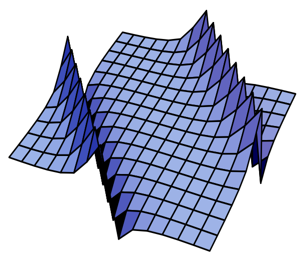
INGENIERÍA VESPERTINA EN
AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL

APUNTE Nº 1

CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES



MATEMÁTICA II

PROFESOR

RICARDO SANTANDER BAEZA

2004

Derivadas Parciales

1. Introducción

(1) El ambiente de trabajo será el conjunto llamado espacio euclidiano n dimensional descrito a través del conjunto

$$(1) \qquad \boxed{\mathbb{R}^n \;=\; \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ (1 \le i \le n)\}}$$

En particular:

- Si $n = 1$ tenemos que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ es la recta real.

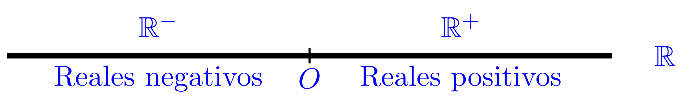


Figura 1

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\ \mathbb{R}^- &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \end{aligned}$$

- Si $n = 2$ tenemos que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ es el Plano Cartesiano.

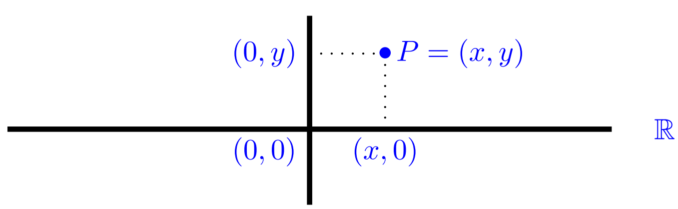


Figura 2

- Si $n = 3$ tenemos que $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ es el Espacio euclídeo tridimensional.

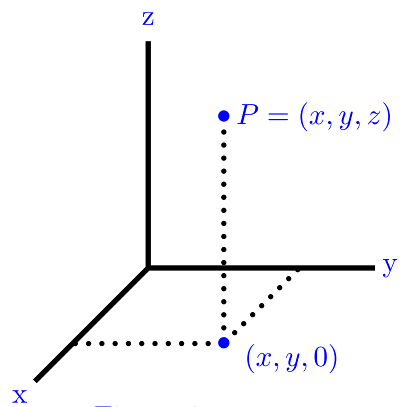


Figura 3

(2) consideremos el círculo S: $x^2 + y^2 = 1$ cuyo gráfico es de la forma.

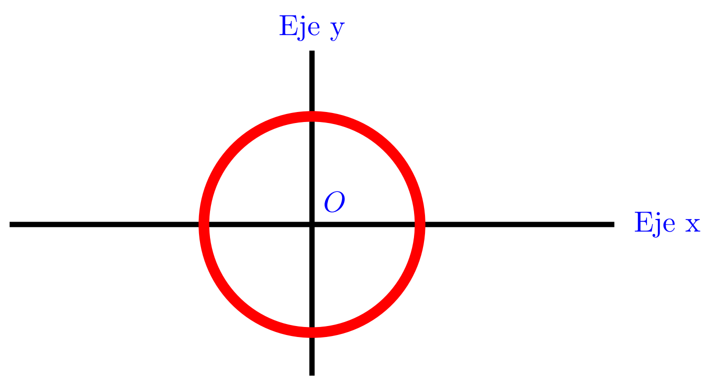


Figura 4

(3) Ahora consideremos el siguiente gráfico.

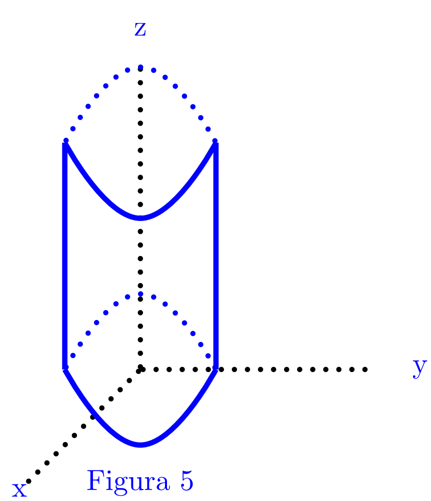


Figura 5

Entonces el cilindro recto tiene por ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, es decir para cada valor de z tenemos un círculo de radio z. Así que las figuras en el plano adquieren volumen en el espacio copiandolas continuamente una cantidad dada $h > 0$.

(4) Otro ejemplo clásico es el cono y se obtiene como:

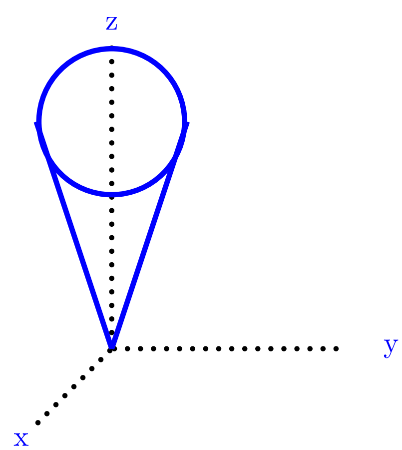


Figura 6

2. Funciones de varias variables

2.1. Definición y ejemplos.

Definición 2.1.1. *Sea $R \subset \mathbb{R}^2$, es decir R es una región del plano $\mathbb{R}^2$ o plano xy. Diremos que f es una función de dos variables reales si a cada punto $P = (x, y) \in R$ asocia un único punto $f(P) = f(x, y) \in \mathbb{R}$.*

Notación:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} f & : & R & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}} \tag{2}$$

Ejemplo 2.1.2. *Si $z = f(x, y) = -x - y + 1$ entonces tenemos que su gráfico es de la forma:*

$$\begin{aligned} \mathit{Graf}\,(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) = -x - y + 1\} \\ &= \{(x, y, -x - y + 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \Longleftrightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z + x + y - 1 = 0\} \end{aligned}$$

