INGENIERÍA VESPERTINA EN
AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL

# APUNTE Nº 2

# INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

MATEMÁTICA II

PROFESOR

RICARDO SANTANDER BAEZA

2003

# Apunte 2

# Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

## 1. Definiciones y Ejemplos

### 1.1. Motivación.

Sea $y = f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$ entonces sabemos que por definición:

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\, dt = F(x) + c \quad &\Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \qquad \text{donde } c \text{ es una constante} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{dF}{dt}(x) = f(x)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(1) Luego, el segundo miembro de (1), es una ecuación cuya solución es una función $F$ cuya derivada es $f$

(2) Como la derivada de una constante real $c$ es cero entonces la solución no es única.

Ejemplo 1.1.1. *Sea* $y' = a, \quad (a \in \mathbb{R})$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = a \quad &\Longrightarrow \quad dy = a\, dx \\
&\Longrightarrow \quad \int dy = \int a\, dx \\
&\Longrightarrow \quad \int dy = a \int \, dx \\
&\Longrightarrow \quad y(x) = a\, x + c
\end{aligned}
$$

Geométricamente para $a = 1$ significa lo siguiente:

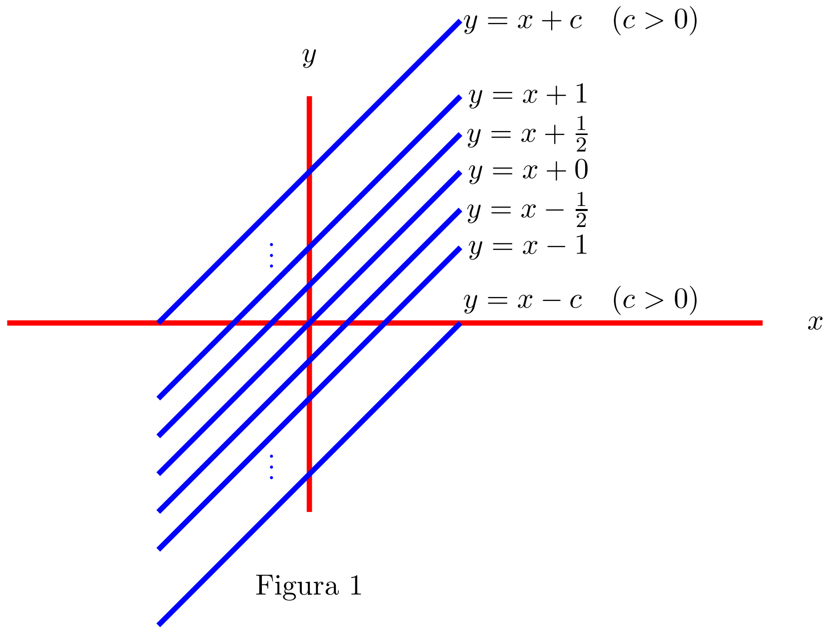


Figura 1

Ejemplo 1.1.2. *Sea* $y' = ax, \quad (a \in \mathbb{R})$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = ax \quad &\Longrightarrow \quad dy = ax\, dx \\
&\Longrightarrow \quad \int dy = \int ax\, dx \\
&\Longrightarrow \quad \int dy = a\int x\, dx \\
&\Longrightarrow \quad y(x) = \frac{a}{2}\, x^2 + c
\end{aligned}
$$

Geométricamente para $a = 1$ significa lo siguiente:

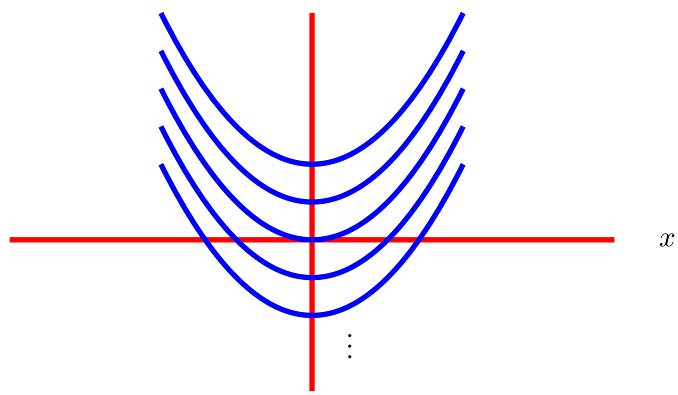


Figura 2

## 1.2. Definiciones.

Consideremos una función real $y = f(x)$, $n$ veces diferenciable (también llamadas de clase $C^n$). Por una ecuación diferencial ordinaria entenderemos una relación de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \tag{2}$$

Donde $F$ es una función de $n+1$, variables reales, e $y^j$, para $j = 1, 2, \dots, n$ representa la $j$-estima derivada de $y = f(x)$.

Ejemplo 1.2.1.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x + 5$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(3) $xy' + y = 3$

(4) $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$

(5) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z + x\dfrac{\partial z}{\partial y}$

(7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

Definición 1.2.2. *El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación, y el grado de la ecuación diferencial, la cual puede ser escrita como un polinomio en la derivada es el grado de dicho polinomio.*

Ejemplo 1.2.3.

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \dfrac{dy}{dx} = x + 5 \\ & \\ (ii) & xy' + y = 3 \\ & \\ (iii) & \dfrac{\partial z}{\partial x} = z + x\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{array}\right\} \text{Ecuaciones diferenciales de primer orden, y primer grado}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (iv) & (y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2 \\ & \\ (v) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \\ & \\ (vi) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Ecuaciones diferenciales de segundo orden, y primer grado,} \\ \text{salvo (iv) que es de segundo grado.}\end{array}$$

Definición 1.2.4. *Diremos que la función $u$ es una solución de la ecuación diferencial* $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$. *Si*

$$F(x, u, u', u'', \dots, u^n) = 0$$

Ejemplo 1.2.5.

(1) Si $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$ entonces $u = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes,es una solución de la ecuación.

En efecto

$$\frac{du}{dx} = 2ax + b \Longrightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = 2a \Longrightarrow \frac{d^3u}{dx^3} = 0$$

(2) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + x - 4$ es una solución de la ecuación $y'' - y = 4 - x$

En efecto

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x} + 1 \Longrightarrow y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

Así que.

$$y'' - y = c_1e^x + c_2e^{-x} - (c_1e^x + c_2e^{-x} + x - 4) \Longrightarrow y'' - y = 4 - x$$

### 1.2.6. Ejercicios Propuestos: Solución de ecuaciones diferenciales.

Muestre que:

(1) $y = 2x^2$ es solución de la ecuación diferencial $xy' = 2y$

(2) $x^2 + y^2 = c$ es solución de la ecuación diferencial $yy' + x = 0$

(3) $y = cx + c^4$ es solución de la ecuación diferencial $y = xy' + (y')^4$

(4) $(1-x)y^2 = x^3$ es solución de la ecuación diferencial $2x^3y' = y(y^2+3x^2)$

(5) $y = e^x(1+x)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$

(6) $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$

(7) $y = ae^x + be^{2x} + x^2e^x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 2e^x(1-x)$

## 2. Ecuaciones de primer grado y primer orden

### 2.1. Preliminares.

Si $F(x,y,y') = 0$ es una ecuación de primer orden y de primer grado entonces puedes ser escrita de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

Ejemplo 2.1.1.

