$\begin{array}{ccll} \langle , \rangle & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longmapsto \mathbb{R} \\ & & (u, v) & \longmapsto \langle u, v \rangle \end{array} \tag{5}$$

Donde dicho producto se obtiene como sigue:

$$\langle u, v \rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Buscando regularidades 1

Observamos en ejemplo 1 que

$$\begin{aligned}
\langle (1,0),(0,1)\rangle &= 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0\\
\langle (1,0),(1,0)\rangle &= 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1\\
\langle (0,1),(0,1)\rangle &= 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Además

$$\left.\begin{aligned}
\langle (2,3),(1,0)\rangle &= 2\\
\langle (2,3),(0,1)\rangle &= 3
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (2,3) = \langle (2,3),(1,0)\rangle\,(1,0) + \langle (2,3),(0,1)\rangle\,(0,1)$$

Y en general,

$$\left.\begin{aligned}
\langle (x,y),(1,0)\rangle &= x\\
\langle (x,y),(0,1)\rangle &= y
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x,y) = \langle (x,y),(1,0)\rangle\,(1,0) + \langle (x,y),(0,1)\rangle\,(0,1) \tag{6}$$

Buscando regularidades 2

$$\begin{aligned}
\langle (1,1),(1,-1)\rangle &= 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0\\
\langle (1,1),(1,1)\rangle &= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2\\
\langle (1,-1),(1,-1)\rangle &= 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 2
\end{aligned}$$

Además

$$\left.\begin{array}{rcr}
\langle (2,3),(1,1)\rangle & = & 5\\
\langle (2,3),(1,-1)\rangle & = & -1
\end{array}\right\} \Longrightarrow (2,3) = \frac{\langle (2,3),(1,1)\rangle}{\langle (1,1),(1,1)\rangle}\,(1,1) + \frac{\langle (2,3),(1,-1)\rangle}{\langle (1,-1),(1,-1)\rangle}\,(1,-1)$$

En general,

$$\begin{array}{c}
\underbrace{\begin{array}{rcl}
\langle (x,y),(1,1)\rangle & = & x+y\\
\langle (x,y),(1,-1)\rangle & = & x-y
\end{array}}\\
\Downarrow\\
(x,y) = \dfrac{\langle (x,y),(1,1)\rangle}{\langle (1,1),(1,1)\rangle}\,(1,1) + \dfrac{\langle (x,y),(1,-1)\rangle}{\langle (1,-1),(1,-1)\rangle}\,(1,-1)
\end{array} \tag{7}$$

Buscando regularidades 3

$$\begin{aligned}
\langle (1,2),(1,-2)\rangle &= 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) = -3\\
\langle (1,2),(1,2)\rangle &= 1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 5\\
\langle (1,-2),(1,-2)\rangle &= 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) = 5
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\frac{\langle (2,3),(1,2)\rangle}{\langle (1,2),(1,2)\rangle}(1,2) + \frac{\langle (2,3),(1,-2)\rangle}{\langle (1,-2),(1,-2)\rangle}(1,-2) = \frac{8}{5}(1,2) - \frac{4}{5}(1,-2) = \left(\frac{4}{5},\frac{24}{5}\right)$$

Y

$$(2,3) = \frac{7}{4}(1,2) + \frac{1}{4}(1,-2)$$

Por tanto

$$(2,3) \neq \frac{\langle (2,3),(1,2)\rangle}{\langle (1,2),(1,2)\rangle}(1,2) + \frac{\langle (2,3),(1,-2)\rangle}{\langle (1,-2),(1,-2)\rangle}(1,-2)$$

En general

$$(x,y) \neq \frac{\langle (x,y),(1,2)\rangle}{\langle (1,2),(1,2)\rangle}(1,2) + \frac{\langle (x,y),(1,-2)\rangle}{\langle (1,-2),(1,-2)\rangle}(1,-2) \tag{8}$$

Observación

Es pertinente hacer la siguiente pregunta

¿Por qué siendo $c(2) = \{(1,0),(0,1)\}$, $\alpha = \{(1,1),(1,-1)\}$ y $\beta = \{(1,2),(1,-2)\}$, tres bases de $\mathbb{R}^2$, se verifica en (**??**), y (**??**), las igualdades:

