

Guía N° 2 - Integrales
Integración por partes

1. Introducción

Recordemos que :

Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones derivables entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(u \cdot v) &= v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx} \\ \Downarrow \\ d(u \cdot v) &= v \cdot du + u \cdot dv \\ \Downarrow \\ \int d(u \cdot v) &= \int v \cdot du + \int u \cdot dv \\ \Downarrow \\ u \cdot v &= \int v \cdot du + \int u \cdot dv\end{aligned}$$

Despejando obtenemos la fórmula de integración por partes:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du} \quad (1)$$

2. Ejercicios resueltos

(1) Calculemos la integral $I = \int x e^x dx$

Solución

- Escogemos u y dv en la integral I :

En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^x dx \\ du &= dx & v &= e^x \end{aligned}$$

- Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x dx}_{dv} \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

(2) Calculemos la integral $I = \int \sin(mx) \cos(nx) dx$

Solución

- Escogemos u y dv en la integral I :

En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} u &= \sin(mx) & dv &= \cos(nx) dx \\ du &= m \cos(mx) dx & v &= \frac{1}{n} \sin(nx) \end{aligned}$$

- Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{\sin(mx)}_u \underbrace{\cos(nx) dx}_{dv} \\ &= \frac{1}{n} \sin(nx) \sim (mx) - \frac{m}{n} \int \sin(nx) \cos(mx) dx \end{aligned}$$

- Calculamos integrando por partes la integral: $J = \int \sin(nx) \cos(mx) dx$

$$\begin{aligned} u &= \cos(mx) & dv &= \sin(nx) dx \\ du &= -m \sin(mx) dx & v &= -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{aligned}$$

Luego,

$$J = \frac{1}{n} \cos(mx) \cos(nx) - \frac{m}{n} \int \sin(mx) \cos(nx) dx$$

- Sustituimos J en I y obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{n} \sin(nx) \sin(mx) - \frac{m}{n} \left[\frac{1}{n} \cos(mx) \cos(nx) - \frac{m}{n} \int \sin(mx) \cos(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{n} \sin(nx) \sin(mx) - \frac{m}{n^2} \cos(mx) \cos(nx) + \frac{m^2}{n^2} \underbrace{\int \sin(mx) \cos(nx) dx}_I \end{aligned}$$

$$I - \frac{m^2}{n^2} I = \frac{1}{n} \sin(nx) \sin(mx) - \frac{m}{n^2} \cos(mx) \cos(nx)$$

$$I = \frac{\frac{1}{n} \sin(nx) \sin(mx) - \frac{m}{n^2} \cos(mx) \cos(nx)}{1 - \frac{m^2}{n^2}}$$

3. Problemas propuestos

Resolver usando integración por partes las siguientes integrales:

(1) $\int x^2 \sin 2x dx$

(2) $\int x^2 \ln x dx$

(3) $\int \arcsin 3x dx$

(4) $\int x^3 e^{-x} dx$

(5) $\int e^{ax} \cos(bx) dx$

(6) $\int x^5 \sqrt{1 - 2x^3} dx$

(7) $\int \sin(\ln x) dx$

(8) $\int \sin(3x) \cos(5x) dx$

(9) $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

(10) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$