Si $y' = \dfrac{x+2y}{x-y}$ entonces podemos hacer lo siguiente con la ecuación:

$$\begin{aligned} y' = \frac{x+2y}{x-y} &\iff \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} \\ &\iff (x-y)dy = (x+2y)dx \\ &\iff (x+2y)dx - (x-y)dy = 0 \\ &\iff \underbrace{(x+2y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(y-x)}_{N(x,y)}dy = 0 \end{aligned}$$

### 2.2. Ecuaciones Diferenciales de Variable Separable.

Una ecuación diferencial de la forma (3) se llama de variables separable si puede ser escrita en la forma

$$a_1(x)\cdot b_1(y)dx + a_2(x)\cdot b_2(y)dy = 0 \tag{4}$$

Si la ecuación es de variables separables entonces podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_1(x)\cdot b_1(y)dx + a_2(x)\cdot b_2(y)dy &= 0 \quad \left(\frac{1}{b_1(y)\cdot a_2(x)}\right) \\ \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx + \frac{b_2(y)}{b_1(y)}\,dy &= 0 \\ \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx + \int \frac{b_2(y)}{b_1(y)}\,dy &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.1.

(1) Si tenemos la ecuación diferencial, $(x-1)^2y\;dx + x^2(y+1)\;dy = 0$ entonces su solución puede ser obtenida aplicando el procedimiento expuesto encima, para obtener una ecuación diferencial de variables separables:

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2y\;dx + x^2(y+1)\;dy = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{x^2}\;dx + \frac{y+1}{y}\;dy = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{(x-1)^2}{x^2}\;dx + \int \frac{y+1}{y}\;dy = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{(x^2-2x+1}{x^2}\;dx + \int \frac{y+1}{y}\;dy = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\;dx + \int \left(1 + \frac{1}{y}\right)\;dy = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x - 2\ln x - \frac{1}{x} + y + \ln y = C
\end{aligned}
$$

Luego, $x - 2\ln x - \frac{1}{x} + y + \ln y = C$ es la solución de $(x-1)^2y\;dx + x^2(y+1)\;dy = 0$

(2) Si tenemos la ecuación $xy\;dx + (1+x^2)\;dy = 0$ entonces es de variables separables y,

$$
\begin{aligned}
xy\;dx + (1+x^2)\;dy = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{x}{1+x^2}\;dx + \frac{1}{y}\;dy = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{x}{1+x^2}\;dx + \int \frac{1}{y}\;dy = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln y = C
\end{aligned}
$$

Luego, $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln y = C$ es la solución de $xy\;dx + (1+x^2)\;dy = 0$

### 2.2.2. Ejercicios Propuestos: Ecuaciones diferenciales de variable separable.

Resolver las ecuaciones diferenciales de variable separable

(1) $(1-2y)\;dx + (9-3x)\;dy = 0$

(2) $\sin x\;dx + \cos x\cos y\;dy = 0$

(3) $(1+y^3)x\;dx + (9-3x^2)y^2\;dy = 0$

(4) $(1+e^x)\;dx + y\sin y\;dy = 0$

(5) $xy\;dx - (y+2)(1-x)\;dy = 0$

(6) $(x+3)^3\;dx + (1-y^4)\;dy = 0 \quad$ Si $x=1,\; y=1$

(7) $x^3y^2\, dx - (y^3+2)(1-x^4)\, dy = 0 \quad$ Si $x=2,\ y=1$

### 2.3. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas.

Definición 2.3.1. *Una función $f(x,y)=z$ es llamada una función homogénea de grado $n$ si satisface la siguiente condición:*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \ : \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

Ejemplo 2.3.2.

(1) Si $f(x,y) = x^3 + xy^2$ entonces $f$ es homogénea de grado 3

En efecto

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 + (\lambda x)(\lambda^2 y^2) \\ &= \lambda^3 (x^3 + xy^2) \\ &= \lambda^3 f(x,y) \end{aligned}$$

(2) Si $f(x,y) = x^2 + \sin x \cos y$ entonces $f$ no es homogénea

En efecto

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^2 x^2 + \sin \lambda x \cos \lambda y \\ &\neq \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

Definición 2.3.3. *Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es llamada homogénea de grado $n$ si $M$ y $N$ son funciones homogéneas de grado $n$*

Ejemplo 2.3.4.

(1) La ecuación diferencial $(x^3+y^3)\, dx - 3xy^2\, dy = 0$ es homogénea de grado 3.

En efecto

Si $M(x,y) = (x^3+y^3)$ entonces $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3 M(x,y)$

Análogamente

Si $N(x,y) = -3xy^2$ entonces $N(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda x)(\lambda^2 y^2) = \lambda^3 N(x,y)$

(2) La ecuación diferencial $x\, dy - y\, dx - \sqrt{x^2-y^2}\, dx = 0$ es homogénea de grado 1.

En efecto

Si $M(x,y) = -y - \sqrt{x^2-y^2}$ entonces $M(\lambda x, \lambda y) = -\lambda y - \sqrt{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}$

Luego,

$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda(-y - \sqrt{x^2 - y^2}) = \lambda M(x, y)$

Analogamente

Si $N(x, y) = x$ entonces $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x, y)$

Observación 2.3.5. *Supongamos que $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es homogénea de grado $n$ entonces*

$$\begin{aligned} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x^n \left(M_1\left(\frac{y}{x}\right)\, dx + N_1\left(\frac{y}{x}\right)\right)\, dy = 0 \\ &\Longrightarrow \quad M_1\left(\frac{y}{x}\right)\, dx + N_1\left(\frac{y}{x}\right)\, dy = 0 \end{aligned}$$

*Si hacemos el cambio de variables $v = \dfrac{y}{x}$ entonces*

$$M_1\left(\frac{y}{x}\right)\, dx + N_1\left(\frac{y}{x}\right)\, dy = 0 \Longleftrightarrow M_1(v)\, dx + N_1(v)\, dy = 0$$

*Es decir;*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M_1(v)}{N_1(v)}$$

*Ahora,*

$$v = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = vx \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

