Contenidos

CAPITULO 1

Series de Fourier

1. Funciones Seccionalmente Continuas

1.1. Preliminares sobre funciones continuas.

Consideremos el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{C}[a,b] = \{f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función continua}\}$. Sabemos que

$$f \in \mathbb{C}[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Y del teorema fundamental del Cálculo tenemos que

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \Longleftrightarrow F'(x) = f(x) \tag{2}$$

Además tenemos las propiedades:

(1) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x))\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \qquad (a \leq c \leq b)$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x))\, dx = -\int_b^a f(x))\, dx$

(5) $\displaystyle\int_a^a f(x))\, dx = 0$

Ejemplo 1.1.1.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = 0 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$

En efecto

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{0} \sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,dx \\
&= \left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{n}[\cos(0)-\cos(-n\pi)]\right) + \left(-\frac{1}{n}[\cos(n\pi)-\cos(0)]\right) \\
&= \frac{1}{n}(\cos(-n\pi)-\cos(0)+\cos(0)-\cos(n\pi)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Geométricamente, para $n=1$, significa lo siguiente:

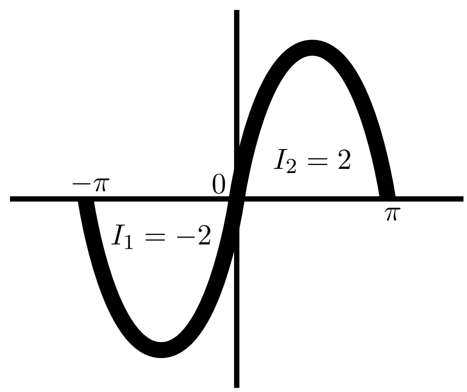


Figura 1 $\quad y=\sin(x)$ y $I_1 = \int_{-\pi}^{0} \sin(x)\,dx$ y $I_2 = \int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0 \qquad (\forall n : n \in \mathbb{N})$

En efecto

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{0} \cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\,dx \\
&= \left(\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \left(\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n}[\sin(0)-\sin(-n\pi)] + \frac{1}{n}[\sin(n\pi)-\sin(0)] \\
&= \frac{1}{n}\,[\sin(0)-\sin(-n\pi)+\sin(n\pi)-\sin(0)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Geométricamente, para $n = 1$, significa lo siguiente:

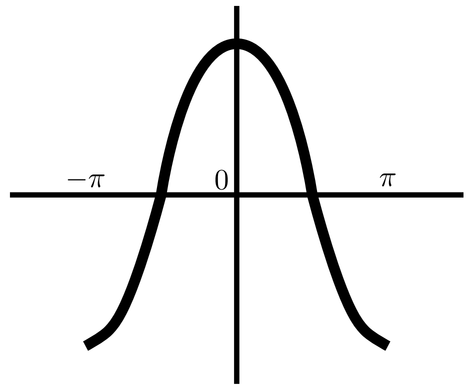


Figura 2 $\quad y = \cos(x)$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0 \qquad (\forall n : n \in \mathbb{N}); (\forall m : m \in \mathbb{N}); (n \neq m)$

En efecto

$$
\begin{array}{rcl}
\cos(nx+mx) & = & \cos(nx)\cos(mx) - \sin(mx)\sin(nx) \\
\cos(nx-mx) & = & \cos(nx)\cos(mx) + \sin(mx)\sin(nx) \\
 & \Downarrow & \\
\sin(nx)\sin(mx) & = & \dfrac{1}{2}[\cos(nx-mx) - \cos(nx+mx)]
\end{array}
$$

Luego,

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nx-mx) - \cos(nx+mx)]\,dx \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\underbrace{(n-m)}_{\in \mathbb{Z}} x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\underbrace{(n+m)}_{\in \mathbb{Z}} x\,dx \\
 & \overset{1.1.1(2)}{=} & 0
\end{array}
$$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \qquad (\forall n : n \in \mathbb{N}); (\forall m : m \in \mathbb{N})$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} \sin(nx+mx) & = & \sin(nx)\cos(mx)+\sin(mx)\cos(nx)\\ \sin(nx-mx) & = & \sin(nx)\cos(mx)-\sin(mx)\cos(nx)\\ & \Downarrow & \\ \sin(nx)\cos(mx) & = & \dfrac{1}{2}[\sin(nx+mx)+\sin(nx-mx)] \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\;dx & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(nx+mx)+\sin(nx-mx)]\;dx\\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\underbrace{(n+m)}_{\in\mathbb{Z}}x\;dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\underbrace{(n-m)}_{\in\mathbb{Z}}x\;dx\\ & \overset{1.1.1(1)}{=} & 0 \end{array}$$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\;dx=0 \qquad (\forall n: n\in\mathbb{N});(\forall m: m\in\mathbb{N});(n\neq m)$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} \cos(nx+mx) & = & \cos(nx)\cos(mx)-\sin(mx)\sin(nx)\\ \cos(nx-mx) & = & \cos(nx)\cos(mx)+\sin(mx)\sin(nx)\\ & \Downarrow & \\ \cos(nx)\cos(mx) & = & \dfrac{1}{2}[\cos(nx+mx)+\cos(nx-mx)] \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\;dx & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(nx+mx)+\cos(nx-mx)]\;dx\\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\underbrace{(n+m)}_{\in\mathbb{Z}}x\;dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\underbrace{(n-m)}_{\in\mathbb{Z}}x\;dx\\ & \overset{1.1.1(2)}{=} & 0 \end{array}$$

(6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\;dx=\pi \qquad (\forall n: n\in\mathbb{N})$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\sin^2(nx) &= \frac{1}{2}(1-\cos(2nx)) \\
&\Downarrow \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(2nx))\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2nx)\ dx \\
&\overset{1.1.1(2)}{=} \frac{1}{2}(2\pi) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

(7) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = \pi \qquad (\forall n : n \in \mathbb{N})$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\cos^2(nx) &= \frac{1}{2}(1+\cos(2nx)) \\
&\Downarrow \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(2nx))\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2nx)\ dx \\
&\overset{1.1.1(2)}{=} \frac{1}{2}(2\pi) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

Conclusión 1.1.2.

- En el $\mathbb{R}$ espacio vectorial5 $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ y debido a las propiedades de la integral tenemos que:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx \quad \wedge \quad \|f\|^2 = \langle f,f\rangle \tag{3}$$

  $\langle,\rangle$, es un producto interno y $\|\|$ es la norma inducida por el producto interno .

- Si además notamos

$$\mathbb{T}rigon(x) = \{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \dots\}$$

entonces $\mathbb{T}rigon(x)$ es un conjunto ortogonal respecto del producto interno definido en la fórmula (3).