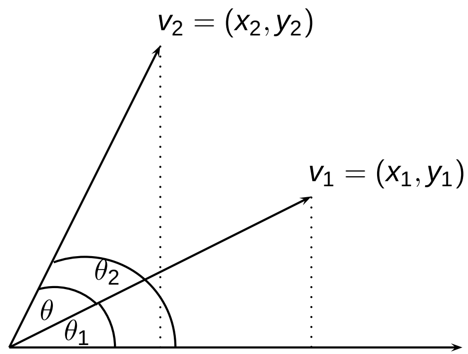
$$\begin{aligned} (x,y) &= \frac{\langle (x,y),(1,0)\rangle}{\langle (1,0),(1,0)\rangle}(1,0) + \frac{\langle (x,y),(0,1)\rangle}{\langle (0,1),(0,1)\rangle}(0,1) \\ (x,y) &= \frac{\langle (x,y),(1,1)\rangle}{\langle (1,1),(1,1)\rangle}(1,1) + \frac{\langle (x,y),(1,-1)\rangle}{\langle (1,-1),(1,-1)\rangle}(1,-1) \end{aligned}$$

Y en (**??**) no se verifica una igualdad del mismo tipo, es decir

$$(x,y) \neq \frac{\langle (x,y),(1,2)\rangle}{\langle (1,2),(1,2)\rangle}(1,2) + \frac{\langle (x,y),(1,-2)\rangle}{\langle (1,-2),(1,-2)\rangle}(1,-2)?$$

Una buena idea y sus consecuencias 1

Consideremos la situación geométrica



(9)

Si suponemos que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad &\iff \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \\
&\iff \quad l(v_1)\cos\theta_1 l(v_2)\cos\theta_2 + l(v_1)\operatorname{sen}\theta_1 l(v_2)\operatorname{sen}\theta_2 = 0 \\
&\iff \quad l(v_1)l(v_2)\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\
&\iff \quad l(v_1)l(v_2)\cos\theta = 0 \\
&\iff \quad \theta = \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

O sea que $v_1 \perp v_2$.

Una buena idea y sus consecuencias 2

Intentamos generalizar el análisis anterior. Supongamos que en un $\mathbb{V}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ existe una base

$$\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ tal que } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j$$

entonces como consecuencia del hecho que α es base sigue que,

$$u \in \mathbb{V} \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

Ahora, como consecuencia de que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ sigue que

$$\begin{aligned} u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad &\Longrightarrow \quad \langle u, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &\Longrightarrow \quad \langle u, v_j \rangle = a_j \langle v_j, v_j \rangle \\ &\Longrightarrow \quad a_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} \quad (j = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

Una buena idea y sus consecuencias 3

Esto es extraordinario, pues en esta condiciones tenemos "casi el máximo de eficiencia," ya que,

$$\boxed{u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} v_n \Longleftrightarrow [u]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\langle u, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \\ \frac{\langle u, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle u, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} \end{pmatrix}}$$

Producto Interno

Sea V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial. V se dice un espacio con "Producto Interno" ó un espacio "Prehilbertiano" si y sólo si existe una función.

$$\begin{aligned} \langle , \rangle \quad : \quad & V \times V \longmapsto \mathbb{R} \\ & (u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

tal que satisface las condiciones:

1. $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad (\forall v, v \in V) \wedge \langle v, v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
4. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
5. $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
6. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