*Por tanto,*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{M_1(v)}{N_1(v)} \quad &\Longleftrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = -\frac{M_1(v)}{N_1(v)} \\ &\Longleftrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{M_1(v)}{N_1(v)} - v \\ &\Longleftrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{M_1(v) + vN_1(v)}{N_1(v)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{N_1(v)}{M_1(v) + vN_1(v)}\, dv = -\frac{dx}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left[\frac{N_1(v)}{M_1(v) + vN_1(v)}\right]\, dv + \frac{dx}{x} = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

*Así, la ecuación $(*)$ es de variables separables en las variables $v$ y $x$.*

### 2.3.6. Ejercicios Resueltos de ecuaciones homogéneas.

(1) Resolvamos la ecuación diferencial $(x^3 - y^3)\, dx - 3xy^2\, dy = 0$

Solución

Etapa 1. Reconocimiento de la ecuación diferencial.

$$
\begin{aligned}
M(x,y) = x^3 - y^3 \quad &\Longrightarrow \quad M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda^3 x^3 - \lambda^3 y^3) \\
&\Longrightarrow \quad M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 (x^3 - y^3) \\
&\Longrightarrow \quad M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 M(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(x,y) = -3xy^2 \quad &\Longrightarrow \quad N(\lambda x, \lambda y) = -3\lambda x \, \lambda^2 y^2 \\
&\Longrightarrow \quad N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3(-3xy^2) \\
&\Longrightarrow \quad N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 N(x,y)
\end{aligned}
$$

Luego la ecuación diferencial es homogénea

Etapa 2. Técnica para resolverla:

$$
\begin{aligned}
(x^3 - y^3)\, dx - 3xy^2\, dy = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y^3}{3xy^2} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3xy^2} - \frac{y^3}{3xy^2} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3y^2} - \frac{y}{3x} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Si hacemos $v = \dfrac{y}{x}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{v}\right)^2 - v\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{v^2} - v\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{1 - v^3}{v^2}\right)
\end{aligned}
$$

Como $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-v^3}{v^2}\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1}{3}\left(\frac{1-v^3}{v^2}\right)\\
&\Longleftrightarrow \quad 3x\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1-v^3}{v^2}\right) - 3v\\
&\Longleftrightarrow \quad 3x\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1-4v^3}{v^2}\right)\\
&\Longrightarrow \quad \frac{3v^2}{1-4v^3}\, dv = \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

Si hacemos $u = 1-4v^3$ entonces $\dfrac{du}{dv} = -12v^2$. Así que $-\dfrac{du}{4} = 3v^2\, dv$, y

$$\begin{aligned}
\int \frac{3v^2}{1-4v^3}\, dv &= \int \frac{1}{u}\,\frac{(-du)}{4}\\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u}\\
&= -\frac{1}{4}\ln u\\
&= -\frac{1}{4}\ln(1-4v^3)
\end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente resolvemos la ecuación de variables separables y retornamos a la variable original.

$$\begin{aligned}
\frac{3v^2}{1-4v^3}\, dv = \frac{dx}{x} \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{3v^2}{1-4v^3}\, dv = \int \frac{dx}{x}\\
&\Longrightarrow \quad -\frac{1}{4}\ln(1-4v^3) = \ln x + \ln C\\
&\Longleftrightarrow \quad \ln(1-4v^3)^{-\frac{1}{4}} - \ln x = \ln C\\
&\Longleftrightarrow \quad \ln\frac{(1-4v^3)^{-\frac{1}{4}}}{x} = \ln C\\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{x\,\sqrt[4]{1-4v^3}} = C\\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{x\,\sqrt[4]{1-4(\frac{y}{x})^3}} = C
\end{aligned}$$

(2) Resolvamos la ecuación diferencial $x\, dy + (-y - \sqrt{x^2-y^2})\, dx = 0$

Solución

Etapa 1. Reconocimiento de la ecuación diferencial.

Sabemos del ejemplo (2.3.4), (2) que la ecuación $x\ dy + (-y - \sqrt{x^2 - y^2})\ dx = 0$ es homogénea de grado 1.

Etapa 2. Técnica para resolverla:

$$\begin{aligned} x\ dy + (-y - \sqrt{x^2 - y^2})\ dx = 0 \quad & \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \\ & \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} \\ & \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}{x} \\ & \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

Si hacemos $v = \dfrac{y}{x}$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v - \sqrt{1 - v^2}$$

Como $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = v - \sqrt{1 - v^2} \quad & \Longleftrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = v - \sqrt{1 - v^2} \\ & \Longleftrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\sqrt{1 - v^2} \\ & \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\ dv = -\frac{dx}{x} \\ & \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\ dv = -\int \frac{dx}{x} \\ & \Longrightarrow \quad \arcsin(v) + \ln x = c \\ & \Longrightarrow \quad \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + \ln x = c \end{aligned}$$

### 2.3.7. Ejercicios Propuestos: Ecuaciones diferenciales homogéneas.

Resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas

(1) $4y\ dx + x\ dy = 0$

(2) $y^2\ dx - x^2\ dy = 0$

(3) $\left(x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}\right)\, dx + x\cos\frac{y}{x}\, dy = 0$

(4) $y\sqrt{x^2+y^2}\, dx - x\sqrt{x^2+y^2}\, dy = 0$

(5) $(x+2y)\, dx + (2x+3y)\, dy = 0$

(6) $(3y+5x)\, dx + (3x+5y)\, dy = 0$

(7) $(x^2+y^2)\, dx + xy\, dy = 0$ Si $x = 2$; $y = -1$

(8) $(x^2+xy)\, dx - x^2\, dy = 0$ Si $x = 1$; $y = 1$

### 2.4. Ecuaciones Diferenciales Lineales.

Definición 2.4.1. *Una ecuación diferencial lineal es una ecuación diferencial del tipo:*

$$y' + y\, P(x) = Q(x) \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} + y\, P(x) = Q(x) \tag{6}$$

Ejemplo 2.4.2.