- Si notamos $\mathbb{W} = \langle \mathbb{T}rigon(x)\rangle$ entonces como siempre $\mathbb{W}$ es un subespacio de dimensión no finita de $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ y debemos tener la proyección ortogonal $\mathbb{P}_{\mathbb{W}}$, y para $f \in \mathbb{C}[-\pi,\pi]$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \qquad (\text{ en media}) \tag{4}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad (k = 0,1,2,3\dots) \tag{5}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad (k = 1,2,3\dots) \tag{6}$$

Y en media significa que

$$\left\langle f(x) - \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), f(x) - \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\right\rangle \longrightarrow 0$$

Definición 1.1.3.

A (4) la llamaremos la **Representación en Serie de Fourier de la función** f

Ejemplo 1.1.4.

(1) Sea $f(x) = x$ entonces aplicando (5) y (7) tenemos:

- Para a_0.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\;dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Para a_k, $\quad (k \geq 1)$

$$\left.\begin{aligned} u = x \quad &: \quad dv = \cos(kx)dx \\ du = dx \quad &: \quad v = \frac{1}{k}\sin(kx) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\left.\frac{x}{k}\;\sin(kx)\right|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} sin(kx)\;dx}_{0}\right] = 0$$

Luego,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\,dx = 0 \qquad (\forall k; k\in\mathbb{N})$$

- Para b_k, $(k \geq 1)$

$$\left.\begin{array}{rcl} u = x & : & dv = \sin(kx)dx \\ du = dx & : & v = -\dfrac{1}{k}\cos(kx) \end{array}\right\} \Longrightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\ \cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)\ dx\right]$$

Luego,

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{\pi}{k}\cos(k\pi)\right] \\ &= \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \quad (k\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

Así que:

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \tag{7}$$

Observación 1.1.5.

(a) Sabemos que el gráfico de $y = x$ es del tipo

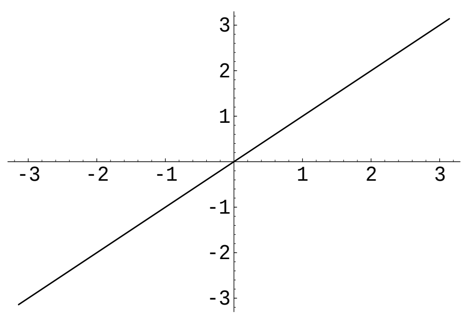
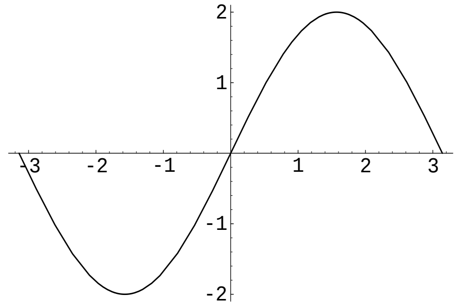


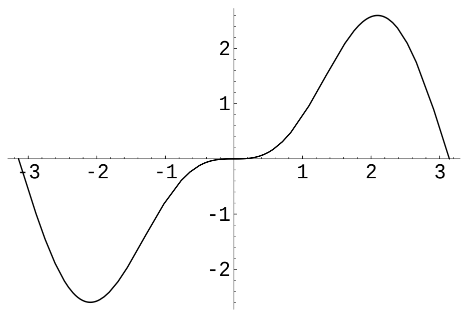
Figura 3 $\quad y = x$

(b) Si $k = 1$ entonces tenemos que su gráfico es del tipo:



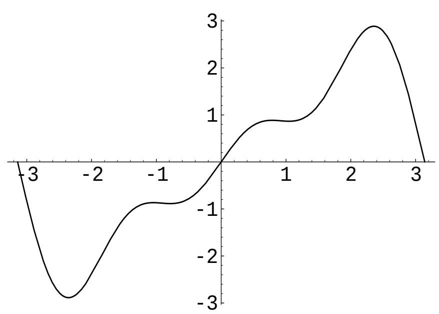
$$\text{Figura 4} \quad y = 2\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

(c) Si $k = 2$ entonces tenemos que su gráfico es del tipo:



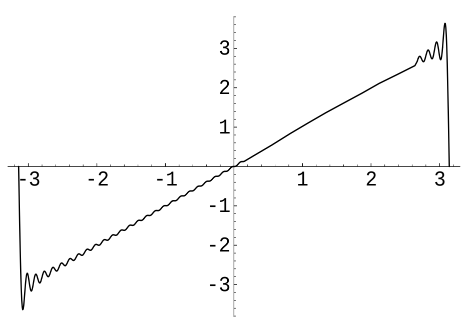
$$\text{Figura 5} \quad y = 2\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

(d) Si $k = 3$ entonces tenemos que su gráfico es del tipo:



$$\text{Figura 6} \quad y = 2\sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

(e) Si $k = 50$ entonces tenemos que su gráfico es del tipo



$$\text{Figura 7} \quad y = 2\sum_{k=1}^{50} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

Luego, podemos concluir que:

✓ La función $f(x) = x$ y la función $g_n(x) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$ son distintas $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

✓ La sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge puntualmente a la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-\pi, pi]$

En efecto

$f(\pi) = \pi$ y $g_\infty(\pi) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(k\pi) = 0$

✓ Sin embargo de la norma inducida por el producto interno, sigue que:

$$\|x - g_\infty(x)\|^2 \quad = \quad \int_{-\pi}^{\pi} (x - g_\infty(x))^2\, dx = 0$$

(2) Sea $f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$ entonces en este caso tenemos que:

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \pi$

- Para $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos kx\, dx$ con $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{lcl} u = x & : & dv = \cos(kx)\, dx \\ & & \\ du = dx & : & v = \dfrac{1}{k}\sin(kx) \end{array}\right\} \Longrightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{k}sin(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)\, dx\right)$$

Luego,

$$a_k = \frac{2}{k^2\pi}(\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k^2\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} \dfrac{-4}{k^2\pi} & : \text{si } k \text{ impar} \\ & \\ 0 & : \text{si } k \text{ par} \end{cases}$$

- Para $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin kx\, dx$ con $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

  ⋄ $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0} -x\sin kx\, dx + \dfrac{1}{\pi}\int^{\pi} x\sin kx\, dx$

  ⋄ aplicando el método de integración por partes tenemos que:

$$\begin{array}{lcl} u = -x & : & dv = \sin(kx)\, dx \\ du = -dx & : & v = -\dfrac{1}{k}\cos(kx) \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{lcl} u = x & : & dv = \sin(kx)\, dx \\ du = dx & : & v = -\dfrac{1}{k}\cos(kx) \end{array}$$

Así que;

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{k}cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} - \underbrace{\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\cos(kx)\,dx}_{0} - \frac{x}{k}cos(kx)\Big|_{0}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\cos(kx)\,dx}_{0}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{k}cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{x}{k}cos(kx)\Big|_{0}^{\pi}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}cos(k\pi) - \frac{\pi}{k}cos(k\pi)\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

- Finalmente;

(8)
$$
|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{k^2}
$$

Observación 1.1.6.