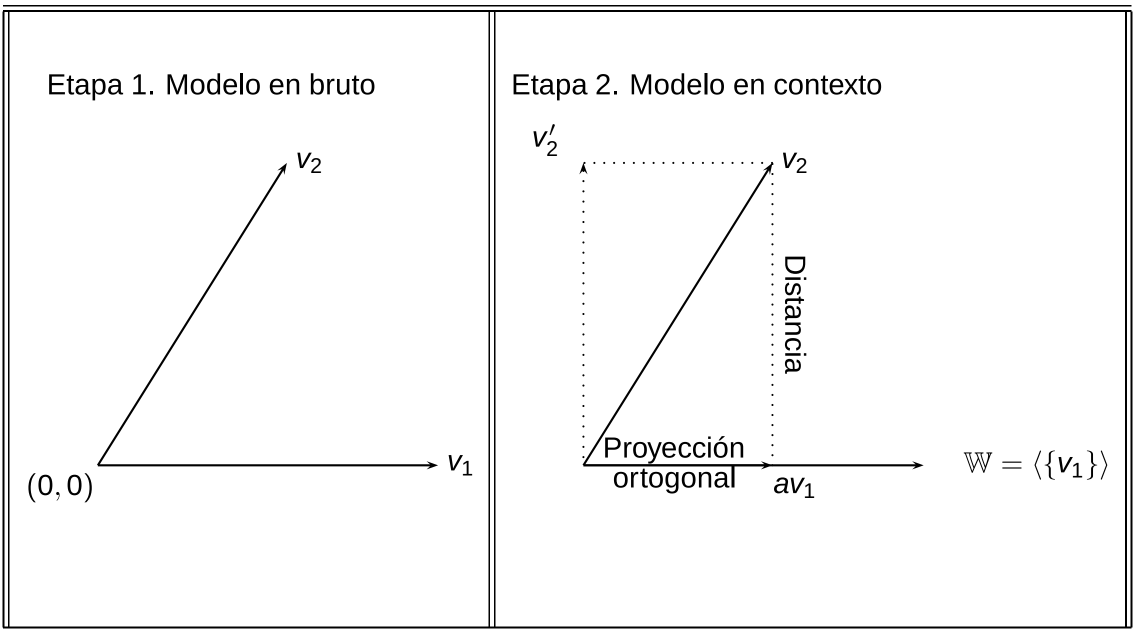
Bases ortogonales

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno $\langle , \rangle$ y considera $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ entonces α será llamada una "Base Ortogonal" si

1. α es una base de V
2. Si $j \neq k$ entonces $\langle v_j, v_k \rangle = 0$
3. La coordenada respecto de la base ortogonal α $a_i = \dfrac{\langle u, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$ se llamará el "$i-$ésimo coeficiente de Fourier del vector u."

Base no ortogonal

Si $\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0$ entonces de acuerdo a la figura (**??**), sabemos que v_1 no es perpendicular a v_2, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que los vectores son como en las Figuras.



(10)

Usando las propiedades correctamente

Entonces,

$$v_2 = v_2' + av_1 \tag{11}$$

Lamentablemente, (**??**) es una ecuación que liga tres datos y sólo conocemos uno !!!, pero, no todo está perdido, pues, observen que en virtud de las propiedades del producto interno tenemos.

$$\begin{aligned} v_2 = v_2' + av_1 &\implies \langle v_2, v_1\rangle = \langle v_2', v_1\rangle + \langle av_1, v_1\rangle \\ &\implies \langle v_2, v_1\rangle = a\langle v_1, v_1\rangle \\ &\implies a = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la ecuación (**??**) obtenemos

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 \tag{12}$$

Luego, tenemos lo siguiente:

$$\alpha = \{v_1, v_2\} \text{ base de V } \implies \alpha' = \{v_1, v_2'\} \text{ es una base ortogonal de V}$$

Proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base V entonces $\alpha' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ es una base ortogonal, donde los v'_i satisfacen la siguiente ecuación vectorial.

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 \\ v'_j = v_j - \dfrac{\langle v_j, v'_{j-1}\rangle}{\langle v'_{j-1}, v'_{j-1}\rangle} v'_{j-1} - \cdots - \dfrac{\langle v_j, v'_1\rangle}{\langle v'_1, v'_1\rangle} v'_1 : \quad (2 \leq j \leq n) \end{cases} \tag{13}$$

Un ejemplo de Ortogonalización de Gram Schmidt

Consideremos el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, determinemos una base ortogonal para $\mathbb{W}$.
Etapa 1. Determinamos una base de $\mathbb{W}$

$$
\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + y + z + t = 0 \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge t = -x - y - z \\
&\iff u = (x, y, z, -x - y - z);\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\
&\iff u = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1);\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\mathbb{W} = \langle \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\} \rangle
$$

Y, si notamos $\alpha = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$ entonces α es una base de $\mathbb{W}$, pues son claramente linealmente independientes.