(1) La ecuación diferencial $y' + xy = 3x$ es una ecuación diferencial lineal

(2) La ecuación diferencial $xy' - y = x^3 + 3x^2 - 2x$ es una ecuación diferencial lineal

Observación 2.4.3. *Consideremos la ecuación diferencial lineal* (6) *entonces*

$$\begin{aligned}
\left(y\, e^{\int P(x)\, dx}\right)' &= y'\, e^{\int P(x)\, dx} + yP(x)\, e^{\int P(x)\, dx} \\
&= e^{\int P(x)\, dx}(y' + y\, P(x)) \\
&= e^{\int P(x)\, dx}Q(x)
\end{aligned}$$

*Luego,*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int P(x)\, dx}\right) &= e^{\int P(x)\, dx}Q(x) \\
&\Downarrow \\
d\left(y\, e^{\int P(x)\, dx}\right) &= \left(e^{\int P(x)\, dx}Q(x)\right) dx \\
&\Downarrow \\
y\, e^{\int P(x)\, dx} &= \int \left(e^{\int P(x)\, dx}Q(x)\right) dx + C \\
&\Downarrow \\
y &= e^{-\int P(x)\, dx}\left[\int \left(e^{\int P(x)\, dx}Q(x)\right) dx + C\right]
\end{aligned}$$

*Así que;*

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = Q(x)}_{Lineal} \implies \underbrace{y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int \left(e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\right) dx + C\right]}_{Solución} \tag{7}$$

### 2.4.4. Ejercicios Resueltos: Ecuaciones diferenciales lineales.

(1) Resolvamos la ecuación diferencial lineal $y' + xy = 3x$

Solución

De acuerdo con (7), tenemos que determinar explícitamente lo siguiente:

(a) Como $P(x) = x$ entonces

$$\begin{aligned} \int P(x) &= \int x\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

(b) Como $Q(x) = 3x$ entonces

$$\begin{aligned} \int \left(e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\right) dx &= \int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot 3x dx \\ &= 3\int x e^{\frac{x^2}{2}} dx \qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora calculamos la integral (*)

$$\begin{aligned} \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx &= \int e^u\,du \\ &= e^u + C \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} + C \end{aligned}$$

Así que

$$3\int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = 3e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

(c) Finalmente la solución es:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[3e^{\frac{x^2}{2}} + C\right] \\ y &= 3 + C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

(2) Resolvamos la ecuación diferencial lineal $y' + 5y = \cos x$

Solución

Etapa 1. $\displaystyle\int P(x)\ dx = \int 5\ dx = 5\ x$

Etapa 2. $\displaystyle\int e^{\int P(x)\ dx} Q(x)\ dx = \underbrace{\int e^{5x}\cos x\ dx}_{\mathrm{I}} \qquad (*)$

Resolvemos la integral I en (*), usando el método de integración por partes:

$$u = e^{5x} \implies du = 5\ e^{5x}\ dx \qquad \int dv = \int \cos x\ dx \implies v = \sin x$$

Luego,

$$\mathrm{I} = \int e^{5x}\cos x\ dx = \sin x \cdot e^{5x} - 5\underbrace{\int e^{5x}\sin x\ dx}_{\mathrm{J}}$$

Ahora resolvemos la integral J por partes:

$$u = e^{5x} \implies du = 5\ e^{5x}\ dx \qquad \int dv = \int \sin x\ dx \implies v = -\cos x$$

Luego,

$$\mathrm{J} = \int e^{5x}\sin x\ dx = -\cos x \cdot e^{5x} + 5\underbrace{\int e^{5x}\cos x\ dx}_{\mathrm{I}}$$

Por tanto;

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \sin x \cdot e^{5x} - 5\left[-\cos x \cdot e^{5x} + 5\mathrm{I}\right] \\
&= \sin x \cdot e^{5x} + 5\cos x \cdot e^{5x} - 25\mathrm{I} \\
26\ \mathrm{I} &= e^{5x}(\sin x + \cos x) + C \\
\mathrm{I} &= \tfrac{1}{26}\left[e^{5x}(\sin x + \cos x)\right] + C
\end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente la solución es:

$$\begin{aligned}
y &= e^{-5x}\left(\tfrac{1}{26}\left[e^{5x}(\sin x + \cos x)\right] + C\right) \\
y &= \tfrac{1}{26}\left[\sin x + \cos x\right] + Ce^{-5x}
\end{aligned}$$

### 2.4.5. Ejercicios Propuestos: Ecuaciones diferenciales lineales.

Resolver las ecuaciones diferenciales lineales:

(1) $y' + y = 3 + 7x$

(2) $\dfrac{ds}{dt} + 3s = 4$

(3) $xdy - 2ydx = (x-2)e^x dx$

(4) $\dfrac{du}{dr} - 4u = 5\cos 2r$

(5) $ydx + (xy + x - 3y)dy = 0$

(6) $dr + (2r\ cot\theta + \sin 2\theta)d\theta = 0$

(7) $4y(1+y^2)dx = 2(2-2xy^2)dy$

### 2.5. Ecuaciones de Bernoulli's.

Definición 2.5.1. *Se llama ecuación diferencial de Bernoulli a una ecuación diferencial del tipo:*

$$y' + y\ P(x) = y^n\ Q(x) \tag{8}$$

Observación 2.5.2. *Solución de una ecuación de Bernoulli.*

*Como la ecuación* (8), *se puede escribir en la forma;* $y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + y^{-n+1}\ P(x) = Q(x)$ *entonces podemos hacer la siguiente sustitución:*

$$u = y^{-n+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = (1-n)\ y^{-n}\frac{dy}{dx} \Longleftrightarrow \frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad (*)$$

*Sustituyendo en* (8) *tenemos que la ecuación de Bernoulli se transforma en una ecuación lineal en u:*

*En efecto*

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + u\ P(x) = Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{du}{dx} + u\overbrace{((1-n)\ P(x))}^{nuevo\ P(x)} = \overbrace{(1-n)Q(x)}^{nuevo\ Q(x)}}_{lineal\ en\ u}$$

Ejemplo 2.5.3.

Resolvamos la ecuación diferencial de Bernoulli $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2e^x$

Solución

Sea $u = y^{-1}$ entonces $\dfrac{du}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$, luego

$$-\frac{du}{dx} = y^{-2}\frac{dy}{dx} \tag{9}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + y = y^2e^x \quad &\Longrightarrow \quad y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = e^x \qquad \text{aplicando (9) tenemos} \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{du}{dx} + u = e^x \\ &\Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} - u = -e^x \qquad \text{(lineal)} \end{aligned}$$

Ahora resolvemos la ecuación lineal resultante

Etapa 1. $\displaystyle\int P(x)\,dx = -\int dx = -x$

Etapa 2. $\displaystyle\int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx = \int e^{-x}e^{x}\,dx = x + C$

Etapa 3. La solución de la ecuación es:

$$u = e^{x}\,(x + C) \quad\Longrightarrow\quad y^{-1} = xe^{x} + Ce^{x}$$

### 2.5.4. Ejercicios Propuestos: Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli.

Resolver las ecuaciones diferenciales de Bernoulli

(1) $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^3$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = xy^4$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$

(4) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$

(5) $xdy - (y + y^3[1 + \ln x])dx = 0$

## 3. Aplicaciones

### 3.1. Familia de Curvas y Trayectorias Ortogonales.

Motivación 3.1.1. *Consideremos la ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, *sabemos que es una ecuación diferencial de variable separable y podemos resolverla o determinar su solución general por integración directa:*