(a) Sabemos que el gráfico de $y = |x|$ es del tipo

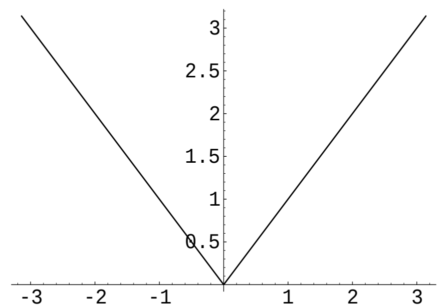


Figura 8 $\quad y = |x|$

(b) Si $k = 1$ entonces tenemos que su gráfico es del tipo:

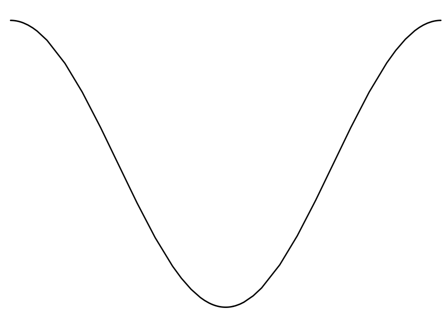


Figura 9 $\quad y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

(c) Si $k = 2$ entonces tenemos que su gráfico es del tipo:

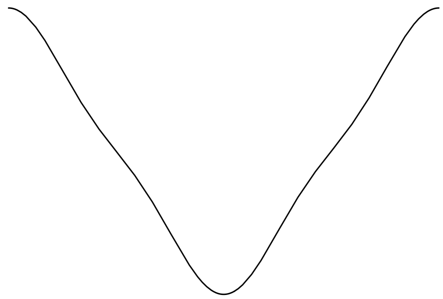


Figura 10 $\quad y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

(d) Si $k = 3$ entonces tenemos que su gráfico es del tipo:

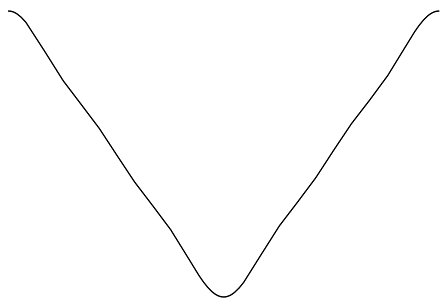


Figura 11 $\quad y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

(e) Si $k = 50$ entonces tenemos que su gráfico es del tipo

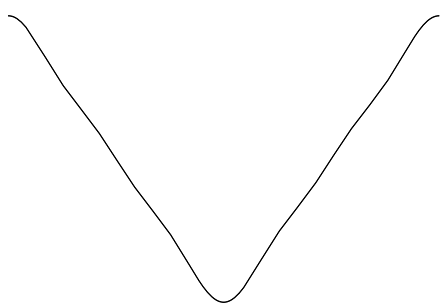


Figura 12 $\quad y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{50} \dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

1.2. Funciones Pares e Impares.

Antes de verificar las propiedades intrínsecas de la representación en serie de una función, como la formulada en (4), es razonable observar que el mayor tiempo de cálculo, (cosa relativa; pues basta usar una máquina adecuada para calcular...) es empleado en la resolución de las integrales, pero estas poseen propiedades que agilizan su resolución cuando los integrandos, ósea en este caso las funciones, poseen lo que podemos tildar de "buenas propiedades." Entre otras podemos considerar las siguientes:

Definición 1.2.1.

Sea $\mathbb{F}[-a,a] = \{f : [-a,a] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ función}\}$ y $f \in \mathbb{F}[-a,a]$. Diremos que

- f es una función par si $f(-x) = f(x) \quad (\forall x; x \in [-a,a])$
- f es una función impar si $f(-x) = -f(x) \quad (\forall x; x \in [-a,a])$

Ejemplo 1.2.2.

(1) Sea $f(x) = x^n \;\; (n \in \mathbb{N})$ entonces $\begin{cases} f \text{ par} & : \text{Si } n \text{ par} \\ \\ f \text{ impar} & : \text{Si } n \text{ impar} \end{cases}$

En efecto

- Si n par entonces $n = 2s$. Así que

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^{2s} \\ &= ((-x)^2)^s \\ &= (x^2)^s \\ &= x^{2s} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Por ejemplo:

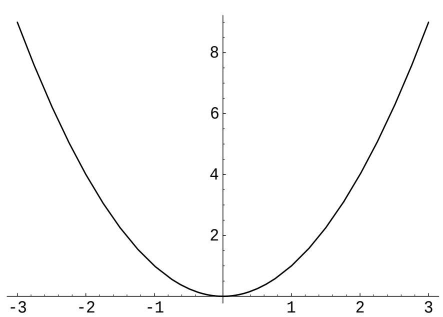


Figura 13 $\quad y = x^2$

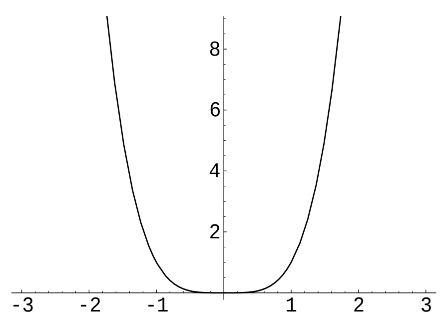


Figura 14 $\quad y = x^4$

- Si n impar entonces $n = 2s + 1$. Así que

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^{2s+1} \\ &= (-x)^{2s}(-x) \\ &= x^{2s}(-x) \\ &= x^{2s}(-1)x \\ &= (-1)x^{2s+1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$ Por ejemplo:

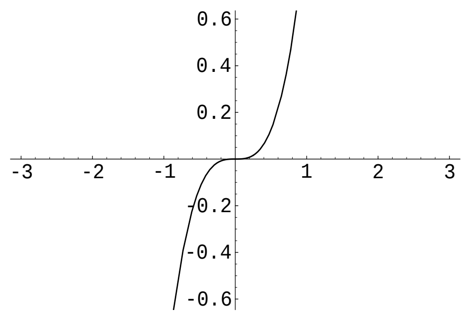


Figura 15 $y = x^3$

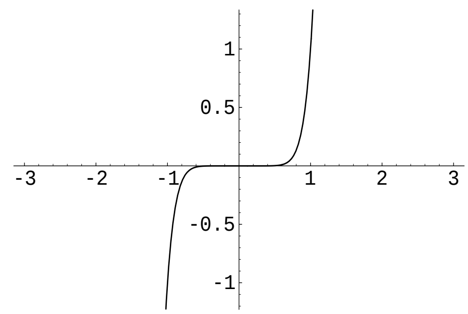


Figura 16 $y = x^9$

(2) $f(x) = \cos x$ es una función par:

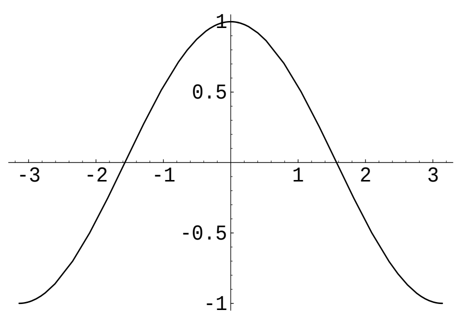


Figura 17 $y = \cos(x)$

(3) $f(x) = \sin x$ es una función impar:

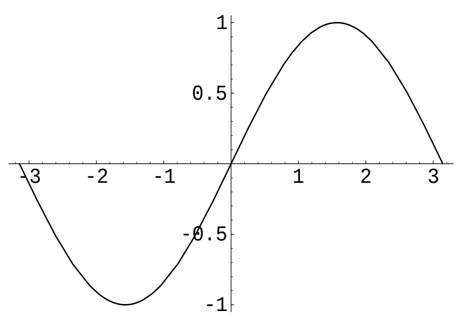


Figura 18 $y = \sin(x)$

Observación 1.2.3.

(1) Supongamos que la función $y = f(x)$ es una función par en el intervalo real $[-a, a]$. Supongamos también que f es integrable en $[-a, a]$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= -\int_{a}^{0} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (\text{ si } u=-x \text{ y } du=-dx) \\
&= -\int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad f(\text{ es par}) \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (\text{ ver las propiedades de la integral definida}) \\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

(2) Supongamos que la función $y = f(x)$ es una función impar en el intervalo real $[-a, a]$. Supongamos también que f es integrable en $[-a, a]$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= -\int_{a}^{0} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (\text{ si } u=-x \text{ y } du=-dx) \\
&= -\int_{a}^{0} -f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad f(\text{ es impar}) \\
&= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (\text{ ver las propiedades de la integral definida}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(3) Sea $f \in \mathbb{F}[-a, a]$ entonces

$$\begin{aligned}
2f(x) &= f(x)+f(-x)-f(-x)+f(x) \\
&= f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)
\end{aligned} \Longrightarrow f(x) = \overbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}^{f_p} + \overbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}^{f_i} \qquad (*)$$

La relación descrita en $(*)$ muestra que toda función $f \in \mathbb{F}[-a, a]$ se descompone en una suma de funciones, donde una es par y otra es impar.

En efecto,

$$\left.\begin{aligned}
f_p(-x) &= \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} \\
&= \frac{f(-x)+f(x)}{2} \\
&= f(x)
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow f_p \text{ es una función par}$$

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{rcl} f_i(-x) & = & \dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2} \\ & = & \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} \\ & = & -f_i(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_i \text{ es una función impar}$$

Si notamos

(9) $$\mathbb{F}_p[-a,a] = \{f : [-a,a] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ función par}\}$$

(10) $$\mathbb{F}_i[-a,a] = \{f : [-a,a] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ función impar}\}$$

entonces

✓ $\mathbb{F}_p[-a,a]$ es un subespacio de $\mathbb{F}[-a,a]$

En efecto

Si tomamos $f \in \mathbb{F}_p[-a,a]$ y $g \in \mathbb{F}_p[-a,a]$ entonces

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(-x) & = & f(-x)+g(-x) \\ & = & f(x)+g(x) \\ & = & (f+g)(x) \end{array}$$

De donde $(f+g) \in \mathbb{F}_p[-a,a]$ y

$$\begin{array}{rcl} (\lambda f)(-x) & = & \lambda f(-x) \\ & = & \lambda f(x) \\ & = & (\lambda f)(x) \end{array}$$

De donde $(\lambda f) \in \mathbb{F}_p[-a,a]$ para $(\lambda \in \mathbb{R})$

✓ $\mathbb{F}_i[-a,a]$ es un subespacio de $\mathbb{F}[-a,a]$

En efecto

Si tomamos $f \in \mathbb{F}_i[-a,a]$ y $g \in \mathbb{F}_i[-a,a]$ entonces

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(-x) & = & f(-x)+g(-x) \\ & = & -f(x)-g(x) \\ & = & -(f+g)(x) \end{array}$$

De donde $(f+g) \in \mathbb{F}_i[-a,a]$ y

$$\begin{aligned}(\lambda f)(-x) &= \lambda f(-x)\\ &= -\lambda f(x)\\ &= -(\lambda f)(x)\end{aligned}$$

De donde $(\lambda f) \in \mathbb{F}_i[-a,a]$ para $(\lambda \in \mathbb{R})$

✓ $\mathbb{F}_p[-a,a] \cap \mathbb{F}_i[-a,a] = \emptyset$

En efecto

$$\begin{aligned}f \in \mathbb{F}_p[-a,a] \cap \mathbb{F}_i[-a,a] &\iff f \in \mathbb{F}_p[-a,a] \wedge f \in \mathbb{F}_i[-a,a]\\ &\iff f(-x) = f(x) \wedge f(-x) = -f(x) \quad (\forall x; x \in [-a,a])\\ &\iff f(x) = -f(x) \quad (\forall x; x \in [-a,a])\\ &\iff f(x) = 0 \quad (\forall x; x \in [-a,a])\\ &\iff f = 0\end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{F}[-a,a] = \mathbb{F}_p[-a,a] \oplus \mathbb{F}_i[-a,a] \tag{11}$$

Conclusión 1.2.4.

Sea $f \in \mathbb{C}[-\pi,\pi]$:

♣ f par entonces $b_k = 0$ y $a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,dx \quad (\forall k; k \in \mathbb{N})$

En efecto

(i) f par y $\sin(kx)$ impar $(\forall k; k \in \mathbb{N})$ entonces $f(x)\sin(kx)$ es impar

(ii) f par y $\cos(kx)$ par $(\forall k; k \in \mathbb{N})$ entonces $f(x)\cos(kx)$ par

♣ f impar entonces $a_k = 0$ y $b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,dx \quad (\forall k; k \in \mathbb{N})$

En efecto

(i) f impar y $\cos(kx)$ par $(\forall k; k \in \mathbb{N})$ entonces $f(x)\cos(kx)$ es impar

(ii) f impar y $\sin(kx)$ impar $(\forall k; k \in \mathbb{N})$ entonces $f(x)\cos(kx)$ par

1.2.5. **Ejercicios Propuestos de Funciones Pares e Impares.**

(1) Determine si cada una de las funciones siguientes es par o impar:

(a) $f(x) = \tan x$

(b) $f(x) = e^{x^2}$

(c) $f(x) = \cos 4x$

(d) $f(x) = \dfrac{x+3}{1-x}$

(e) $f(x) = x^4 + 2x^2$

(f) $f(x) = |x| + x^6$

(2) Sea f una función derivable en el intervalo $[-a, a]$. Demuestre que.