Un ejemplo de Ortogonalización de Gram Schmidt

Etapa 2. Ahora, ortogonalizamos, usando el proceso de G. Schmidt.

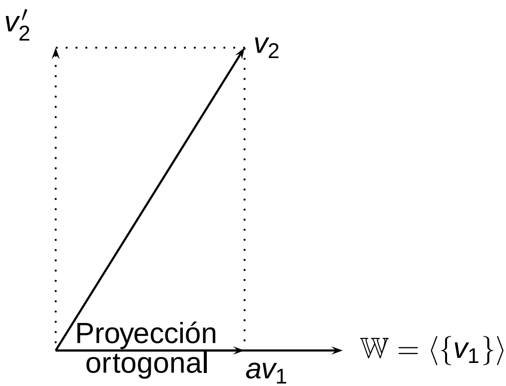
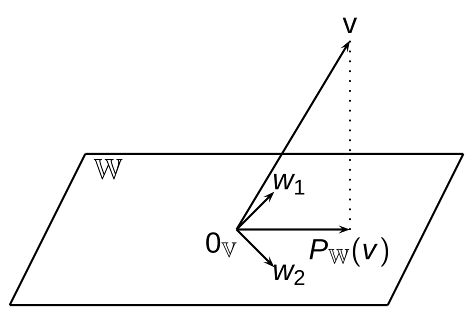
$$
\begin{aligned}
v_1' &= (1,0,0,-1) \\
v_2' &= (0,1,0,-1) - \frac{\langle (0,1,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1) = (0,1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,0,0,-1) = \left(-\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right) \\
v_3' &= (0,0,1,-1) - \frac{\langle (0,0,1,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}{\langle (-1,2,0,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}(-1,2,0,-1) - \frac{\langle (0,0,1,-1),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1) \\
&= (0,0,1,-1) - \frac{1}{6}(-1,2,0,-1) - \frac{1}{2}(1,0,0,-1) = \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\alpha' = \left\{(1,0,0,-1),\left(-\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3}\right)\right\} \quad \text{es una base ortogonal de } \mathbb{W}
$$

Proyección Ortogonal

Si remiramos el cuadro **??** entonces observamos que hemos resuelto uno de los tres problemas planteados en él, en efecto sólo construimos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt, que esencialmente "consiste en controlar la sombra que un vector proyecta en un subespacio del espacio, es decir un vector anula a otro si su proyección en el es nula."

Etapa 2. Modelo en contexto para proyección ortogonal	Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal
	

(14)

Ejemplo de Proyección Ortogonal

Si $\mathbb{W} = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual determinemos $P_{\mathbb{W}}$

Etapa 1. Determinamos una base de $\mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ x + y - 3z = 0 \\ &\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ y = 3z - x \\ &\iff u = (x, 3z - x, t, z) \\ &\iff u = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 3, 0, 1) + t(0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle \{(1, -1, 0, 0), (0, 3, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} \rangle$$

Pero como,

$$\begin{aligned} a_1(1, -1, 0, 0) + a_2(0, 3, 0, 1) + a_3(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0) &\implies (a_1, 3a_2 - a_1, a_3, a_2) = (0, 0, 0) \\ &\implies a_1 = a_2 = a_3 = 0 \end{aligned}$$

Entonces α es una base de $\mathbb{W}$.

Etapa 2. Verificamos si α es un base ortogonal, respecto del producto interno usual

$$\begin{aligned}
\langle(1,-1,0,0),(0,0,1,0)\rangle &= 0\\
\langle(1,-1,0,0),(0,3,0,1)\rangle &= -3\\
\langle(0,3,0,1),(0,0,1,0)\rangle &= 0
\end{aligned}$$

Luego, α no es una base ortogonal, así que la ortogonalizamos vía G-S.

$$\begin{aligned}
v_1' &= (1,-1,0,0)\\
v_2' &= (0,0,1,0)\\
v_3' &= (0,3,0,1)-\frac{\langle(0,3,0,1),(0,0,1,0)\rangle}{\langle(0,0,1,0),(0,0,1,0)\rangle}(0,0,1,0)-\frac{\langle(0,3,0,1),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle(1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0)\\
&= (0,3,0,1)+\frac{3}{2}(1,-1,0,0)\\
&= \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0,1\right)
\end{aligned}$$