Así que f tiene como gráfico un plano:

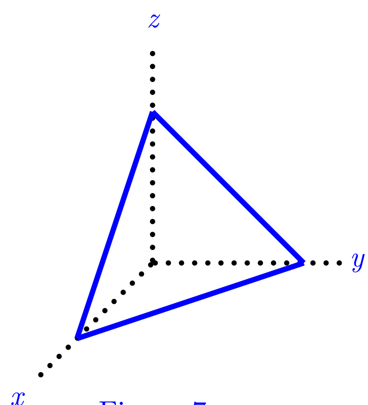
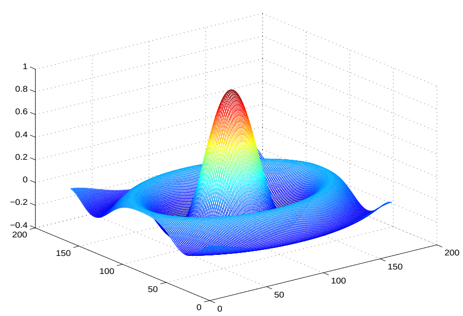


Figura 7

Ejemplo 2.1.3.



Definición 2.1.4. *Sea $R \subset \mathbb{R}^n$, es decir R es una región del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$. Diremos que f es una función de n variables reales si a cada punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ asocia un único punto $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.*

Notación:

$$\boxed{\begin{array}{cclcl} f & : & R & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}} \tag{3}$$

Ejemplo 2.1.5. *Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ entonces podemos observar lo siguiente:*

- $f(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *En símbolos ponemos que:*

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Concluimos entonces que a la esfera centrada en el origen y de radio 1,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Esta función la transforma en un punto, en este caso el cero (0)

- *Un poco más general.*

$f(x,y,z) = a \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2-1 = a \Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2 = a+1$
En símbolos ponemos que:

$$f^{-1}(a) \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a+1\}$$

La conclusión en este caso debe ser un tanto más exhaustiva, pues

$$x^2+y^2+z^2 \geq 0 \ (\forall (x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3) \quad \Longrightarrow \quad a+1 \geq 0$$

En tal caso el conjunto:

(4) $$S_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a+1, \ (a \geq -1)\}$$

Es una esfera centrada en el origen y radio $\sqrt{a+1}$

Es decir,

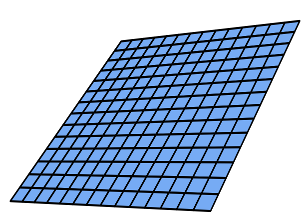
$$f^{-1}(a) \quad = \quad \begin{cases} S_a & : a \geq -1 \\ \emptyset & : a < -1 \end{cases}$$

2.2. Ejercicios Propuestos.

(1) Bosqueje el gráfico de las funciones de dos variables:

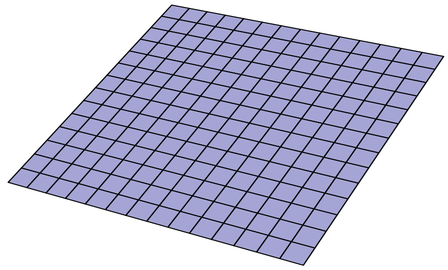
- $f(x,y) = x$

  Solución



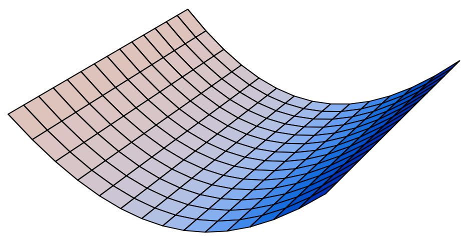
- $f(x,y) = y$

  Solución



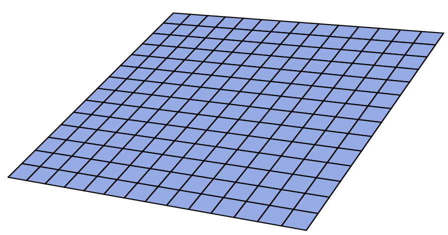
- $f(x,y) = x^2$

  Solución



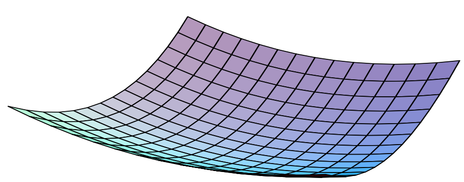
- $f(x,y) = x + y + 1$

  Solución



- $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

  Solución



(2) Determine los conjuntos $f^{-1}(a); a \in \mathbb{R}$, para las funciones:

- $f(x,y) = x + y$
- $f(x,y) = x^2 + 2y^2$
- $f(x,y) = x^2 + y^2$
- $f(x,y) = x^2 - y^2$
- $f(x,y,z) = x + y + z$
- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$
- $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$

3. Límites

3.1. Motivación.

(1) Consideremos la función $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ entonces

- dom $(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- La función f puede ser escrita como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= x+1 \qquad x \neq 1 \end{aligned}$$

- Así que su gráfico es de la forma.