(a) f función par $\Longrightarrow f'$ función impar

(b) f función impar $\Longrightarrow f'$ función par

(3) Sea f una función integrable en el intervalo $[-a, a]$,y define

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \qquad (-a \leq x \leq a)$$

Demuestre que.

(a) f función par $\Longrightarrow F$ función impar

(b) f función impar $\Longrightarrow F$ función par

(4) Descomponer las funciones en suma de una función par y una impar

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{1-x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(c) $f(x) = \dfrac{2}{ax^2+bx+c}$, donde $(a \in \mathbb{R} - 0)$, $(b \in \mathbb{R} - 0)$ y $(c \in \mathbb{R} - 0)$

1.3. Funciones Seccionalmente Continuas. Sea $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es una función seccionalmente si:

- f es continua en el intervalo $[a, b]$, salvo en un número finito de puntos.
- Existen los límites laterales

$$\begin{aligned} f(x_0^+) &= \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad (\forall x_0; x_0 \in [a, b)) \\ f(x_0^-) &= \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad (\forall x_0; x_0 \in (a, b]) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.1.

consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \text{si } -\pi < x < 0 \\ \\ 1 & : \text{si } \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Su gráfico es del tipo

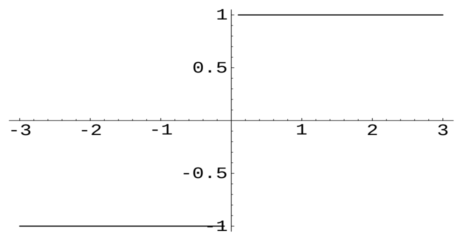


Figura 19

Claramente en este caso,

$$\begin{aligned} f(0^+) &= \ \ 1 \\ f(0^-) &= -1 \end{aligned}$$

Definición 1.3.2.

Si notamos $\mathbb{SC}[a,b] = \{f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ seccionalmente continua}\}$ y si $f \in \mathbb{SC}[a,b]$ entonces la diferencia $S(x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ mide la magnitud del salto de f en x_0.

Observación 1.3.3.

(1) En el ejemplo 1.3.1, $S(0) = 2$

(2) Tenemos la importante equivalencia.

$$f \in \mathbb{C}[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad S(x_0) = 0 \quad (\forall x_0; x_0 \in [a,b])$$

En particular, $\mathbb{C}[a,b] \subset \mathbb{SC}[a,b]$

Observación 1.3.4.

(1) Es claro que $\mathbb{SC}[a,b]$ es un espacio vectorial real con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar para funciones. Así que $\mathbb{C}[a,b]$ es un subespacio de $\mathbb{SC}[a,b]$.

(2) Si $f \in \mathbb{SC}[a,b]$ entonces claramente $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

(3) Sea $n(x) = 0$ salvo en un número finito de puntos de $[a,b]$ entonces $n \in \mathbb{SC}[a,b]$

Por ejemplo,

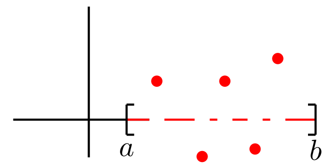


Figura 20 $\quad y = n(x)$

(4) Si $n \in \mathbb{SC}[a,b]$ entonces $n^2 \in \mathbb{SC}[a,b]$, y si n es como encima entonces su gráfico es del tipo

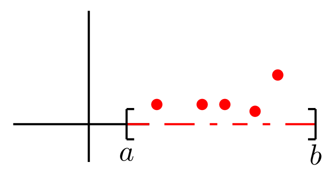


Figura 21 $\quad y = n^2(x)$

(5) Luego $\displaystyle\int_a^b n^2(x)\ dx = 0$. La conclusión de esto es que el producto interno definido en (3), para las funciones continuas no es un producto interno para el espacio $\mathbb{SC}[a,b]$. Porque una "función no nula tiene un cuadrado nulo."

(6) Para "salvar la situación", podemos hacer lo siguiente:

(a) Define para $f \in \mathbb{SC}[a,b]$ y $g \in \mathbb{SC}[a,b]$ la siguiente relación:

$$f \,\Re\, g \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ difiere de } g \text{ en un número finito de puntos} \tag{12}$$

(b) Observen que si (0) representa la función nula, es decir $(0)(x) = 0 \quad (\forall x; x \in [a,b])$ entonces $(0)\,\Re\, n$, donde n es la función que no es nula en un número finito de puntos.

(c) $\Re$ es una relación de equivalencia en $f \in \mathbb{SC}[a,b]$.

En efecto

(i) Como $f - f = (0)$ entonces $f\,\Re\, f$. Así que $\Re$ es una relación reflexiva.

(ii) Si $f \Re g$ entonces $f-g=(0)$ salvo en un número finito de puntos en $[a,b]$ entonces

$$\begin{aligned}
f \Re g &\iff f-g=(0) && \text{salvo en un número finito de puntos}\\
&\Longrightarrow -(f-g)=(0) && \text{salvo en un número finito de puntos}\\
&\Longrightarrow g-f=(0) && \text{salvo en un número finito de puntos}\\
&\Longrightarrow g \Re f
\end{aligned}$$

Luego, $\Re$ es una relación simétrica.