Así obtenemos la base ortogonal

$$\alpha' = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(3,3,0,2)\}$$

Etapa 3. Construimos la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre W

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(a,b,c,d) &= \frac{\langle (a,b,c,d),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0) + \frac{\langle (a,b,c,d),(0,0,1,0)\rangle}{\langle (0,0,1,0),(0,0,1,0)\rangle}(0,0,1,0) + \\
&\quad \frac{\langle (a,b,c,d),(3,3,0,2)\rangle}{\langle (3,3,0,2),(3,3,0,2)\rangle}(3,3,0,2) \\
&= \left(\frac{10a-b+3d}{11}, \frac{10b-a+3d}{11}, c, \frac{3a+3b+2d}{11}\right)
\end{aligned}
$$

¿Cómo saber que esta proyección es bien definida?

Herramientas de gestión

"Las herramientas de control de gestión de un científista, son las propiedades que los objetos que construye, implementa y maneja, verifican"

En este caso, tenemos las importantes propiedades:
Si $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ entonces

- $P_{\mathbb{W}}(w) = w \Longleftrightarrow w \in \mathbb{W}$
- $P_{\mathbb{W}} \circ P_{\mathbb{W}} = P_{\mathbb{W}}$

La proyección ortogonal que obtuvimos en el ejemplo anterior fue:

$$P_{\mathbb{W}}(a, b, c, d) = \left(\frac{10a - b + 3d}{11}, \frac{10b - a + 3d}{11}, c, \frac{3a + 3b + 2d}{11}\right)$$

Si evaluamos entonces $P_{\mathbb{W}}$ en elementos de $\mathbb{W}$, este debe comportarse como la función identidad, es decir debe devolver el mismo elemento.

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}}(1, -1, 0, 0) &= \left(\frac{11}{11}, \frac{-11}{11}, 0, \frac{0}{11}\right) = (1, -1, 0, 0) \qquad \checkmark(\text{ OK}) \\ P_{\mathbb{W}}(0, 0, 1, 0) &= \left(\frac{0}{11}, \frac{0}{11}, 1, \frac{0}{11}\right) = (0, 0, 1, 0) \qquad \checkmark(\text{ OK}) \\ P_{\mathbb{W}}(3, 3, 0, 2) &= \left(\frac{33}{11}, \frac{33}{11}, 0, \frac{22}{11}\right) = (3, 3, 0, 2) \qquad \checkmark(\text{ OK}) \end{aligned}$$

Distancia a un subespacio

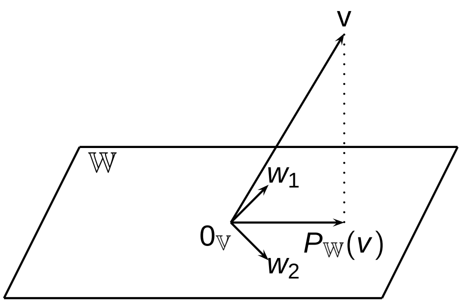
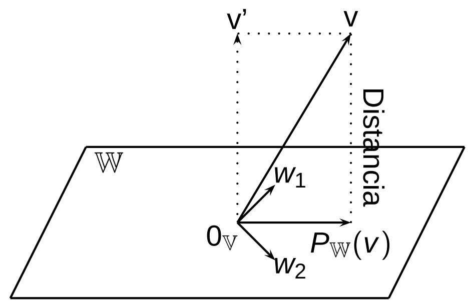
Finalmente, Si volvemos a remirar el cuadro (**??**) entonces observamos que hemos resuelto dos de los tres problemas planteados en él,

1. Construimos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt, que esencialmente "consiste en controlar la sombra que un vector proyecta en un subespacio del espacio, es decir un vector anula a otro si su proyección en el es nula," y

2. Ahora el de la proyección del espacio en uno de sus subespacios,

3. Pero aún falta desarrollar la idea de distancia de un vector a un subespacio, en realidad deseamos generalizar la idea de distancia entre vectores.

