Guía de algunas Aplicaciones de la Derivada

1. Recta Tangente y Normal

1.1. Definiciones Básicas. Recordemos que :

La ecuación de la recta **tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (x_0, y_0)$ es de la forma:

(1) $$tg: \qquad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Y su gráfico es de la forma:

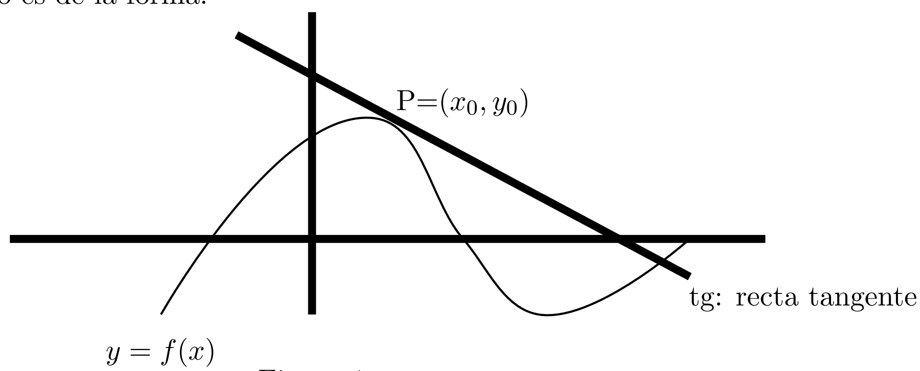


Figura 1

La ecuación de la recta **normal** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (x_0, y_0)$ es de la forma:

(2) $$tg: \qquad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad \text{(si)} f'(x_0) \neq 0$$

Y su gráfico es de la forma:

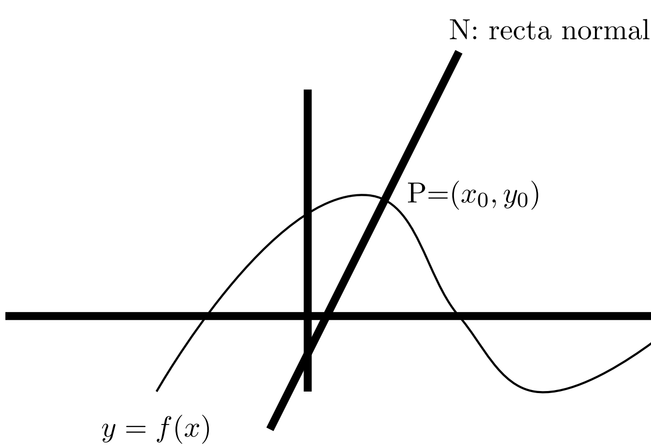


Figura 2

Finalmente, la situación general es:

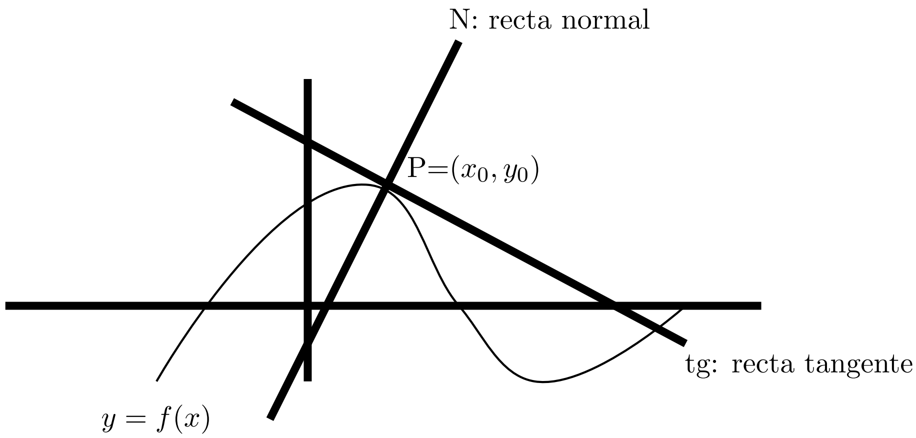


Figura 3

2. Ejercicios Resueltos

(1) Determine la ecuación de la recta tangente y normal a la curva, $y = x^3 - 4x$ en $x_0 = 1$

Solución

Etapa 1. Planteamiento

Sea tg la recta tangente.

