Universidad de Santiago
Facultad de Ingeniería
Depto. de Electricidad

Ejercicios resueltos de Máximos y Mínimos
Matemáticas II
Profesor Ricardo Santander Baeza
27 de abril del 2017

(1) Determine máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$$

Solución. Iniciamos determinando los puntos críticos de la función f. Para ello obtenemos las primeras derivadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3y - 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x - 3y^2 \end{aligned}$$

Ahora, determinamos los puntos críticos, y para ello estudiamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3y - 3x^2 &=& 0 \\ 3x - 3y^2 &=& 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} y - x^2 &=& 0 \\ x - y^2 &=& 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ x - y^2 &=& 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ x - x^4 &=& 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ x(1-x^3) &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow y = x^2 \wedge (x = 0 \vee (x-1)(1+x+x^2) = 0)$$

$$\Rightarrow \quad y = x^2 \wedge (x = 0 \vee x = 1)$$

Luego tenemos dos casos:

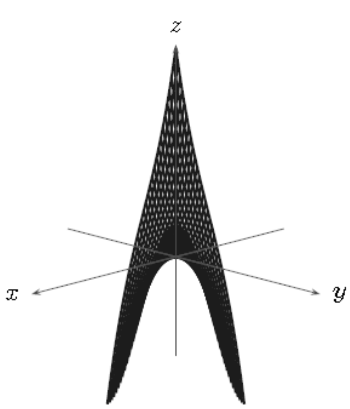
Caso 1. Si $x = 0$ entonces $y = 0$. Así que $P = (0,0)$ es un punto crítico Caso 2. Si $x = 1$ entonces $y = 1$. Así que $Q = (1,1)$ es otro punto crítico.

En la siguiente etapa debemos aplicar el criterio, para máximos y mínimos a los puntos críticos obtenidos. Para ello comenzamos generando $\Delta(x,y)$ y entonces debemos determinar las segundas derivadas parciales.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -6y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta(x,y) = 36xy - 9$$

Finalmente,
Para $P = (0,0)$ tenemos que $\Delta(0,0) = -9 < 0$. Así que $P = (0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ es un punto silla, y

Para $Q = (1,1)$ tenemos que $\Delta(1,1) = 36 - 9 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -6 < 0$.
Así que $Q = (1,1,f(1,1)) = (1,1,1)$ es un punto máximo.



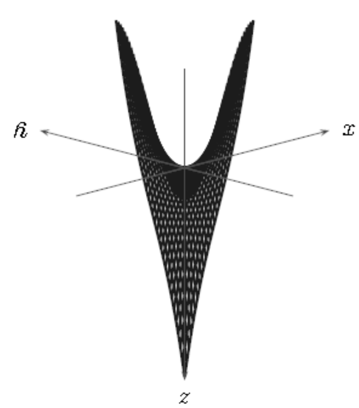


Figura:1 $\mathbb{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3\right\}$ Figura:2 Rotada 180° $\mathbb{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3\right\}$

(2) Determine máximos y mínimos, no nulos, si existen de la función $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$
Solución

En primer lugar, determinamos las primeras derivadas parciales.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 6y^2 - 6x^2\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 12xy - 12y^3\end{aligned}$$

En segundo lugar, buscamos puntos críticos

$$\left.\begin{array}{rcl} 6y^2 - 6x^2 &=& 0\\ 12xy - 12y^3 &=& 0\end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} y^2 - x^2 &=& 0\\ xy - y^3 &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lrcl} (1) & (y-x)(y+x) &=& 0\\ (2) & xy - y^3 &=& 0\end{array}\right|$$

De la ecuación (1) sigue que tenemos entonces dos casos:

Caso 1. Si $x = y$ entonces sustituyendo en (2) obtenemos que

$$y^2 - y^3 = 0 \Longrightarrow y^2(1-y) = 0 \Longrightarrow y = 0 \vee y = 1$$

Si $y = 0$ entonces $x = 0$, entonces el punto crítico es en este caso $(0,0,0)$ no permitido.
Luego, $y = 1$ y entonces el punto crítico en este caso es $P_1 = (1,1,1)$
Caso 2. $y = -x$ entonces sustituyendo en (2) obtenemos que

$$-y^2 - y^3 = 0 \Longrightarrow y^2(1+y) = 0 \Longrightarrow y = 0 \vee y = -1$$