Etapa 1.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad &\Longleftrightarrow \quad y\,dy = -x\,dx\\
&\Longrightarrow \quad \int y\,dy = -\int x\,dx\\
&\Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2c\\
&\Longrightarrow \quad y^2 + x^2 = C \qquad (C > 0)
\end{aligned}$$

*Luego la solución general de la ecuación es una familia de círculos con centro en el origen y radio* $r = \sqrt{C}$

Etapa 2. *Geométricamente tenemos:*

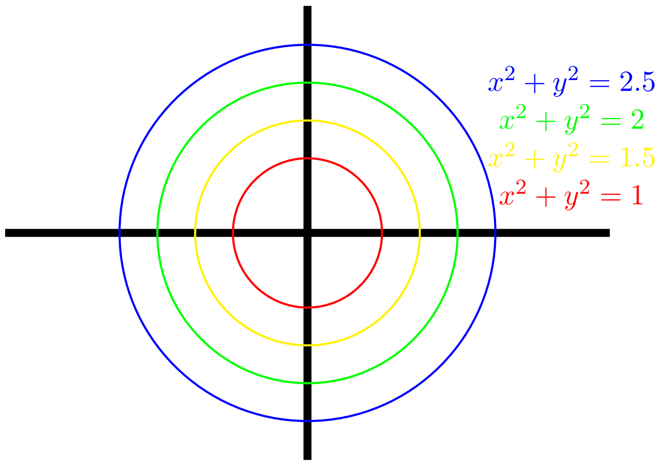


Figura 3

Etapa 3. *Una nueva mirada al problema.*

*La solución general es de la forma:* $y^2 + x^2 = C \quad (c > 0)$. *Así que*

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 = C &\implies 2yy' + 2x = 0 \\ &\implies \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \textit{(Cosa que ya sabíamos !!!)} \end{aligned}$$

*Luego, las rectas tangente a los círculos son de la forma:*

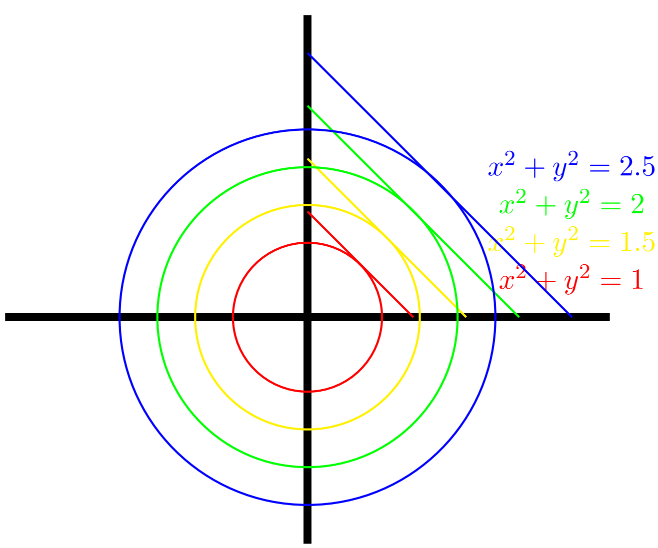


Figura 4

*La normal a estas tangentes (las dibujadas son todas paralelas) tiene una pendiente de la forma* $m$ *tal que* $\left(m \cdot -\dfrac{x}{y}\right) = -1$. *Luego* $m = \dfrac{y}{x}$, *así que tenemos la ecuación diferencial :* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$, *cuya solución es de la forma:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Longrightarrow \quad \ln y = \ln x + \ln c \\ &\Longrightarrow \quad \ln y = \ln c\, x \\ &\Longrightarrow \quad y = c\, x \end{aligned}$$

*Ahora geométricamente tenemos que:*

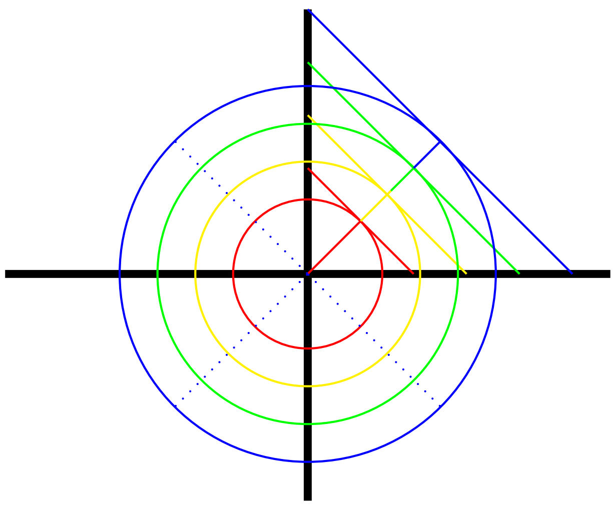

Figura 5

Definición 3.1.2. *Dos familias de curvas del plano se dirán ortogonales si las tangentes de una son perpendiculares a las tangentes de la otra.*

Ejemplo 3.1.3.

Determinemos la familia ortogonal a la familia de círculos $x^2 + y^2 = 2kx \qquad (*)$ entonces la pendiente a la familia de círculos es:

$$\begin{aligned} 2yy' + 2x &= 2k \quad \wedge \quad 2k = \frac{x^2+y^2}{x}. \text{ Así que} \\ 2yy' &= \frac{x^2+y^2}{x} - 2x \\ 2yy' &= \frac{y^2-x^2}{x} \\ y' &= \frac{y^2-x^2}{2xy} \qquad (**) \end{aligned}$$

La interpretación práctica es la siguiente:

(1) (**) es la ecuación diferencial asociada a la familia de círculos (*) equivalentemente (*) es la solución general de la ecuación diferencial (**)

(2) (**) también es la pendiente de la recta tangente a la familia de círculos (*)

(3) Luego la familia de pendientes "$m$" que se necesita debe verificar la ecuación

$$m \cdot \frac{y^2 - x^2}{2xy} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad m = -\frac{2xy}{y^2 - x^2} \Longleftrightarrow m = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

(4) Luego la familia ortogonal a la familia de círculos(*) es la solución de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \Longleftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \quad (***)$$

(5) De acuerdo a (**), la solución de (***) es $x^2 + y^2 = 2ky$ (resuelva la ecuación homogénea)

(6) Geométricamente la situación es la siguiente:

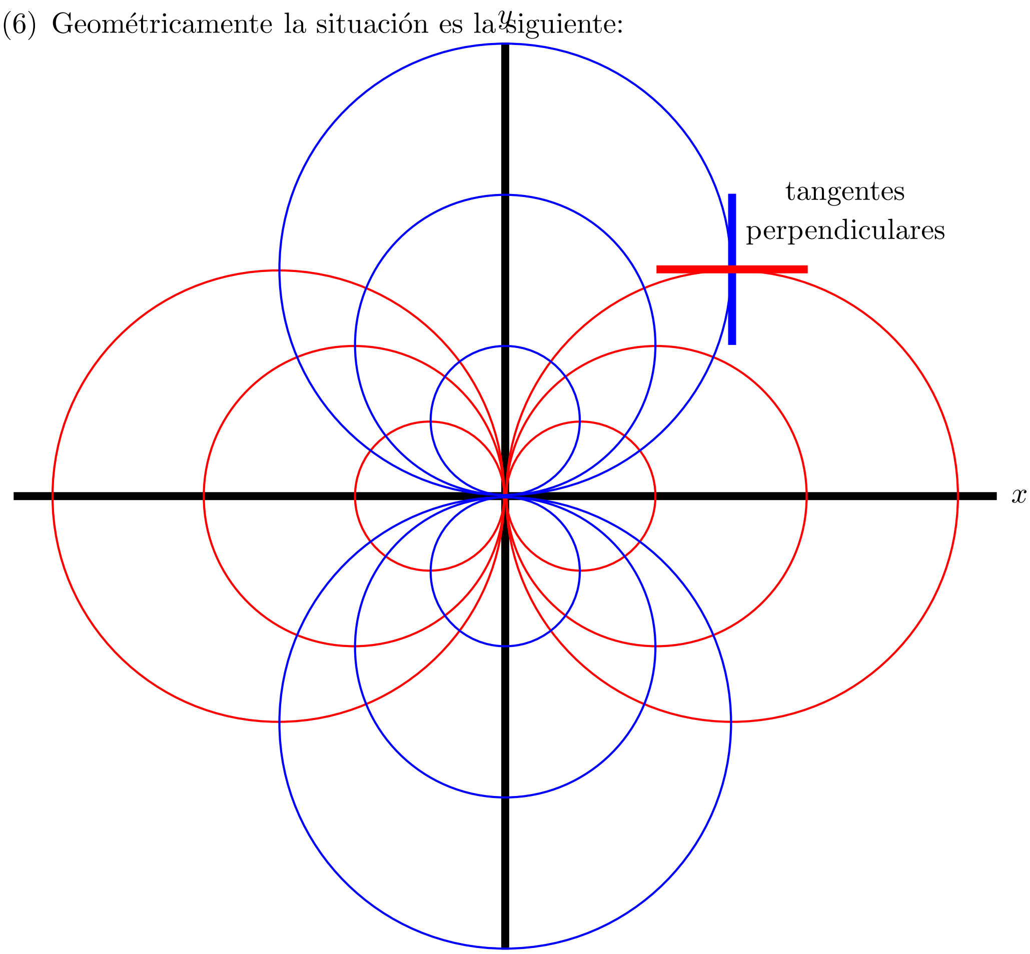


Figura 6

### 3.1.4. Ejercicios Propuestos.

(1) Determine la familia ortogonal a la familia $y = x^2 + c$

(2) Determine la familia ortogonal a la familia $y - 3x^2 - 5 - c = 0$

(3) Determine la familia ortogonal a la familia $y = x^3 + x + c$

(4) Determine la familia ortogonal a la familia $(x-1)^2 + (y-1)^2 = c(x-1)$

### 3.2. Otras Aplicaciones.

(1) Algunas notaciones:

(a) La "variable t" denotará el tiempo en el que se mide el proceso

(b) El "contador x(t)" será quien nos dice que cantidad del elemento en cuestión, se tiene en el tiempo "t". Por ejemplo $x(0)$ representará la cantidad de elemento que se tiene en el momento preciso que comienza el proceso.

(c) $\dfrac{dx}{dt}$ representa la variación de "crecimiento" del elemento en el instante "t".

(d) $-\dfrac{dx}{dt}$ representa la variación de "decrecimiento" del elemento en el instante "t".

(e) Si $k > 0$ entonces la ecuación que modela el decrecimiento de una sustancia en el tiempo $t$, proporcionalmente a la cantidad de sustancia es dada por.

$$-\frac{dx}{dt} = kx \tag{10}$$

La ecuación (10) es una ecuación diferencial de variables separables, y podemos entonces resolverla

$$\begin{aligned}
-\frac{dx}{dt} = kx \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = -k\int dt \\
&\Longrightarrow \quad \ln x = -kt + c \quad \wedge \quad \ln x_0 = -k\cdot 0 + c \\
&\Longrightarrow \quad \ln x = -kt + \ln x_0 \\
&\Longrightarrow \quad \ln x - \ln x_0 = -kt \\
&\Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -kt \\
&\Longrightarrow \quad \frac{x}{x_0} = e^{-kt} \\
&\Longrightarrow \quad x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}
\end{aligned}$$

(f) Si llamamos "Semi vida" de la sustancia al tiempo $T$, que se requiere para que esta se reduzca a la mitad entonces:

$$
\begin{aligned}
x(t) = \frac{x_0}{2} &\Longrightarrow \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kT} \\
&\Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -kT \\
&\Longrightarrow -\ln 2 = -kT \\
&\Longrightarrow T = \frac{\ln 2}{k} \qquad (T = \text{ Vida media})
\end{aligned}
$$

(g) La vida media del Carbono 14 (C*14) es 5568 años, luego su constante de rapidez de descomposición es:

$$
k = \frac{\ln 2}{5568} = 1.245 \cdot 10^{-4} \text{ años} \tag{11}
$$

(2) Datación de acontecimientos de hasta 10.000 años de antigüedad con $C^{14}$.

(a) La hipótesis fundamental es la siguiente: "La proporción de $C^{14}$ en un ser vivo del mismo tipo, es la misma, ahora que en el pasado."

(b) **Ejemplo "Caso de la madera"**

(i) Sea $t = 0$ el instante en que un trozo de madera de masa "$m$", se ha cortado.

(ii) Sea $t$ un instante cualquiera después de cortada la madera.

(iii) Sea $R(t)$ el número de desintegraciones por unidad de masa en el instante $t$, y $R_0 = R(0)$ el correspondiente número al ser cortada la madera.