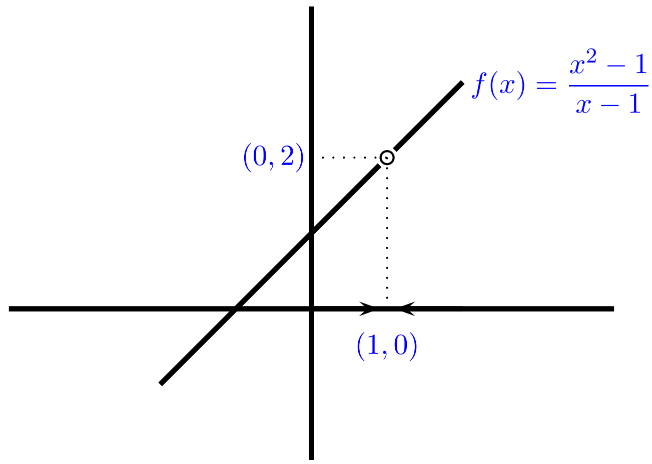


Figura 8

- Luego, cuando x tiende a 1 entonces $f(x)$ tiende a $x+1$, en lenguaje simbólico tenemos que

(5)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

(2) Ahora consideremos la función $z = f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

- dom $(f) = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid x = y\}$

- La función f puede ser escrita como sigue:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2-y^2}{x-y} \\ &= \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} \\ &= x+y \qquad x \neq y \end{aligned}$$

- El gráfico de f es un plano menos la recta $y = x$. Así que cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, $f(x,y)$ tiende a $x+y$, en lenguaje simbólico tenemos que

(6)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0$$

(3) Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ entonces

- dom $(f) = \mathbb{R}^2$

- Ahora para esta función tenemos

  (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$

  (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$

- Luego,

$$\lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \neq \lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

  En este caso,

$$\lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \nexists$$

Definición 3.1.1. *Sea $z = (x, y)$ una función definida en los puntos de un disco con centro en $P_0 = (x_0, y_0)$, excepto quizás en P_0. Si existe un número L tal que $f(P)$ tiende a L cuando P tiende P_0 entonces L se denomina el límite de $f(P)$ cuando P tiende a P_0. En símbolos se escribe.*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = L \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \tag{7}$$

3.2. Ejercicios Propuestos.

Calcule los siguientes límites si es que existen.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x+y}{2x^2+y^2}$

4. Derivadas Parciales

4.1. Motivación.

Sabemos que si $y = f(x)$ es una función entonces respecto de la primera derivada de f en x_0, podemos decir lo siguiente:

(1) $f'(x_0)$ existe o no y dicha existencia depende de la existencia del límite.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Longleftrightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(2) Desde un punto de vista geométrico tenemos que la primera derivada, $f'(x_0)$ corresponde a la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $P = (x_0, y_0 = f(x_0))$. Es decir

(8) $$tg: \qquad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Y su gráfico es de la forma:

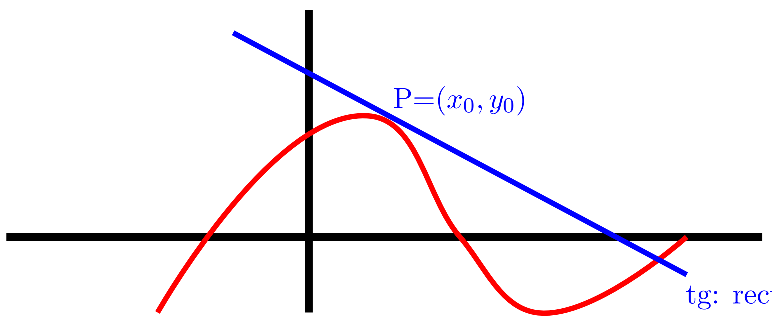


Figura 9

(3) Finalmente podemos decir que cuando existe $f'(x_0)$ entonces podemos "pegar un palillo" en el punto $P = (x_0, y_0)$

(4) Si $z = f(x, y)$ entonces su gráfico es una superficie, así que si queremos "imitar la idea del palillo," en este caso será un plano lo que debemos pegar en el punto $P = (x, y, f(x, y))$. Más adelante justificaremos que para definir un plano se necesitan exactamente dos puntos.

Definición 4.1.1. *Sea $z = f(x, y)$ y supongamos que el dominio de la función f incluye a un disco D con centro en $P = (x, y)$. Si existe*

(9) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Este límite se conoce como la **"Derivada Parcial de f respecto de x"** *en el punto $P(x, y)$*

Análogamente, si existe

(10) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Este límite se conoce como la **"Derivada Parcial de f respecto de y"** *en el punto* $P(x,y)$

Notaciones frecuentes:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y);\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y);\quad z_x;\quad f_x;\quad f_1 \quad : \text{ derivadas parciales respecto de } x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y);\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y);\quad z_y;\quad f_y;\quad f_2 \quad : \text{ derivadas parciales respecto de } y$$

Ejemplo 4.1.2. *Sea* $z = x^2 + y^3 - xy^2 + 3$ *entonces*

(1) *Respecto de* x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+y^3-(x+h)y^2+3-x^2-y^3+xy^2-3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x+h)y^2-x^2+xy^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-xy^2-hy^2-x^2+xy^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-hy^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-y^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h-y^2)\\
&= 2x-y^2
\end{aligned}$$

(2) *Respecto de* y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+(y+h)^3-x(y+h)^2+3-x^2-y^3+xy^2-3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(y+h)^3-x(y+h)^2-y^3+xy^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{y^3+3y^2h+3yh^2+h^3-x(y^2+2yh+h^2)-y^3+xy^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{y^3+3y^2h+3yh^2+h^3-xy^2-2xyh-xh^2-y^3+xy^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3y^2h+3yh^2+h^3-2xyh-xh^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(3y^2+3yh+h^2-2xy-xh)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3y^2+3yh+h^2-2xy-xh)\\
&= 3y^2-2xy
\end{aligned}$$

Observación 4.1.3. *La cuestión aquí es darse cuenta que:*

(1) *Cuando calculamos* $f(x+h,y)$ *entonces la función sólo varía en la variable* x*, y no en la variable* y*, es decir* y *permanece constante y entonces su derivada respecto de* x *es cero.*
Análogamente, cuando calculamos $f(x,y+h)$ *entonces la función sólo varía en la variable* y*, y no en la variable* x*, es decir* x *permanece constante y entonces su derivada respecto de* y *es cero.*

(2) *La segunda cuestión es que lo anterior puede ser operacionalizado como sigue:*