Si $y = 0$ entonces $x = 0$, entonces el punto crítico es en este caso $(0,0,0)$ no permitido.
Luego, $y = -1$ y entonces el punto crítico en este caso es $P_2 = (1,-1,1)$
Ahora, Construimos $\Delta(x,y)$, para ello calculamos las segundas derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 6y^2 - 6x^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -12x \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 12y\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 12xy - 12y^3 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12x - 36y^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12y\end{aligned}$$

Así que

$$\Delta(x,y) = -12x(12x - 36y^2) - 144y^2$$

Si $P_1 = (1,1,1)$ entonces $\Delta(1,1) = -12(12-36) - 144 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -12 <$, luego P_1 es un máximo
Si $P_2 = (1,-1,1)$ entonces $\Delta(1,-1) = -12(12-36) - 144 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -12 <$, luego P_2 es un máximo

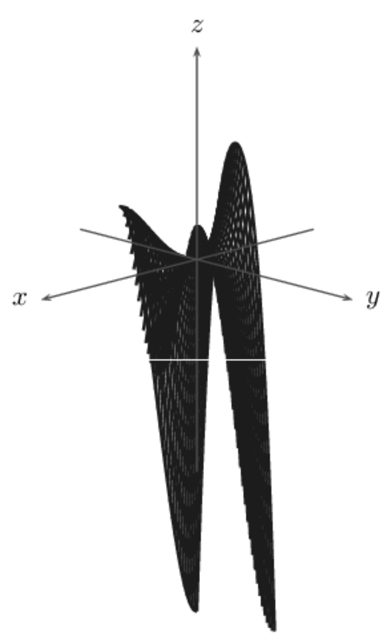


Figura:3 $\mathbb{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4\right\}$

(3) Determine máximos, mínimos y puntos sillas (si existen)de la función:

$$f(x,y) = 6x^2y^2 - x^3y^2 - x^2y^3,\ (y \neq 0 \wedge x \neq 0)$$

Solución

Etapa 1. Calculamos en primer lugar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 12xy^2 - 3x^2y^2 - 2xy^3\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 12x^2y - 2x^3y - 3x^2y^2\end{aligned}$$

Anulamos, ahora $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, para obtener los puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{rcl}12xy^2 - 3x^2y^2 - 2xy^3 &=& 0\\ 12x^2y - 2x^3y - 3x^2y^2 &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}xy^2(12-3x-2y) &=& 0\\ x^2y(12-2x-3y) &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}12-3x-2y &=& 0\\ 12-2x-3y &=& 0\end{array}\right| (x\neq 0; y \neq 0)$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}3x+2y &=& 12\\ 2x+3y &=& 12\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}9x+6y &=& 36\\ 4x+6y &=& 24\end{array}\right| \Longrightarrow x = \frac{12}{5} \wedge y = \frac{12}{5}$$

Luego, $P = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$, es un punto crítico.

Etapa 2. Calculamos ahora $\Delta(x,y)$, y para ello determinamos las segundas derivadas parciales.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12y^2 - 6xy^2 - 2y^3\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 24xy - 6x^2y - 6xy^2\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 12x^2 - 2x^3 - 6x^2y\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 24xy - 6x^2y - 6xy^2\end{aligned}$$

Así que, $\Delta(x,y) = (12y^2 - 6xy^2 - 2y^3)(24x^2 - 2x^3 - 6x^2y) - (24xy - 6x^2y - 6xy^2)^2$,

Etapa 3. Ahora evaluamos en el punto crítico.

$$\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right) = \left(12\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 8\left(\frac{12}{5}\right)^3\right)\left(12\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 8\left(\frac{12}{5}\right)^3\right) - \left(24\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 12\left(\frac{12}{5}\right)^3\right)^2 < 0$$

Así que P es un punto silla

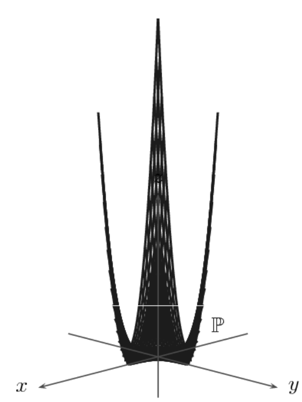


Figura:4 $\mathbb{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x,y) = 6x^2y^2 - x^3y^2 - x^2y^3,\ (y \neq 0 \wedge x \neq 0)\right\}$

(4) Determine las dimensiones relativas de una caja rectangular, sin tapa que tiene un volumen de 32 unidades cúbicas, si se desea emplear la mínima cantidad de material en su elaboración.