(iv) Sea $N(t)$ el número de átomos de $C^{14}$, en el instante $t$, y $N(0) = N_0$ en el instante inicial.
Sabemos que la ecuación que rige el proceso es de la forma:

$$
\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t)
$$

De la solución de la ecuación (10), sigue que $N(t) = N_0 e^{-kt}$, por tanto

$$
\frac{dN(t)}{dt} = -kN_0 e^{-kt}
$$

Así que de acuerdo a nuestros convenios y notaciones tenemos que:

$$R(t)\cdot m = -\frac{dN(t)}{dt} = kN_0e^{-kt} \qquad \wedge \qquad R_0\cdot m = -\frac{dN(t)}{dt}|_{t=0} = kN_0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R(t)}{R_0} = e^{-kt}$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{R_0}{R(t)}\right)$$

(v) Así por ejemplo tenemos que en un castillo de Inglaterra se encontraba un tabla de mesa, redonda y de 18 pulgadas de diámetro, con 25 sectores dibujados. Se supuso que se trataba de la "tabla redonda" del Rey Arturo, siendo los sectores uno para el Rey y los otros para sus caballeros. Se fechó la tabla con la técnica del $C^{14}$, las mediciones resultaron ser: $R(t) = 6.08$ desintegraciones por minuto y gramo y $R_0 = 6.68$ desintegraciones por minuto y gramo, así que:

$$t = \frac{1}{1.245\cdot 10^{-4}/\text{ año}}\ln\frac{6.68}{6.08} \approx 700 \text{ años}$$

## 4. Transformada de Laplace

### 4.1. Preliminares.

(1) Sea $y = f(t)$ una función real entonces sabemos que si $f$ es continua en $[a,b]$ entonces tenemos la integral definida:

$$\int_a^b f(t)\,dt = (F(t))_a^b = F(b) - F(a) \tag{12}$$

Ejemplo 4.1.1.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2+1)\,dt = \left(\frac{t^3}{3}+t\right)_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}+2 = \frac{8}{3}$

2. Si $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt$ entonces integramos por partes:

$$\begin{array}{rcl} u &=& t \\ du &=& dt \end{array} \quad : \quad \begin{array}{rcl} dv &=& \sin t\,dt \\ v &=& -\cos t \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\ dt \\ &= (-t\cos t)_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\ dt \\ &= (-\pi\cos\pi) - (\pi\cos\pi) + \sin(\pi) - \sin(-\pi) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

(2) Si $y = f(t)$ una función real continua en $[a,\infty]$ o en $[\infty, b]$ o en $[\infty,\infty]$ entonces tenemos las integrales impropias:

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} f(t)\ dt &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\ dt \\ \int_{\infty}^{b} f(t)\ dt &= \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(t)\ dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt + \int_b^{\infty} f(t)\ dt \end{aligned}$$

Estas integrales existen si los límites existen.

Ejemplo 4.1.2.

1. Calculemos la integral $I = \displaystyle\int_0^{\infty} k\ e^{-st}\ dt$, donde k es un número real.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} k\ e^{-st}\ dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b k\ e^{-st}\ dt \\ &= \lim_{b\to\infty} k\int_0^b e^{-st}\ dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{k}{s}e^{-st}\right)_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{k}{s}e^{-sb}\right) - \left(-\frac{k}{s}\right)\right] \\ &= \frac{k}{s} \end{aligned}$$

Observación 4.1.3.

(i) La frase $k$ es un número real puede ser interpretado como la función constante $f(t) = k$; $(\forall t; t \in \mathbb{R})$. Su gráfico es como sabemos el siguiente:

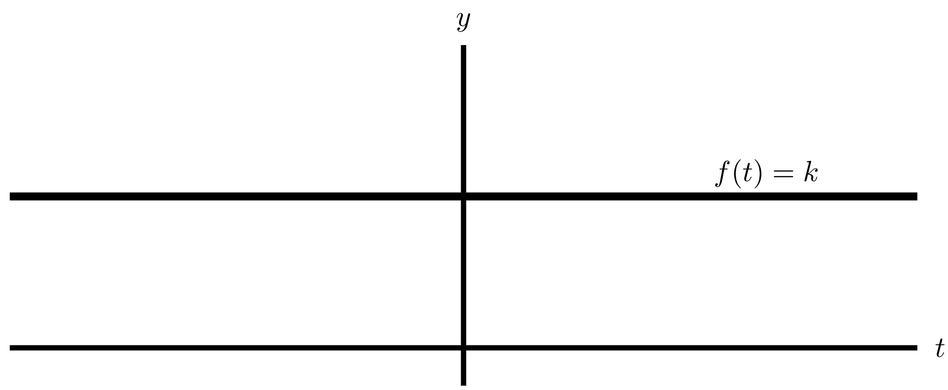


Figura 7

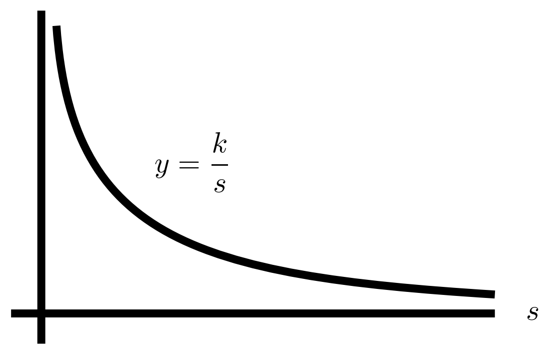


Figura 8

(ii) La función $y = f(t) = k$ se transforma en la función $y = g(s) = \dfrac{k}{s}$. Es decir una recta paralela al eje $t$ se transforma en una hipérbola.

(iii) Si definimos la función: $\pounds[k](s) = \displaystyle\int_0^{\infty} k\ e^{-st}\ dt$ entonces

$$\pounds[k](s) = \frac{k}{s} \tag{13}$$

2. Calculemos la integral $I = \displaystyle\int_0^{\infty} t\ e^{-st}\ dt$.

   Integramos por partes:

$$\begin{array}{ll} u = t & dv = e^{-st} \\ du = dt & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
I &= \left[-\frac{t}{s}\,e^{-st}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s}\,e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{t}{s}\,e^{-st}\right]_0^{b} - \left[\frac{1}{s^2}\,e^{-st}\right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{t}{s}\,e^{-st}\right]_0^{b} - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s^2}\,e^{-st}\right]_0^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b}{se^{bs}} + \frac{0}{se^{0}}\right] - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s^2e^{bs}} - \frac{1}{s^2e^{0}}\right] \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
\pounds[t](s) = \frac{1}{s^2} \tag{14}
$$

3. En general si $f(t) = at + b$ entonces

$$
\begin{aligned}
\pounds[at+b](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}(at+b)\,dt \\
&= a\int_0^{\infty} t\,e^{-st}\,dt + \int_0^{\infty} b\,e^{-st}\,dt \text{ (propiedades de la integral)} \\
&= \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} \qquad \text{(aplicando (13)) y (14)} \\
&= a\pounds[t](s) + \pounds[b](s)
\end{aligned}
$$

### 4.2. Transformada de Laplace.

Definición 4.2.1. *Sea $y = f(t)$ una función continua en el intervalo $(0, \infty)$. Llamaremos ”Transformada de Laplace” de $f$ a la función definida por.*

$$
\pounds[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \tag{15}
$$

*Siempre que la integral exista.*

Observación 4.2.2.