- ⋆ *Para calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *derivamos como lo hacíamos en una variable respecto de* x*, y tratando la variable* y *como una constante.*
- ⋆ *Para calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *derivamos como lo hacíamos en una variable respecto de* y*, y tratando la variable* x *como una constante.*

(3) *En la práctica tenemos:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= (x^2+y^3-xy^2+3)' \quad (y \textbf{ constante})\\
&= (x^2)'+(y^3)'-(xy^2)'+(3)'\\
&= (x^2)'+(y^3)'-[(x)'y^2+x(y^2)')]+(3)'\\
&= 2x+0-[1\cdot y^2+x\cdot 0)]+0\\
&= 2x-y^2\\
\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= (x^2+y^3-xy^2+3)' \quad (x \textbf{ constante})\\
&= (x^2)'+(y^3)'-(xy^2)'+(3)'\\
&= (x^2)'+(y^3)'-[(x)'y^2+x(y^2)')]+(3)'\\
&= 0+3y^2-[0\cdot y^2+x\cdot 2y]+0\\
&= 3y^2-2xy
\end{aligned}
$$

4.2. Ejercicios Propuestos.

Determine las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_x(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_y(x,y)$, para las funciones siguientes:

$$
\begin{array}{lcl lcl}
1. f(x,y) & = & 3x+2y & 6. f(x,y) & = & \arctan(xy)\\
2. f(x,y) & = & x^2y+4 & 7. f(x,y) & = & \arctan\dfrac{y}{x}\\
3. f(x,y) & = & x^3y^4 & 8. f(x,y) & = & \sqrt{x}\sec(x^2y)\\
4. f(x,y) & = & x\cos(xy) & 9. f(x,y) & = & e^xy^3\\
5. f(x,y) & = & \ln(x+2y) & 10. f(x,y) & = & x^3y^4-\sin(x^2y^2)+3
\end{array}
$$

4.3. Derivadas Parciales de orden superior.

Considera la función $z=f(x,y)=x^3y^2+y^4+x^4+33$ entonces sabemos que:

$$
\begin{array}{lcll}
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 3x^2y^2+4x^3 & \text{podemos volver a derivar respecto de } x \text{ e } y\\
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) & = & 6xy^2+12x^2 & \text{Segunda derivada de } f \text{ respecto de } x\\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) & = & 6x^2y & \text{Derivada de } f_x \text{ respecto de } y\text{, (derivada mixta)}
\end{array}
$$

También podemos derivar f respecto de y, y obtenemos:

$$
\begin{array}{lcll}
\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 2x^3y+4y^3 & \text{podemos volver a derivar respecto de } x \text{ e } y\\
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) & = & 6x^2y & \text{Derivada de } f_y \text{ respecto de } x \text{ (derivada mixta)}\\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) & = & 2x^3+12y^2 & \text{Segunda derivada de } f \text{ respecto de } y
\end{array}
$$

Definición 4.3.1. *Sea $z=f(x,y)$ una función de dos variables tal que existen sus derivadas parciales f_x y f_y. Si existe el límite:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_x(x+h,y)-f_x(x,y)}{h} \tag{11}$$

Lo notaremos $f_{xx}(x,y)$ *ó* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ *ó* $f_{11}(x,y)$ *y lo llamaremos* **La segunda derivada parcial** *de* f *respecto de* x

Si existe también el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_x(x,y+h)-f_x(x,y)}{h} \tag{12}$$

Lo notaremos $f_{xy}(x,y)$ *ó* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ *ó* $f_{12}(x,y)$ *y lo llamaremos* **La segunda derivada parcial mixta** *de* f *respecto de* y

Análogamente. Si existe el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h} \tag{13}$$

Lo notaremos $f_{yx}(x,y)$ *ó* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ *ó* $f_{21}(x,y)$ *y lo llamaremos* **La segunda derivada parcial mixta** *de* f *respecto de* x

Si existe también el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(x,y+h)-f_y(x,y)}{h} \tag{14}$$

Lo notaremos $f_{yy}(x,y)$ *ó* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ *ó* $f_{12}(x,y)$ *y lo llamaremos* **La segunda derivada parcial** *de* f *respecto de* y

Ejemplo 4.3.2. *Sea* $z=f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$ *entonces*

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= -2x\sin(x^2+y^2)\\
f_{xx}(x,y) &= -2\sin(x^2+y^2)-4x^2\cos(x^2+y^2)\\
f_{xy}(x,y) &= -4xy\cos(x^2+y^2)\\
f_y(x,y) &= -2y\sin(x^2+y^2)\\
f_{yy}(x,y) &= -2\sin(x^2+y^2)-4y^2\cos(x^2+y^2)\\
f_{yx}(x,y) &= -4xy\cos(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

Observación 4.3.3. *Podemos mostrar el comportamiento de las derivadas en el caso de dos variables como sigue:*

$$
\begin{tikzcd}
 & & & f \arrow[d] & & & \\
 & & & f_x \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & f_{xx} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & f_{xy} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f_{xxx} & & f_{xxy} & & f_{xyx} & & f_{xyy}
\end{tikzcd}
$$

Figura 10

Análogamente, para la derivada respecto de y tenemos una situación similar.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & f \arrow[d] & & & \\
 & & & f_y \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & f_{yx} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & f_{yy} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f_{yxx} & & f_{yxy} & & f_{yyx} & & f_{yyy}
\end{tikzcd}
$$

Figura 11

4.4. Ejercicios Resueltos.

(1) Sea $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{6}$ entonces

- Calculemos $f_y(1,1)$

  Solución

  $$f_y(x,y) = \frac{xy}{3}$$

  Luego,

  $$f_y(1,1) = \frac{1}{3}$$

- Sea C_y la intersección del gráfico de f con el plano $[P: \ x=1]$, es decir $P = \{(1,y,z) \mid y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}\}$. Así en estricto rigor:

$$
\begin{aligned}
C_y &= \text{Graf}(f) \cap P \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y) \wedge x = 1\} \\
&= \{(1,y,f(1,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(1,y,\frac{y^2}{6} \mid y \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Una parábola}
\end{aligned} \tag{15}
$$

- Finalmente podemos calcular la recta tangente a la curva C_y obtenida en (15) en el punto (1,1). En tal caso como siempre $f_y(1,1) = \dfrac{1}{3}$ es la pendiente de la recta tangente a C_y en ese punto, por tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x-1) \Longleftrightarrow 3y - x - 2 = 0$$

Definición 4.4.1. *Si $z = f(x,y)$ es una superficie (es decir el gráfico de una función de dos variables) entonces llamaremos* **Traza de la superficie** *a la intersección de la superficie con un plano.*

En el ejercicio (1) la traza en el plano $[P: \ x=1]$ es C_y una parábola.