Solución.

Etapa 1. Planteamiento del problema.

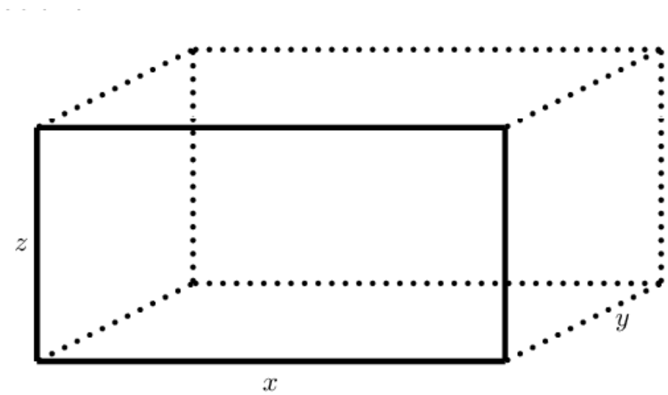


Figura:5 Caja Pedida

Etapa 2. Sean x, y, z, las medidas de la caja pedida.

Etapa 3. Análisis de datos.

- Construimos la función que modela la superficie que debemos minimizar, en este caso esta es,

$$A(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$$

- Tenemos otro dato, aunque que en realidad es una "restricción", pues debe tener un volumen de 32; es decir tenemos que: $V(x,y,z) = xyz = 32$

Etapa 4. Uso de los datos.

La función A se transforma en una de dos variables sustituyendo z, por $\dfrac{32}{xy}$, es decir:

$$\begin{aligned} A(x,y) &= xy + \frac{64x}{xy} + \frac{64y}{xy} \\ &= xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x} \quad (\text{ pues } x \neq 0 \wedge y \neq 0) \end{aligned}$$

Ahora

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial A}{\partial x}(x,y) &= y - \frac{64}{x^2} \\ \tfrac{\partial A}{\partial y}(x,y) &= x - \frac{64}{y^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} y - \frac{64}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{64}{y^2} &= 0 \end{aligned}\right| \Longrightarrow x^2y = xy^2 \Longrightarrow x = y = \sqrt[3]{64} = 4$$

Así que, $P = (4,4)$ es un punto crítico.

Etapa 5. Verificamos el tipo de punto crítico.

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{128}{x^3} \\ \tfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{128}{y^3} \\ \tfrac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x,y) = \tfrac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x,y) &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta(x,y) = \dfrac{128^2}{x^3y^3} - 1 \Longrightarrow \Delta(4,4) = 4 - 1 = 3 > 0 \\ \\ \tfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{128}{x^3} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}(4,4) = 2 > 0 \end{cases}$$

Por tanto P es un mínimo.

(5) Si x, y y z son tres números reales no negativos tales que su suma es 1 entonces determine Â¿Qué tan pequeño puede ser? $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución

Etapa 1. Debemos minimizar la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Etapa 2. Datos:

$$\begin{aligned} x + y + z = 1 &\implies z = 1 - x - y \\ &\implies f(x,y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 \\ &\implies f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 \end{aligned}$$

Etapa 3. aplicamos la técnica para minimizar

- Para determinar los puntos críticos:

  - Derivamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x + 2y - 2 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y + 2x - 2 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y} &= 2 \end{aligned}$$

  - Luego, debemos resolver el sistema en consecuencia:

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x + 2y - 2 &=& 0 \\ 4y + 2x - 2 &=& 0 \end{array}\right| \implies \left.\begin{array}{rcl} 2x + y &=& 1 \\ x + 2y &=& 1 \end{array}\right| \implies x = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{3}$$

  - Asi que tenemos que el punto crítico $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

- Decidimos al punto crítico:

  (i) $\Delta(x,y) = 12 > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 > 0$ entonces P es un punto mínimo.

