Universidad de Santiago
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Guía 1. de Integrales
Prof. Ricardo Santander Baeza
Agosto 2009

1. Integral indefinida

Recordemos que :

Si $y = f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x) \qquad \text{C es una constante} \tag{1}$$

1.1. Integrales básicas.

(1) $\int a\ dx = ax + C \qquad (\forall a;\ a \in \mathbb{R})$

(2) $\int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + C \qquad (x > 0)$

(4) $\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x + C$

(5) $\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x + C$

(6) $\displaystyle\int e^x = e^x + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}\ dx = \arctan x + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + C$

1.2. Propiedades.

(1) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$

(2) $\displaystyle\int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx$

(3) $\displaystyle\int g(f(x))f'(x)\ dx = \int g(u)\ du$

1.3. Ejercicios resueltos.

(1) Calculemos I si:

$$I = \int \left[3x^2 + \cos x - sqrtx^5 + 7e^x + \frac{3}{x}\right]\, dx$$

Solución

$$\begin{aligned}
I &= \int \left[3x^2 + \cos x - \sqrt{x^5} + 7e^x + \frac{3}{x}\right]\, dx \\
&= \int 3x^2\, dx + \int \cos x\, dx - \int \sqrt{x^5}\, dx + \int 7e^x\, dx + \int \frac{3}{x}\, dx \\
&= 3\int x^2\, dx + \int \cos x\, dx - \int x^{\frac{5}{2}}\, dx + 7\int e^x\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx \\
&= 3\frac{x^3}{3} + \sin x - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 7e^x + 3\ln x + C \\
&= x^3 + \sin x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 7e^x + 3\ln x + C
\end{aligned}$$

(2) Calculemos I si:

$$I = \int x^{n-1}\sqrt{7 - x^n}\, dx \qquad n \geq 1$$

Solución

Etapa 1. Como $(7 - x^n)' = -nx^{n-1}$ entonces hacemos la sustitución:

$$u = 7 - x^n \tag{2}$$

Etapa 2. Sustituyendo (2) en I, tenemos que:

$$I = \int x^{n-1}\sqrt{u}\, dx \tag{3}$$

Etapa 3. El problema en (3) es que aparecen dos variables x y u, pero podemos hacer lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
u = 7 - x^n \quad &\Longrightarrow \quad u' = -nx^{n-1} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -nx^{n-1} \\
&\Longrightarrow \quad dx = -\frac{du}{nx^{n-1}} \\
&\Downarrow \\
I \quad &= \quad \int x^{n-1}\sqrt{u}\left(-\frac{du}{nx^{n-1}}\right) \\
&\Downarrow \\
I \quad &= \quad -\frac{1}{n}\int \cancel{x}^{n-1}\sqrt{u}\frac{du}{\cancel{x}^{n-1}} \\
&= \quad -\frac{1}{n}\int \sqrt{u}\, du \\
&= \quad -\frac{1}{n}\int u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= \quad -\frac{1}{n}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \\
&= \quad -\frac{1}{n}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\
&= \quad -\frac{2}{3n}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \quad -\frac{2}{3n}\cdot (7 - x^n)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
I \quad = \quad -\frac{2}{3n}\cdot (7 - x^n)^{\frac{3}{2}} + C
$$

(3) Calculemos la integral

$$
J \quad = \quad \int \sin x e^{-\cos x}\, dx
$$

Solución

Etapa 1. Como $(-\cos x)' = \sin x$ entonces hacemos la sustitución :

$$
u \quad = \quad -\cos x
$$

Etapa 2. Ahora obtenemos los otros elementos de la integral derivando como sigue:

$$
u = -\cos x \quad \Longrightarrow \quad du = \sin x dx
$$

Finalmente, sustituyendo en J tenemos:

$$J = \int e^u \, du$$

Etapa 3. Integrando tenemos que:

$$\begin{aligned} I &= e^u + C \\ &= e^{-\cos x} + C \end{aligned}$$

Así que;

$$J = e^{-\cos x} + C$$

(4) Calculemos la integral:

$$T = \int x\sqrt{1+x} \, dx$$

Solución

Etapa 1. Sea $u = \sqrt{1+x}$ entonces sustituyendo en T tenemos:

$$T = \int xu \, dx$$

Etapa 2. Calculamos la sustitución para el resto de elementos de la matriz:

$$u = \sqrt{1+x} \implies x = u^2 - 1 \quad \wedge \quad dx = 2u \, du$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{aligned} T &= \int (u^2 - 1) \cdot u \cdot 2u \, du \\ &= 2\int (u^4 - u^2) \, du \\ &= 2(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}) + C \end{aligned}$$

Luego,

$$T = 2\left(\frac{[\sqrt{1+x}]^5}{5} - \frac{[\sqrt{1+x}]^3}{3}\right) + C$$

O bien,

$$T = 2\left(\frac{[1+x]^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{[1+x]^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + C$$

1.4. Ejercicios propuestos.

Resolver las siguientes integrales:

(1) $\displaystyle\int (7x^2+6x-1)\, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x-1}}{9}\, dx$

(3) $\displaystyle\int x\frac{\sqrt{9x^2-1}}{9}\, dx$

(4) $\displaystyle\int 5^{2x+3}\, dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{3}{2x-5}\, dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2}{7-5x^3}\, dx$

(7) $\displaystyle\int 2x^2\cos(x^3-4)\, dx$

(8) $\displaystyle\int \sin x \sec^2(\cos x)\, dx$

(9) $\displaystyle\int \tan(2+x)\, dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{2x}\, dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\, dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$

(13) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{3+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\, dx$

1.5. Algunas recomendaciones.

⋆ Al enfrentar un ejercicio, preguntarse en que parte de la teoría expuesta o propuesta por su profesor se encuentra inserto dicho ejercicio.

⋆ Una vez clasificado el ejercicio, revisar en detalle los conceptos básicos de esa parte de la teoría (materia).

⋆ Preguntarse, de que otra forma puede ser preguntado este ejercicio.

⋆ Una vez resuelto el ejercicio, preguntarse si la información que se da, para resolver dicho ejercicio es absolutamente necesaria.

⋆ Probablemente lo más dificil de lograr, pero lo más útil. Preguntarse que pasa si se cambian las hipótesis (datos) dadas para resolver el problema.

Por ejemplo

Determine todas las soluciones de la ecuación $x^2 = 2$ en $\mathbb{R}$. Es claro que las soluciones en $\mathbb{R}$ son $x = \pm\sqrt{2}$.
Pregunta ¿ Cuáles son las soluciones de la ecuación en $\mathbb{Q}$?. Respuesta esta ecuación no tiene soluciones en los racionales $\mathbb{Q}$.

⋆ No olvide derivar sus respuestas para verificar si su respuesta es correcta o no.

⋆ En fin...