(2) Demuestre que la función $u = u(x,y,t) = e^{-n^2kt}\sin nx$. k constante, satisface la ecuación del calor unidimensional:

$$u_t = k \cdot u_{xx} \ \ \text{(k constante)} \tag{16}$$

En efecto

Por un parte,

$$u_t = -n^2k \cdot e^{-n^2kt}\sin nx \tag{17}$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
u_x &= n \cdot e^{-n^2kt}\cos nx \\
u_{xx} &= -n^2 \cdot e^{-n^2kt}\sin nx
\end{aligned} \tag{18}
$$

Así que, $u_t = k \cdot u_{xx}$ y la función u satisface (16)

La definición de derivada parcial para dos variables puede ser extendida para funciones de n-variables, como sigue.

Definición 4.4.2. *Sea $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función de n-variables. Si existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \tag{19}$$

entonces lo llamaremos la derivada parcial de f respecto de la variable x_i y la notaremos: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ó f_{x_i} ó z_{x_i} para $(i = 1, 2, \dots, n)$

Ejemplo 4.4.3. *Sea $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ entonces*

- $w_x = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- $w_y = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- $w_z = \dfrac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

4.5. Ejercicios Propuestos.

(1) Determine las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1.	$f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$	6.	$f(x, y, z) = e^{xy(\cos xyz + \sin xz^2)}$
2.	$f(x, y, z) = x^2y^3z^4$	7.	$f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$
3.	$f(x, y, z) = e^{xyz}$	8.	$f(x, y, z) = \arctan(x^2 + y^2 + z^2)$
4.	$f(x, y, z) = x^4 - 16yz$	9.	$f(x, y, z) = \ln^3(xy^2z^3)$
5.	$f(x, y, z) = x^2e^y \ln z$	10.	$f(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2 - z^2)e^{-xyz}$

(2) Verifique que $z_{xy} = z_{yx}$

1. $z = x^2 - 4xy + 3y^2$	6. $z = (x^3 - y^3)^{10}$
2. $z = 2x^3 + 5xy^2 - 6y^2 + xy^4$	7. $z = e^{-3x}\cos y$
3. $z = x^2 e^{-y^2}$	8. $z = (x+y)\sec xy$
4. $z = xye^{-xy}$	9. $z = x^2 \cos \dfrac{1}{y^2}$
5. $z = \ln(x+y)$	10. $z = \sin xy + \arctan xy$

(3) Sea $z = e^{x+y}$. Demuestre que al derivar m veces con respecto a x, y n veces con respecto a y se obtiene.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}(x,y) = e^{x+y}$$

(4) Demuestre que $u = u(x,y,t) = e^{-(m^2+n^2)kt}\sin mx \cos ny$ para $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$. Satisfacen la ecuación del calor bidimensional para un plano aislado.

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) \tag{20}$$

(5) Una cuerda se ha estirado a lo largo del eje x, fija en cada extremo y después se ha puesto a vibrar. Se demuestra que la ecuación que describe esta situación es la conocida ecuación de onda unidimensional.

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} \tag{21}$$

Donde a depende de la densidad y tensión de la cuerda

Demuestre que las siguientes funciones satisfacen (21):

- $y = \sin(x + at)$
- $y = \sin kx \cos akt$ (k constante)

(6) La función temperatura en estado estacionario $u = u(x,y)$, de una placa plana delgada satisface la ecuación de Laplace.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{22}$$

Demuestre que las siguientes funciones satisfacen (22).

- $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
- $u = \arctan(\dfrac{y}{x})$
- $u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
- $u = e^{-x}\sin y$

4.6. Regla de la Cadena.

(1) Sean $u = f(x)$ e $y = g(u)$, funciones tales que:

- f y g son componibles, es decir $y = g \circ f(x)$ esta bien definida.
- f y g son derivables.

Entonces sabemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} y' & = & (g \circ f)'(x) \\ \\ & = & g'(f(x))f'(x) \\ \\ & = & g'(u)u' \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

(2) **Regla de la cadena para dos variables.**

Supongamos que $z = f(x, y)$ y que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ entonces $z = f(x(u, v), y(u, v))$ también es una función de las variables u y v. En este caso tenemos que:

- $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$

(3) **Relación entre** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$

Si $z = f(x, y)$ y $x = x(t)$ e $y = y(t)$ entonces $z = f(x(t), y(t))$ también es una función de la variable t. En este caso aplicando la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

(4) Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables y sea $f(x, y) = c$, donde c es una constante real, aplicando la regla de la cadena en este caso particular obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial c}{\partial x} & = & \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} \\ \\ 0 & = & \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\, y' \\ & \Downarrow & \\ y' & = & -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \end{array}$$

(5) **Regla de la cadena para tres variables.**

Supongamos que $t = f(x, y, z)$ y que $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, y $z = (u, v, w)$ entonces $t = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ también es una función de las variables u, v y w. En este caso tenemos que:

- $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial w} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial wr} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial w}$

(6) **Relación entre** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$

Si $t = f(x, y, z)$ y $x = x(s)$, $y = y(s)$ y $z = z(s)$ entonces $z = f(x(s), y(s), z(s))$ también es una función de la variable s. En este caso aplicando la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \Longrightarrow \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