(iii) Supongamos que $f \Re g$ y $g \Re h$ entonces

$$\begin{aligned}
f \Re g &\iff f-g=(0) && \text{salvo en un número finito de puntos}\\
g \Re h &\iff g-h=(0) && \text{salvo en un número finito de puntos}\\
&\iff f-g+g-h=(0) && \text{salvo en un número finito de puntos}\\
&\iff f-h=(0) && \text{salvo en un número finito de puntos}\\
&\Longrightarrow f \Re h
\end{aligned}$$

Luego, $\Re$ es una relación transitiva. Así que $\Re$ es una relación de equivalencia

Entonces tenemos el conjunto clase de equivalencia

$$\overline{f} \;=\; \{g \in \mathbb{SC}[a,b] \mid f \Re g\} \tag{13}$$

Y el conjunto de clases de equivalencia

$$\mathbb{SC}[a,b]\big/_{\Re} \;=\; \{\, \overline{f} \mid f \in \mathbb{SC}\} \tag{14}$$

(d) Supongamos que $f \Re g$ y $h \Re r$ entonces

$$\begin{array}{rcll}
f \Re g & \iff & f-g=(0) & \text{salvo en un número finito de puntos}\\
h \Re r & \iff & h-r=(0) & \text{salvo en un número finito de puntos}\\
 & \Downarrow & & \\
(f+h)-(g+r) & = & (f-g)+(h-r) & \\
 & = & (0) & \text{salvo en un número finito de puntos}\\
 & \Downarrow & & \\
f+h & \Re & g+r &
\end{array}$$

Análogamente,

$$
\begin{array}{rcll}
fh - gr & = & fh - gh + gh - gr & \\
 & = & h(f-g) + g(h-r) & \\
 & = & h \cdot (0) + g \cdot (0) & \text{salvo en un número finito de puntos} \\
 & = & (0) & \text{salvo en un número finito de puntos} \\
 & \Downarrow & & \\
fh & \Re & gr &
\end{array}
$$

Conclusión 1.3.5.

(i) La suma $\overline{f} + \overline{g} = \overline{f+g}$ es bien definida en $\mathbb{SC}[a,b]\big/_{\Re}$

(ii) El producto $\overline{f} \cdot \overline{g} = \overline{f \cdot g}$ es bien definida en $\mathbb{SC}[a,b]\big/_{\Re}$

(iii) $(C[a,b]\big/_{\Re} + \ , \ \cdot)$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

(iv) Además;

$$\langle \overline{f}, \overline{f} \rangle = \int_a^b \overline{f}^{\,2}(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow f \,\Re\, (0) \Longleftrightarrow \overline{f} = \overline{(0)}$$

(7) De ahora en adelante, cuando decimos $f \in \mathbb{SC}[a,b]$ estamos pensando en $\overline{f} \in C[a,b]\big/_{\Re}$

Ejemplo 1.3.6.

Determinemos su representación en serie de la función: $f(x) = \begin{cases} -1 & : \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & : \text{si } \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

Solución,

(1) El gráfico de la función es el siguiente:

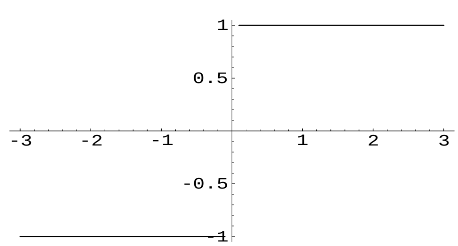


Figura 22

(2) f es una función impar, luego $a_k = 0 \quad (\forall k)$ y $b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx$. Luego.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}(\cos(k\pi)-1)\right) \\ &= \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) \\ &= \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & \text{si } k \text{ impar} \\ \\ 0 & \text{si } k \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

Así que la representación en el sentido antes dicho (en media) es la siguiente:

(15) $$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

(3) Gráficamente la situación es la siguiente:

- Si $k = 1$ entonces

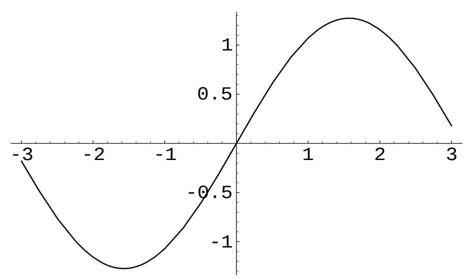


Figura 23

- Si $k = 2$ entonces

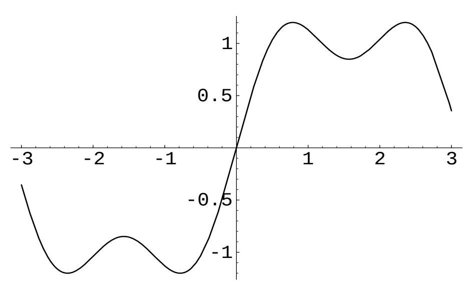


Figura 24

- Si $k = 3$ entonces

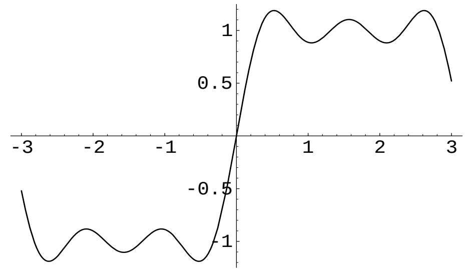


Figura 25

- Si $k = 4$ entonces

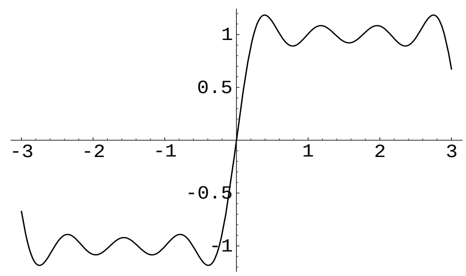


Figura 26

- Si $k = 50$ entonces

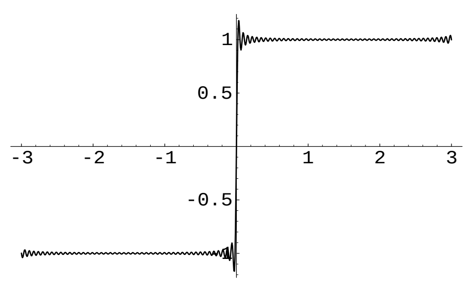


Figura 27

1.3.7. **Ejercicios Propuestos de Series de Fourier.**

(1) Desarrolle en Serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$las siguientes funciones:

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = |\sin x|$

(c) $f(x) = |\cos x|$

(d) $f(x) = (\pi - x)(\pi + x)$

(e) $f(x) = \begin{cases} x + \pi & : \text{ si } -\pi < x < 0 \\ x - \pi & ; \text{ si } \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 0 & : \text{ si } -\pi < x \leq 0 \\ x^2 & ; \text{ si } \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Además demuestre que:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

(g) $f(x) = \begin{cases} 0 & : \text{ si } -\pi < x \leq 0 \\ x & ; \text{ si } \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Además demuestre que:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

2. Extensiones de Funciones Seccionalmente Continuas

2.1. Extensión Periódica.

Sea $f \in \mathbb{SC}[-\pi, \pi]$, hasta ahora aceptamos que la función f es posible de representar en Serie de Fourier, es decir tenemos que f se escribe como (4)

$$f(x) \quad = \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Como las funciones trigonométricas senos y cosenos son periódicas de periodo 2π entonces

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx+2\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx+2\pi) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Esto permite definir la extensión periódica de f a todos los reales como sigue:

Definición 2.1.1.