(1) Aunque hemos dado un par de ejemplos, son sólo eso y no tenemos un criterio general para la existencia de la Transformada de Laplace de una función.

(2) Supongamos que existe $c$ y $\alpha$ en $\mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leq ce^{\alpha t} \quad (\forall t; t \in \mathbb{R}^+)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt &\leq \left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\right| \\
&\leq \int_0^\infty |f(t)||e^{-st}|\,dt \\
&\leq \int_0^\infty ce^{\alpha t}e^{-st}\,dt \\
&= c\int_0^\infty e^{\alpha t - st}\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{c}{s-\alpha}[1 - e^{-(s-\alpha)b}] \\
&= \frac{c}{s-\alpha} \qquad (s > \alpha)
\end{aligned}$$

(3) Algunos ejemplos de funciones que verifican la propiedad expuesta encima.

(a) $f(t) = t^n \quad (n \in \mathbb{N})$

En efecto

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} &= \lim_{t\to\infty} n\frac{t^{n-1}}{e^t} \qquad \text{(L'Hôpital)} \\
&= \lim_{t\to\infty} n(n-1)\frac{t^{n-2}}{e^t} \\
&= \lim_{t\to\infty} n(n-1)\cdots 1\frac{1}{e^t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{e^t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego, $\left|\dfrac{t^n}{e^t}\right| < 1 \Longrightarrow |t^n| < e^t$

(b) $f(t) = e^{at} \quad (a \in \mathbb{R}^+)$

En efecto

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{e^{at}}{e^{2at}} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{at}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, $\left|\dfrac{e^{at}}{e^{2at}}\right| < 1 \Longrightarrow |e^{at}| < e^{2at}$

Definición 4.2.3. *Una función $y = f(t)$ se dice de orden exponencial en $[0, \infty)$, si existen $c \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(t)| \leq ce^{at} \tag{16}$$

### 4.2.4. Ejercicios propuestos.

Demuestre que las funciones son de orden exponencial, es decir verifican (16)

(a) $f(t) = \sin at$

(b) $f(t) = \cos at$

(c) $f(t) = t^n\ e^{at}\ \sin at$

(d) $f(t) = t^n\ e^{at}\ \cos at$

Conclusión 4.2.5. *Si $y = f(t)$ es una función continua de orden exponencial entonces existe un real $\alpha$ tal que*

$$\pounds[f(t)](s) \ = \ \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{17}$$

*Converge para $s > \alpha$*

### 4.2.6. Fórmulas Básicas.

(1) Si $f(t) = t^n$ entonces $\pounds[t^n](s) = \displaystyle\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt$

Integramos por partes

$$\begin{array}{ll} u = t^n & dv = e^{-st}dt \\ du = nt^{n-1}dt & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\pounds[t^n](s) &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t^n}{s}e^{-st}\right)_0^b + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,dt\\
&= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,dt\\
&= \frac{n(n-1)}{s^2}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-st}\,dt\\
&= \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (s>0) \text{ y } (n\in\mathbb{N})
\end{aligned}$$

(2) Si $f(t)=\sin at$ entonces $\pounds[\sin at](s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt$

En efecto

Integramos por partes

$$\begin{array}{ll}
u=\sin at & dv=e^{-st}dt\\
du=a\cos at\,dt & v=-\frac{1}{s}e^{-st}
\end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\pounds[\sin at](s) &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\sin at}{s}\,e^{-st}\right)_0^b + \frac{a}{s}\int_0^\infty \cos at\,e^{-st}\,dt\\
&= \underbrace{\frac{a}{s}\int_0^\infty \cos at\,e^{-st}\,dt}_{J} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Para calcular $J$ Integramos por partes

$$\begin{array}{ll}
u=\cos at & dv=e^{-st}dt\\
du=-a\sin\ at\,dt & v=-\frac{1}{s}e^{-st}
\end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
J &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\cos at}{s}\,e^{-st}\right)_0^b - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin at\,e^{-st}\,dt\\
&= \frac{1}{s}-\frac{a}{s}\int_0^\infty \sin at\,e^{-st}\,dt\\
&= \frac{1}{s}-\frac{a}{s}\pounds[\sin at](s)
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $J$ en (*), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\pounds[\sin at](s) &= \frac{a}{s}\left[\frac{1}{s} - \frac{a}{s}\pounds[\sin at](s)\right] \\
&= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}\pounds[\sin at](s) \\
\pounds[\sin at](s) + \frac{a^2}{s^2}\pounds[\sin at](s) &= \frac{a}{s^2} \\
\pounds[\sin at](s)\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right) &= \frac{a}{s^2} \\
\pounds[\sin at](s) &= \frac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

Lema 4.2.7. *Sea $y = f(t)$ una función continua en $(0,\infty)$ y supongamos que $f'$ es continua y de orden exponencial en $[0,\infty)$ entonces*

$$\pounds[f'(t)](s) = s\pounds[f(t)](s) - f(0) \tag{18}$$

*En efecto:*

$$\pounds[f'(t)](s) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, dt$$

*Integramos por partes*

$u = e^{-st}$ $\quad$ $dv = f'(t)dt$
$du = -s\, e^{-st}\, dt$ $\quad$ $v = f(t)$

*Luego,*

$$\begin{aligned}
\pounds[f'(t)](s) &= \left(f(t)\, e^{-st}\right)_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{b\to\infty} f(b)\, e^{-sb} - f(0) + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \\
&= -f(0)) + s\pounds[f(t)](s) \qquad (f \text{ es de orden exponencial})
\end{aligned}$$

Corolario 4.2.8. *Si $y = f(t)$ una función continua en $(0,\infty)$ y $f', f'', \dots, f^{(n)}$ continuas y de orden exponencial en $[0,\infty)$ entonces*

$$
\begin{aligned}
\pounds[f''(t)](s) &= s^2\pounds[f(t)](s) - sf(0) - f'(0) \\
\pounds[f'''(t)](s) &= s^3\pounds[f(t)](s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \\
&\vdots \\
\pounds[f^{(n)}(t)](s) &= s^n\pounds[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2.9. *Sea* $f(t) = \dfrac{1}{a}\sin\ at$ *entonces* $f'(t) = \cos\ at$. *Luego,*

$$
\begin{aligned}
\pounds[\cos\ at](s) &= \frac{s}{a}\pounds[\sin\ at](s) \\
&= \frac{s}{a}\,\frac{a}{a^2+s^2} \\
&= \frac{s}{a^2+s^2}
\end{aligned}
$$

Observación 4.2.10. *Volveremos más adelante a tratar este tema*

# Contenidos