(7) Sea $t = f(x, y, z)$ una función de tres variables y sea $f(x, y, z) = c$, donde c es una constante real, aplicando la regla de la cadena, y asumiendo que $y = y(x)$ obtenemos.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\
0 &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,y' \\
&\Downarrow \\
y' &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}
\end{aligned}$$

Análogamente, si $z = z(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\
0 &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\,z' \\
&\Downarrow \\
z' &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}
\end{aligned}$$

4.7. Ejercicios Resueltos.

✓ Si $z = f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$; $x = u^2$; $y = \sqrt{u} + 3u$ entonces podemos calcular $\dfrac{\partial z}{\partial u}$

En efecto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= \underbrace{(-2xe^{-x^2-y^2})}_{\frac{\partial z}{\partial x}} \cdot \underbrace{(2u)}_{\frac{\partial x}{\partial u}} + \underbrace{(-2ye^{-x^2-y^2})}_{\frac{\partial z}{\partial y}} \cdot \underbrace{(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} + 3)}_{\frac{\partial y}{\partial u}}
\end{aligned}$$

✓ Suponga que $w = f(u, v)$, donde $u = x + y$ e $v = x - y$. Demuestre que

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 \tag{23}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial w}{\partial u}(1) + \frac{\partial w}{\partial v}(1) \\
&= \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}
\end{aligned}$$

Así que,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \tag{24}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{\partial w}{\partial u}(1) + \frac{\partial w}{\partial v}(-1) \\
&= \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}
\end{aligned}$$

Así que,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \tag{25}$$

Finalmente;

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) &= \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{(24)}\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{(25)}\\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\end{aligned}$$

Lo que prueba (23)

4.8. Ejercicios Propuestos.

(1) En los siguientes ejercicios encuentre $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial t}$.

- $w=\ln(x^2+y^2)$; $x=s-t$; $y=s^2-t^3$.
- $w=\cos(xy^2)$; $x=3s^3-t^2$; $y=s$.
- $w=e^{x^2+y}$; $x=t+2$; $y=s-t$.

(2) En los siguientes ejercicios determine $\dfrac{dy}{dx}=y'$

- $\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{x}{x+y}=1$
- $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=x^3+4$
- $x^3y^4+e^{x-y}x^2+\sin(xy)=6$

(3) Suponga que $w=f(x,y)$; $x=r\cos\theta$; $y=r\sin\theta$. Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

(4) Suponga que $w=f(u)$ y que $u=x+y$. Demuestre que $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial y}$

(5) Suponga que $w=f(x,y)$; $x=e^u\cos v$;$y=e^u\sin v$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=e^{-2u}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right]$$

(6) Si $w = f(x, y)$ y existe una constante "a", tal que $x = u\cos a - v\sin a$; $y = u\sin a + v\cos a$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

(7) Si $w = f(u)$ y $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Demuestre que $xw_x + yw_y = 0$

5. Máximos y Mínimos

5.1. Motivación. Recordemos que si $y = f(x)$ es una función tal que sus derivadas existen y si $f'(x_0) = 0$ entonces x_0 es un valor crítico y $P = (x_0, f(x_0)$ es un punto crítico. Más aún tenemos el criterio de la primera y el de la segunda derivada para decidir si ese punto crítico es un máximo o un mínimo. Es decir:

(1) Si $f'(x_0) = 0$ entonces usando el criterio de la primera derivada, tenemos los casos:

	$-\infty$ $\quad$ x_0	x_0 $\quad$ ∞
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Figura 12 $\quad x_0$ máximo

	$-\infty$ $\quad$ x_0	x_0 $\quad$ ∞
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Figura 13 $\quad x_0$ mínimo

(2) Usando el criterio de la segunda derivada tenemos:

(i) Si $f''(x_0 < 0$ entonces x_0 es un valor máximo
(ii) Si $f''(x_0 > 0$ entonces x_0 es un valor mínimo
(iii) Si $f''(x_0 = 0$ entonces no hay información

5.2. Máximos y Mínimos en dos Variables.

Definición 5.2.1. *Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables y sea $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.*

(i) *P es un punto máximo (máximo global) en $R \subset \mathbb{R}^2$ si $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ $(\forall (x,y); (x,y) \in R)$*

(ii) *P punto mínimo (global) en $R \subset \mathbb{R}^2$ si $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ $(\forall (x,y); (x,y) \in R)$*

(iii) *P es un punto máximo relativo, si existe un disco D centrado en P tal que $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ $(\forall (x,y); (x,y) \in D)$*

(iv) *P es un punto mínimo relativo, si existe un disco D centrado en P tal que $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ $(\forall (x,y); (x,y) \in D)$*

Definición 5.2.2. *Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables tal que sus derivadas parciales existen. El punto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se dice un punto crítico de f si*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \tag{26}$$

Ejemplo 5.2.3. *Sea $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{xy}$ $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces para determinar sus valores críticos debemos calcular sus derivadas, si es que existen.*

$$\left.\begin{array}{lcccrcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 & \Longleftrightarrow & 1 - \dfrac{1}{x^2y} & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 & \Longleftrightarrow & 1 - \dfrac{1}{xy^2} & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 - \frac{1}{x^2y} = 1 - \frac{1}{xy^2}$$

Luego,

$$\frac{1}{x^2y} = \frac{1}{xy^2} \Longrightarrow xy^2 = x^2y \Longrightarrow x = y \qquad (\text{ pues, } x \text{ e } y \text{ no nulas})$$

Finalmente sustituyendo tenemos que $1 - \dfrac{1}{x^3} = 0$, es decir $x^3 = 1$.
Pero como, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, entonces la única solución real es $x = 1$ y el punto crítico es $P = (1,1,f(1,1)) = (1,1,3)$