$F(x) = f(x+2\pi) \quad (\forall x; x \in \mathbb{R})$, se llamará la extensión periódica de f.

Ejemplo 2.1.2.

Si $F(x) = |x+2\pi|$ entonces su gráfico es de la forma:

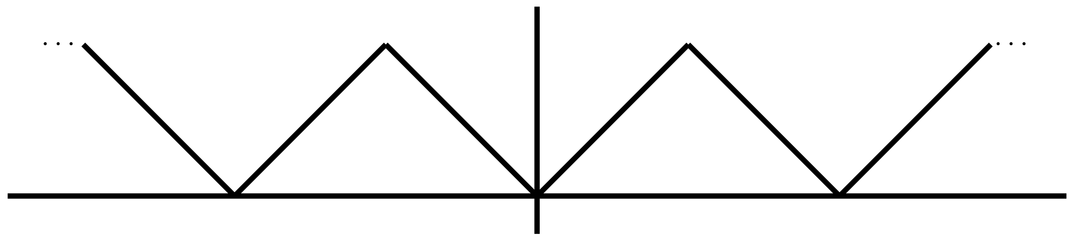


Figura 28 $F(x) = |x + 2\pi|$

2.2. Extensión Par e Impar.

Sea $y = f(x) \quad f \in \mathbb{SC}[0, \pi]$. Siguiendo la idea anterior podemos construir las extensiones pares e impares de funciones.

En efecto

(1) Define la función P_f como sigue:

$$P_f(x) = \begin{cases} f(-x) & : \text{ si } \pi \le x \le 0 \\ f(x) & : \text{ si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Entonces $P_f(-x) = P_f(x)$ es decir, P_f es una función par en $[-\pi, \pi]$

P_f se llama la extensión par de la función f. Respecto de la representación en Serie de Fourier de P_f tenemos que:

$$P_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \qquad \text{Representación en serie de Cosenos de } f.$$

(2) Define la función I_f como sigue:

$$I_f(x) = \begin{cases} -f(-x) & : \text{ si } \pi \le x \le 0 \\ \ \ f(x) & : \text{ si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Entonces $I_f(-x) = -I_f(x)$ es decir, P_f es una función impar en $[-\pi, \pi]$

I_f se llama la extensión impar de la función f. Respecto de la representación en Serie de Fourier de I_f tenemos que:

$$P_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \qquad \text{Representación en serie de Senos de } f.$$

Ejemplo 2.2.1.

Si $f(x) = x^2$; $\quad (0 < x < \pi)$ entonces su gráfico es de la forma:

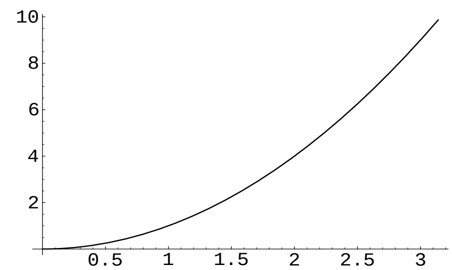


Figura 29 $\quad f(x) = x^2: \quad (0 < x < \pi)$

(1) Para la extensión par, tenemos que $y = P_f(x)$ tiene el gráfico:

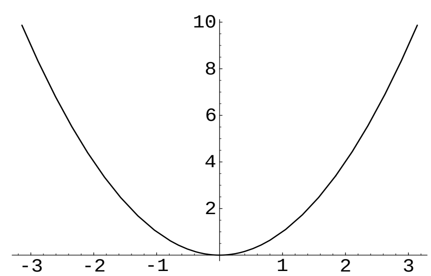


Figura 30 $\quad P_f(x) = x^2: \quad (-\pi < x < \pi)$

En este caso, $x^2 = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, donde

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx\; dx \quad (k \geq 0) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx\; dx \\
&\Downarrow \\
a_0 &= \frac{2}{3}\pi^2 \\
a_k &= (-1)^k \frac{4}{k^2} \quad (k \geq 1)
\end{aligned}$$

Así que,

$$P_f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2}\right)$$

Su representación es:

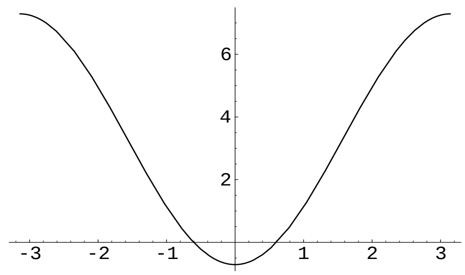


Figura 31 $\quad P_f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2}\right)$

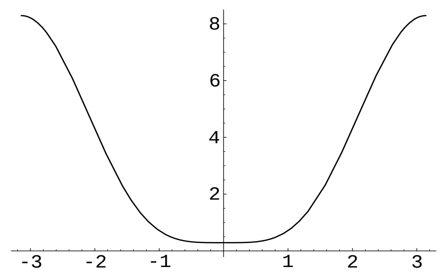


Figura 32 $\quad P_f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2}\right)$

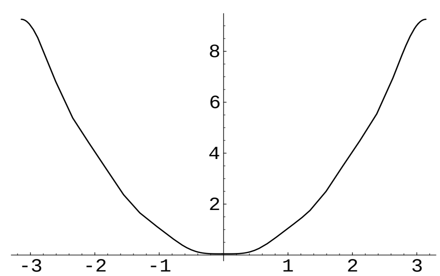
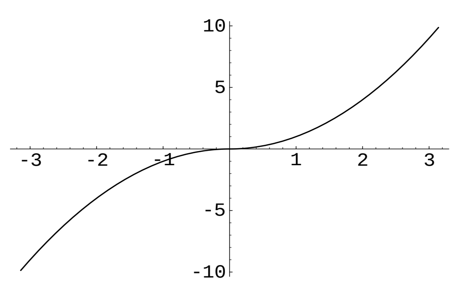


Figura 33 $\quad P_f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2}\right)$

(2) Para la extensión impar, tenemos que $y = I_f(x)$ tiene el gráfico:



$$\text{Figura 34} \quad I_f(x) = \begin{cases} -x^2 & : \quad (-\pi < x < 0) \\ x^2 & : \quad (0 < x < \pi) \end{cases}$$

En este caso, $I_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, donde

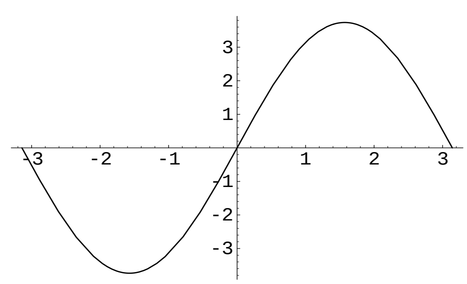
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx \, dx \quad (k \geq 1) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin kx \, dx \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$b_k = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{k} & : \text{si } k \text{ par} \\ \dfrac{2\pi}{k} - \dfrac{8}{\pi k^3} & : \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$$