Para ello, reformulemos el cuadro (??)

Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal	Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal y distancia
	

(15)

Entonces usando toda la información tenemos las etapas:

1. Del proceso de Gram Schmidt sigue que

$$v = v' + P_{\mathbb{W}}(v) \quad \wedge \quad \langle v', P_{\mathbb{W}}(v)\rangle = 0 \tag{16}$$

2. Llamaremos normativa o norma inducida por el producto interno imperante en el espacio vectorial $\mathbb{V}$ a la función

$$\|\| : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{tal que } \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Aplicamos el concepto de norma a la ecuación definida en (**??**), para iniciar la construcción natural de una distancia.

$$v' = v - P_{\mathbb{W}}(v) \Longrightarrow \|v'\| = \|v - P_{\mathbb{W}}(v)\|$$

Esto motiva hacer la siguiente definición

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ entonces

$$d(v, \mathbb{W}) = \|v - P_{\mathbb{W}}(v)\|$$

Es la distancia del vector v al subespacio $\mathbb{W}$.

Ejemplo de distancia

Si $\mathbb{W} = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual determinemos $d((x, y, z, t), \mathbb{W})$.

1. Conocemos del Ejemplo anterior a $P_{\mathbb{W}}$. Así que

$$
\begin{aligned}
\|(x,y,z,t) - P_{\mathbb{W}}(x,y,z,t)\| &= \left\|(x,y,z,t) - \left(\frac{10x-y+3t}{11}, \frac{10y-x+3t}{11}, z, \frac{3x+3y+2t}{11}\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{x+y-3t}{11}, \frac{y+x-3t}{11}, 0, \frac{-3(x+y-3t)}{11}\right\|
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
d((x,y,z,t),\mathbb{W}) &= \sqrt{\left(\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{y+x-3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{-3(x+y-3t)}{11}\right]^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{y+x-3t}{11}\right]^2 + 9\left[\frac{(x+y-3t)}{11}\right]^2\right)} \\
&= \sqrt{11\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2}
\end{aligned}
$$

¿Cómo saber que esta distancia es correcta?

Propiedades de control de gestión

Con las propiedades obtenidas para la proyección ortogonal, la distancia obtenida hereda naturalmente las siguientes propiedades:

1. $d(v, \mathbb{W}) \geq 0 \qquad \wedge \quad d(v, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow P_{\mathbb{W}}(v) = v$
2. $P_{\mathbb{W}}(v) = v \Longleftrightarrow v \in \mathbb{W}$
3. $d(v, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow v \in \mathbb{W}$

Podemos como antes, en base a nuestras propiedades, comprobar nuestro resultado:

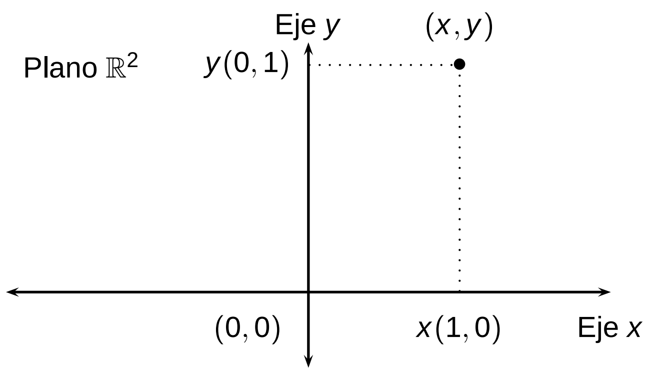
$$d((1,-1,0,0), \mathbb{W}) \;=\; \sqrt{11\left[\frac{1-1-0}{11}\right]^2} = 0; \quad \text{(Pues, } (1,-1,0,0) \in \mathbb{W})$$

Complemento Ortogonal

En esta sección estaremos interesados en emular el genial comportamiento del plano cartesiano, es decir queremos generalizar la idea

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{\langle\{(1,0)\}\rangle}_{\text{Eje x}} \oplus \underbrace{\langle\{(0,1)\}\rangle}_{\text{Eje } y}$$

Geométricamente, se representa por el Plano Cartesiano.