Teorema 5.2.4. **Criterio de la segunda derivada**

Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto crítico de la función $z = f(x,y)$. Supongamos que:

- *Las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ son continuas en un disco centrado en P*

- $D(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right]^2$

(i) *Si* $D > 0$ *y* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ *entonces* f *posee un mínimo relativo en* P

(ii) *Si* $D > 0$ *y* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ *entonces* f *posee un máximo relativo en* P

(iii) *Si* $D < 0$ *entonces* f *no posee ni máximo relativo ni mínimo relativo en* P. *Un tal punto* P *se llama punto silla*

Ejemplo 5.2.5. *En ejemplo (5.2.3), tenemos que:*

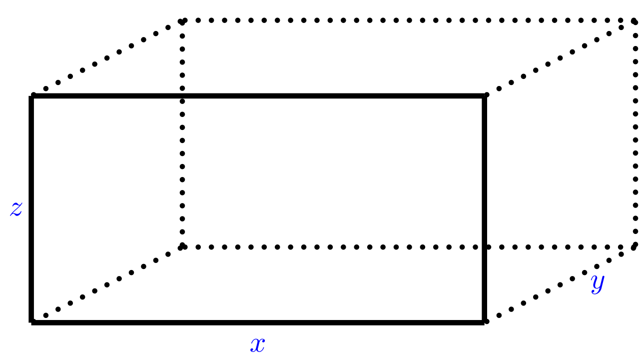
$$\left.\begin{array}{lcl}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2}{x^3 y} & \Longrightarrow & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2}{x y^3} & \Longrightarrow & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 2 \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x^2 y^2} & \Longrightarrow & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1
\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} D(1,1) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0 \\ \wedge \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 > 0 \end{cases}$$

Así que, $P = (1, 1, 3)$ *es un mínimo relativo de* f

Ejemplo 5.2.6. *Supongamos que debemos determinar las dimensiones de una caja rectangular abierta de volumen 1, de la menor área superficial posible.*

Solución.

Etapa 1. Planteamiento del problema.



Caja pedida

Etapa 2. Sean $x, y, z,$ *las medidas de la caja pedida.*

Etapa 3. Análisis de datos.

- *Construimos la función que modela la superficie que debemos minimizar, en este caso esta es,* $A(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$.
- *Tenemos otro dato, aunque que en realidad es una "restricción", pues debe tener un volumen de 1; es decir tenemos que:* $V(x,y,z) = xyz = 1$

Etapa 4. Uso de los datos.

La función A se transforma en una de dos variables sustituyendo z, por $\dfrac{1}{xy}$, *es decir:*

$$\begin{aligned} A(x,y) &= xy + \frac{2x}{xy} + \frac{2y}{xy} \\ &= xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Ahora

$$\left.\begin{aligned} A_x(x,y) &= y - \frac{2}{x^2} \\ A_y(x,y) &= x - \frac{2}{y^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} y - \frac{2}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{2}{y^2} &= 0 \end{aligned}\right| \Longrightarrow x^2y = xy^2 \Longrightarrow x = y = \sqrt[3]{2}$$

Así que, $P = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ *es un punto crítico.*

Etapa 5. Verificamos el tipo de punto crítico.

$$\left.\begin{aligned} A_{xx}(x,y) &= \frac{4}{x^3} \\ A_{yy}(x,y) &= \frac{4}{y^3} \\ A_{xy}(x,y) &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta(x,y) = \dfrac{16}{x^3y^3} - 1 \Longrightarrow \Delta(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = \dfrac{16}{4} - 1 = 3 > 0 \\ A_{xx}(x,y) = \dfrac{4}{x^3} \Longrightarrow A(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = \dfrac{4}{2} = 2 > 0 \end{cases}$$

Por tanto P es un mínimo.

5.3. Ejercicios propuestos.

(1) Determine máximos y mínimos de las funciones:

$$
\begin{array}{lrcl}
1. & f(x,y) & = & x^2+3xy+y^2 \\
2. & f(x,y) & = & x^2-y^2 \\
3. & f(x,y) & = & x^2-2xy+2y^2+4x \\
4. & f(x,y) & = & x^4+8x^2+y^2-4y \\
5. & f(x,y) & = & x^2-xy+y^2 \\
6. & f(x,y) & = & x^2+2xy+2y^2+4x \\
7. & f(x,y) & = & 2x`2+2xy+5y^2+4x \\
8. & f(x,y) & = & -4x^2-xy-3y^2 \\
9. & f(x,y) & = & \dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y}+xy \\
10. & f(x,y) & = & x^3-y^3+3xy \\
11. & f(x,y) & = & 12xy-x^3-y^3 \\
12. & f(x,y) & = & 3xy-x^3-y^3 \\
13. & f(x,y) & = & 6xy-x^2y-xy^2 \\
14. & f(x,y) & = & x+y+\dfrac{8}{xy}
\end{array}
$$

(2) Determine las dimensiones de una caja rectangular abierta de volumen 8, de la menor área superficial posible.

(3) Determine las dimensiones de una caja rectangular del mayor volumen posible, si su área superficial es de 12 metros cuadrados.

6. Multiplicadores de Lagrange para dos y tres variables

6.1. Motivación.

Si $z = f(x,y,z)$ es una función de 3 variables entonces hasta ahora no hemos desarrollado un método para determinar valores máximos y mínimos para la función f sin embargo podemos reducir el problema como sigue:

Supongamos que debemos determinar las dimensiones de una caja rectangular abierta de volumen 1, de la menor área superficial posible. Como en el ejemplo (5.2.6)

Solución.

Sabemos que $A(x,y,z) = xy+2xz+2yz$ y que $V(x,y,z) = xyz = 1$, así que los valores críticos deben cumplir con la restricción $xyz-1 = 0$.