Así que,

$$I_f(x) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

Su representación es:



$$\text{Figura 35} \quad I_f(x) = 2\pi \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

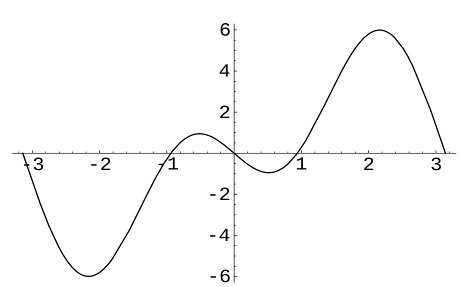


Figura 36 $$I_f(x) = 2\pi\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} - \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

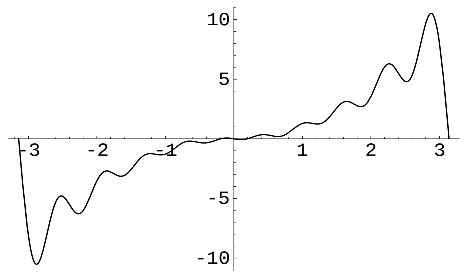


Figura 37 $$I_f(x) = 2\pi\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} - \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

2.2.2. **Ejercicios Propuestos de Series de Fourier Pares e Impares.**

(1) Determine las extensiones pares e impares (en el intervalo $[-\pi,\pi]$) de las funciones en $\mathbb{SC}[0,\pi]$:

(a) $f(x) = 3$

(b) $f(x) = (x+\pi)$

(c) $f(x) = 1 + x$

(d) $f(x) = x^3$

(2) Desarrolle en serie de Fourier de Senos a $f(x) = \cos x \quad (0 < x < \pi)$. Use este resultado para demostrar que

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k-1}{(4k-2)^2-1}$$

3. Cambio de Intervalo

3.1. Intervalos Simétricos respecto del origen.

Sea $f \in \mathbb{SC}[-p,p] \quad (p > 0)$ entonces

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{SC}[-p,p\,] &\iff -p \leq x \leq p \\ &\iff -\pi p \leq \pi x \leq \pi p \\ &\iff -\pi \leq \frac{\pi x}{p} \leq \pi \end{aligned}$$

Si hacemos $u = \dfrac{\pi x}{p}$, entonces $y = f(u)$ y $f \in \mathbb{SC}[-\pi,\pi]$, y para la nueva variable u tenemos representación en Serie de fourier, es decir:

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ku + b_k \sin ku, \qquad \text{donde} \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du \quad \wedge \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du \end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud del "cambio de Variable", tenemos que se obtiene la relación:

$$u = \frac{\pi x}{p} \Longrightarrow x = \frac{up}{\pi} \quad \wedge \quad du = \frac{\pi}{p}\,dx \qquad (*)$$

Aplicando (*) en a_k y b_k tenemos los siguientes valores:

$$\begin{gathered} u = -\pi \implies x = -p \quad \wedge \quad x = p \\ \Downarrow \\ a_k = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right)\,dx \quad (k \geq 0) \quad \wedge \quad b_k = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)\,dx \quad (k \geq 1) \end{gathered}$$

Así que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \qquad (\text{ en media})$$

3.2. Intervalos arbitrarios.

Sea $f \in \mathbb{SC}[a,b]$ con $(a \leq b)$. Si $p = \dfrac{b-a}{2}$ entonces $[a,b] = [a, a+2p]$ intervalo centrado. Así que tenemos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) \qquad (\text{ en media})$$

Donde,

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^{a+2p} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)\,dx \iff a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^{b} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)\,dx \quad (k \geq 0)$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_{-p}^{a+2p} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)\,dx \iff b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^{b} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)\,dx \quad (k \geq 1)$$

Ejemplo 3.2.1.

Sea $f(x) = x$, con $(0 < x < 1)$ entonces $f \in \mathbb{SC}(0,1)$, En este caso como $b - a = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 x\cos(2k\pi x)\,dx \quad (k \geq 0) \\ b_k &= 2\int_0^1 x\sin(2k\pi x)\,dx \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtenemos; $a_0 = 1,\ a_k = 0$ y $b_k = -\dfrac{1}{k\pi}$. Así que tenemos la representación en Serie de Fourier.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{2k\pi x}{k}\right) \qquad (\text{ en media})$$

Su representación en algunos casos es la siguiente:

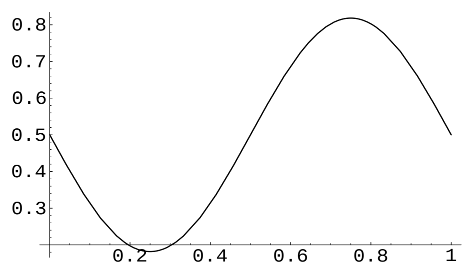


Figura 38 $\quad f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\sin\left(\frac{2k\pi x}{k}\right)$

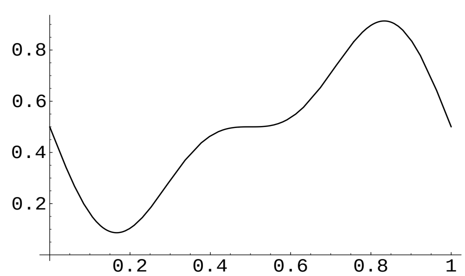


Figura 39 $\quad f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\sin\left(\frac{2k\pi x}{k}\right)$

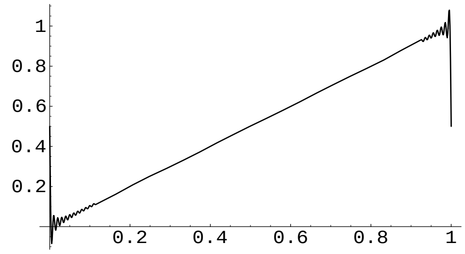


Figura 40 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{100} \sin\left(\frac{2k\pi x}{k}\right)$

3.2.2. **Ejercicios Propuestos de Series de Fourier en intervalos no simétricos.**

(1) Determine el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \text{ si } -2 < x < -1 \\ |x| & : \text{ si } -1 < x < 1 \\ 0 & : \text{ si } \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

(2) Determine el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & : \text{ si } 1 < x < 2 \\ x - 2 & : \text{ si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \text{ si } 2 < x < 3 \\ 4 - x & : \text{ si } 3 < x < 4 \\ x - 4 & : \text{ si } 4 < x < 5 \\ 1 & : \text{ si } 5 < x < 6 \end{cases}$$