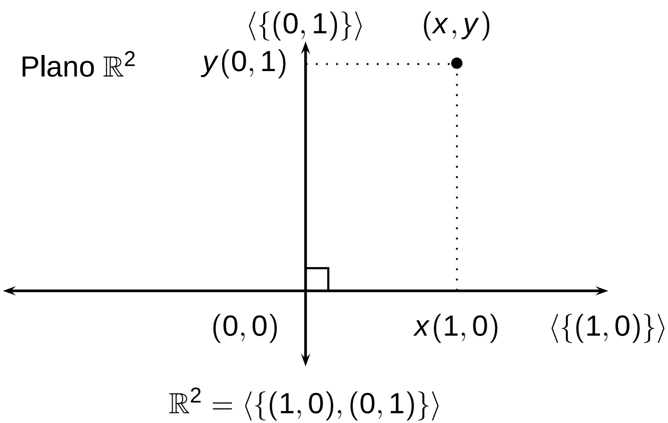
$$\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle$$

Reinterpretación del Plano Cartesiano

1. Podemos observar que en $\mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\langle (1,0),(0,1)\rangle \quad = \quad 0$$

2. Además en el "lenguaje vernáculo del álgebra lineal" tenemos,
   - Eje x significa $\langle\{(1,0)\}\rangle$, o sea generado por el vector $(1,0)$
   - Eje y significa $\langle\{(0,1)\}\rangle$, o sea generado por el vector $(0,1)$
3. Podemos expresar esto, gráficamente como sigue



Generalizaciones fundamentales

1. Sea V un $\mathbb{R}$ espacio con producto interno $\langle , \rangle$, y consideremos $u \in V$ y $v \in V$. u se dirá ortogonal a v si y sólo si $\langle u, v\rangle = 0$. Una notación adecuada para este contexto es:

$$u \perp v \Longleftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$$

2. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio con producto interno $\langle , \rangle$, y $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ entonces

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0\,(\forall w; w \in \mathbb{W})\}$$

es un subespacio de V.

3. Un tal subespacio se llamará "Complemento Ortogonal" de $\mathbb{W}$ en $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$.

Reflexiones finales: El algoritmo

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n. Si $\mathbb{V}$ posee un producto interno entonces $\mathbb{V}$ "emula" el comportamiento de $\mathbb{K}^2$

Si $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ una base ortogonal de $\mathbb{W}$ entonces calculamos $\mathbb{W}^{\perp}$, como sigue:

- Completamos α hasta obtener una base de $\mathbb{V}$, usando el teorema de completamiento de base o mejor, agregando vectores linealmente independientes a los w_i con $i = 1, \dots, s$ hasta llegar a la la dimensión n de $\mathbb{V}$; digamos

$$\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$$

- Usando el proceso de Gram Schmidt ortogonalizamos β y obtenemos

$$\alpha' = \{w_1, w_2, \dots, w_s, w_{s+1}^{\perp}, \dots, w_n^{\perp}\} \tag{17}$$

De la propia construcción de α' en (**??**),sigue que vale la ecuación

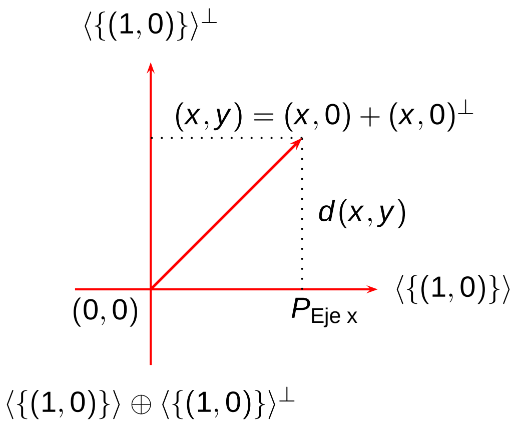
$$\langle w_i^{\perp}, w_j \rangle = 0 \text{ si } \begin{cases} i = s+1, s+2, \dots, n \\ j = 1, 2 \dots, s \end{cases}$$

Así que

$$\mathbb{W}^{\perp} = \langle \{w_{s+1}^{\perp}, \dots, w_n^{\perp}\} \rangle$$

Paralelo final

Plano Cartesiano



Emulación Cartesiana