Consideremos la nueva función $F(x,y,z,\lambda) = \underbrace{xy+2xz+2yz}_{A(x,y,z)} - \lambda\underbrace{(xyz-1)}_{\text{restricción}}$ entonces

$$
\begin{array}{rcl}
F_x(x,y) & = & y+2z-\lambda yz \\
F_y(x,y) & = & x+2z-\lambda xz \\
F_z(x,y) & = & 2x+2y-\lambda xy \\
F_\lambda(x,y) & = & xyz-1
\end{array}
$$

Igualando a cero para buscar puntos críticos tenemos que:

$$\left.\begin{array}{lcl} y+2z-\lambda yz & = & 0\ (1)\\ x+2z-\lambda xz & = & 0\ (2)\\ 2x+2y-\lambda xy & = & 0\ (3)\\ xyz-1 & = & 0\ (4)\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} (y-x)-\lambda z(y-x) & = & 0\\ 2x+2y-\lambda xy & = & 0\\ xyz-1 & = & 0\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} (y-x)(1-\lambda z) & = & 0\\ 2x+2y-\lambda xy & = & 0\\ xyz-1 & = & 0\end{array}\right|$$

Luego, $(y-x)(1-\lambda z)=0 \Longrightarrow y=x \vee \lambda z=1$

Caso 1. $x \neq y$

Si $\lambda z = 1$ entonces $\lambda = xy$ y sustituyendo en (1) tenemos que $2z=0$, lo que no puede ser, por tanto nos queda el

Caso 2. $x=y$.

Sustituyendo en (3) tenemos que $4x-\lambda x^2=0$, de donde sigue que $x(4-\lambda x)=0$, y entonces por que $x\neq 0$ debe ser que $\lambda x=4$. Sustituyendo esta nueva información en (2) tenemos que $z=\dfrac{x}{2}$ y como en (5.2.6) obtenemos que $x^3=2$ o $x=y=\sqrt[3]{2}$

Definición 6.1.1. *Si $z=f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)=0$ es una restricción para la función f entonces llamaremos Función de Lagrange, a la función $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$. A λ se le llama multiplicador de Lagrange.*

6.2. Ejercicios Resueltos.

Usemos el método de los Multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de la función:

$f(x,y) \;=\; 3x+4y-3$ si estos están sujetos a la restricción $(x-1)^2+y^2=25$

Solución:

Etapa 1. Formamos la función de Lagrange.

- La restricción es $(x-1)^2+y^2-25=0$!!!!

- La función de Lagrange es:

$$F(x,y,\lambda)=3x+4y-3+\lambda((x-1)^2+y^2-25) \tag{27}$$

Etapa 2. Calculamos los valores críticos

- Derivamos parcialmente

$$\begin{array}{lcl} F_x & = & 3+2\lambda(x-1)\\ F_y & = & 4+2\lambda y\\ F_\lambda & = & (x-1)^2+y^2-25\end{array}$$

- Igualamos las derivadas a cero y resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 3+2\lambda(x-1) & = & 0 \\ 4+2\lambda y & = & 0 \\ (x-1)^2+y^2-25 & = & 0 \end{array}\right|$$

$\lambda \neq 0$, caso contrario $3 = 0$

Así que de las dos primeras ecuaciones tenemos la conclusión:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\lambda(x-1) & = & -3 \\ 2\lambda y & = & -4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2\lambda(x-1)}{2\lambda y} = \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{(x-1)}{y} = \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{4(x-1)}{3} = y$$

Sustituyendo el valor de y en la última ecuación tenemos que:

$$(x-1)^2+\left(\frac{4(x-1)}{3}\right)^2-25=0 \Longrightarrow (x-1)^2+\frac{16(x-1)^2}{9}=25$$

$$\Longrightarrow \frac{25(x-1)^2}{9} = 25$$

$$\Longrightarrow (x-1)^2 = 9$$

$$\Longrightarrow (x-1) = \pm 3$$

$$\Longrightarrow x = \pm 3 + 1$$

$$\Longrightarrow x = 4\ ;\ x = -2$$

Sustituyendo los valores de x tenemos los valores de y:

$$y = \frac{4(4-1)}{3} = 4\ ;\ y = \frac{4(-2-1)}{3} = -4$$

Luego, los valores críticos son:

$P_1 = (4,4)$ y $P_2 = (-2,-4)$

Finalmente, $f(P_1) = 25$ es un máximo relativo y $f(P_2) = -25$ es un mínimo relativo.

6.3. Ejercicios Propuestos.

Usando el método de los Multiplicadores de Lagrange, determine los puntos críticos y clasificarlos según sean máximos o mínimos.

(1) $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$, sujeta a la restricción $x^2 + y^2 - 4y = 0$

(2) $f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$, sujeta a la restricción $x^2 + y^2 - 2y = 0$

(3) $f(x,y) = x^2 + y$, sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 9$

(4) $f(x,y) = x^2y$, sujeta a la restricción $x^2 + 8y^2 = 24$

(5) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a la restricción $3x - 2y + z - 4 = 0$

(6) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a la restricción $y^2 - x^{=}1$

(7) $f(x,y,z) = xyz$, sujeta a la restricción $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$

Contents

1. Introducción 1
2. Funciones de varias variables 3
3. Límites 7
4. Derivadas Parciales 9
5. Máximos y Mínimos 23
6. Multiplicadores de Lagrange para dos y tres variables 27

Bibliography 33

Bibliography

[1] Boldrini D, "Algebra Linear"

[2] Grossman, S. Álgebra lineal, Mc Graw Hill 1997.

[3] Gustafson, R. " Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[4] Hofmman K. and Kunze R., "Algebra Lineal"

[5] Kolman, B. Álgebra lineal con Aplicaciones y Matlab, Prentice Hall 1999.

[6] Nakos, G. Álgebra Lineal con Aplicaciones, Brooks/Cole Publishing Company 1998

[7] Santander R., Algebra Lineal, Universidad de Santiago de chile 2001.

[8] Santander R., Un Segundo curso de Algebra Lineal, Universidad de Santiago de chile 1996.