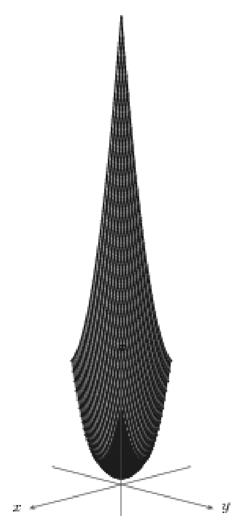


Figura: 6 $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$

(6) Determine máximos, mínimos y puntos sillas si existen de la función

$$f(x,y) \quad = \quad x^3 + y^3 + 3xy + 5$$

Solución. En primer lugar, determinamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 + 3x \end{aligned}$$

Ahora determinamos los puntos críticos y para ello anulamos las derivadas parciales, en el siguiente sentido

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x^2+3y &=& 0 \\ 3y^2+3x &=& 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^2+y &=& 0 \\ y^2+x &=& 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} y &=& -x^2 \\ (-x)^4+x &=& 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} y &=& -x^2 \\ x(x^3+1) &=& 0 \end{array}\right]$$

Si $x = 0$ entonces como $y = -x^2$, sigue que P=(0,0) es un punto crítico.

Si $x^3 + 1 = 0$ entonces como $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, sigue que $x = -1$ es único punto de anulamiento, pues $x^2 - x + 1 \neq 0$, y $x = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$. Por tanto $Q = (-1, -1)$ es otro punto crítico, (no olvide que $y = -x^2$)

A seguir, calculamos nuestro $\Delta(x, y)$ que en este caso, se obtiene de las derivadas parciales segundas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$

Y entonces

$$\Delta(x,y) \quad = \quad 36xy - 9$$

Luego, para $P = (0, 0)$ tenemos $\Delta(0, 0) = -9$, punto silla y para $Q = (-1, -1)$ tenemos que $\Delta(-1, -1) = 36 - 9 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6 < 0$, sigue Q es un máximo

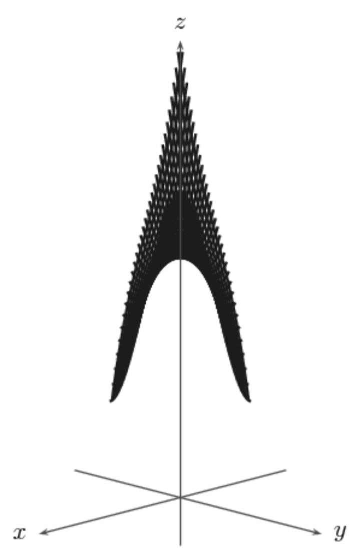


Figura: 7 $z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 5$

(7) Determine máximos, mínimos y puntos sillas (si existen) de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 1$$

Solución

En primer lugar derivamos para buscar puntos críticos.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 18y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 18x\end{aligned}$$

Ahora, buscamos puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x^2 - 18y &=& 0 \\ 3y^2 - 18x &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^2 - 6y &=& 0 \\ y^2 - 6x &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow x^2 - 6y - (y^2 - 6x) = 0 \Longrightarrow x^2 - y^2 - 6y + 6x = 0$$

$$\Longrightarrow (x+y)(x-y) + 6(x-y) = 0 \Longrightarrow (x-y)(x+y+6) = 0 \Longrightarrow x = y \vee y = -6 - x$$

Luego tenemos dos casos posibles.

(a) Si $y = x$ entonces sustituyendo en una de las ecuaciones obtenemos que

$$x^2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x(x-6) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

En este caso tenemos los puntos críticos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (6,6)$

(b) Si $y = -6 - x$ entonces obtenemos que

$$x^2 - 6(-x-6) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 6x + 36 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 144}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Ahora que tenemos los puntos críticos P_1 y P_2 procedemos a clasificarlos.

(i) Para ello calculamos $\Delta(x,y)$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -18\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta(x,y) = 36xy - (18)^2$$

(ii) $\Delta(0,0) = -(18)^2 < 0$ Así que $P_1 = (0,0,f(0,0))$ es un punto silla

(iii) $\Delta(6,6) = (36)^2 \cdot 6 - (18)^2 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,6) = 6 \cdot 6 > 0$ Así que $P_2 = (6,6,f(6,6))$ es un punto mínimo