(3) $$tg: \qquad y - y_0 = f'(1)(x-1)$$

Y la normal

(4) $$N: \qquad y - y_0 = -\frac{1}{f'(1)}(x-1)$$

Etapa 2. datos

- $y_0 = f(1) = -3$
- $f'(x) = 3x^2 - 4$
- $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 = -1$

Finalmente las ecuaciones pedidos son:

(5) $$tg: \qquad y + 3 = -1(x-1) \Longleftrightarrow y + x - 2 = 0$$

(6) $$N: \qquad y+3 = -\frac{1}{-1}(x-1) \Longleftrightarrow y-x+4=0$$

(2) Si $y = x^2 - 2x + 1$, determine los puntos donde la recta tangente es horizontal.

Solución

Etapa 1. Planteamiento del problema.

Sea tg la recta tangente

(7) $$tg: \qquad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Etapa 2. datos

tg es horizontal si y sólo si $f'(x) = 0$, así que partimos calculando la derivada:

- $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' \Longrightarrow f'(x) = 2x - 2$
- $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

Luego, $x_0 = 1$ e $y_0 = f(1) = 0$, así que el punto pedido es $P = (1, 0)$ y

Por tanto la recta pedida es:

(8) $$tg: \qquad y - 0 = 0 \cdot (x-1) \Longleftrightarrow y = 0 \qquad \text{es decir, el eje } x$$

La situación geométrica es:

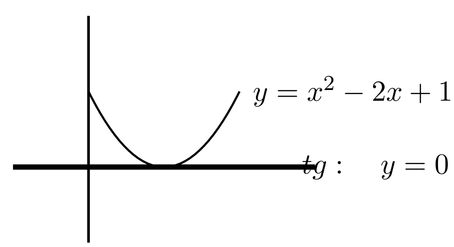


Figura 4

3. Ejercicios Propuestos

(1) Determine la ecuación de la recta tangente y normal en las situaciones que se piden.

(a) $f(x) = x^3 - 9x$ en el punto $x_0 = 2$

(b) $f(x) = 25x - x^3$ en el punto $x_0 = 2$

(c) $y = x^4 - x^3 - 2$ en $x_0 = 1$

(d) $y = x^5 - x^2 - 3$ en $x_0 = -1$

(2) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2$ y que es paralela a la recta $L:\ 2x - 3y - 1 = 0$

(3) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x + 6$ y que es paralela a la recta $L:\ 2x + 3y + 7 = 0$

(4) Determine el o los puntos en que la recta tangente a la curva $y = x - \left(\frac{x}{10}\right)^2$ es horizontal

(5) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x + 6$ y que es perpendicular a la recta $L:\ 2x + 3y + 7 = 0$

(6) Determine la ecuación de las dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ y que además pasan por el punto $P = (3, 4)$

(7) Demuestre que la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P = (x_0, y_0)$, interseca al eje x en el punto $Q = \left(\frac{x}{2}, 0\right)$

4. Máximos y Mínimos

Recordemos que si $y = f(x)$ es una función tal que sus derivadas existen (por ejemplo una función polinomial) entonces

(1) Si $f'(x_0) = 0$ entonces x_0 es un valor crítico y $P = (x_0, f(x_0)$ es un punto crítico. Más aún en este caso tenemos el criterio de la primera, y el de la segunda derivada para decidir si ese punto crítico (supongamos que es el único) es un máximo o un mínimo. Es decir:

(a) Si $f'(x_0) = 0$ entonces usando el criterio de la primera derivada, tenemos los casos:

	$-\infty$ … x_0	x_0 … ∞
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Figura 5 $\quad x_0$ máximo

	$-\infty$	x_0	∞
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

Figura 6 x_0 mínimo

(b) Usando el criterio de la segunda derivada tenemos:

(i) Si $f''(x_0 < 0$ entonces x_0 es un valor máximo
(ii) Si $f''(x_0 > 0$ entonces x_0 es un valor mínimo
(iii) Si $f''(x_0 = 0$ entonces no hay información

(2) Si $f''(x_1) = 0$ entonces $(x_1, f(x_1))$ es un candidato a punto de inflexión, y en este caso procedemos a estudiar el comportamiento de la concavidad del gráfico de la función f entorno al valor x_1.

	$-\infty$	x_1	∞
$f'(x)$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	

Figura 7 x_0 inflexión

4.1. **Ejercicios Resueltos.**

Ejemplo 4.1.1. *Bosquejemos la gráfica de la función* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

solución

(1) *Determinemos* $f'(x)$*:*

$$\boxed{f'(x) = 6x^2 - 6x - 12} \tag{9}$$

(a) *Determinemos los valores críticos:*

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 6x^2 - 6x - 12 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad x = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \quad ó \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Así que los valores críticos son: $V.C = \{-1, 2\}$*, y como* $f(-1) = 7$ *y* $f(2) = -20$ *entonces los puntos críticos son:* $P = (-1, 7)$ *y Q=(2,-20).*

(b) *Estudiamos " el signo de f'(x)"*

	$-\infty$ -1	-1 2	2 ∞
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Figura 8 $\quad -1$ máximo y 2 mínimo

Luego tenemos que:

(i) *Puntos críticos=*$\{(-1, 7), (2, -20)\}$

(ii) *Respecto del crecimiento y decrecimiento tenemos:*

$$
\begin{array}{ll}
(-\infty, -1) & f \nearrow \\
(-1, 2) & f \searrow \\
(2, \infty) & f \nearrow
\end{array}
$$

(iii) *Respecto de los puntos extremos tenemos:*

$$
\begin{aligned}
(P) &= (-1, 7) \text{ es un máximo local} \\
(Q) &= (2, -20) \text{ es un mínimo local}
\end{aligned}
$$

(2) *Determinemos* $f''(x)$:

$$\boxed{f''(x) \quad = \quad 12x - 6} \tag{10}$$

(a) *Determinamos los candidatos a puntos de inflexión:*

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 12x - 6 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así que el candidato a punto de inflexión es $Q=(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$.

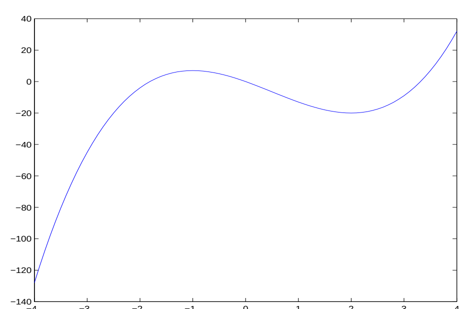
(b) *Estudiamos el "signo de $f''(x)$"*

	$-\infty$	0.5	∞
$f''(x)$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	

Figura 9 $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$ inflexión

Luego el punto $I = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$ *es un punto de inflexión*

(3) *Para un bosquejo del gráfico tenemos:*



4.2. **Ejercicios Propuestos.** Determine

(i) Puntos críticos

(ii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

(iii) Puntos Máximos y Mínimos locales

(iv) Intervalos de concavidad

(v) Bosquejo del gráfico

De las siguientes funciones:

(1) $f(x) = (x-1)^3$

(2) $f(x) = x^3 - 1$

(3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

(4) $f(x) = 3x^4 + x^3$

(5) $f(x) = x^3 - 3^2 + 3x$

(6) $f(x) = x^4 - 4x + 3$

(7) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2$

(8) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(9) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(10) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

(11) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

BUEN TRABAJO !!!