Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
Ingeniería Ejecución DIE

Una solución del Control N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Jueves 04 de Mayo del 2017

(1) Si $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ entonces demuestre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Una Solución

Si $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Y,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,2y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Así que,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

(2) Usando la regla de la cadena. Determine y' en la relación

$$x^3y^4 + (1-x^2)e^{x-y} + \sin(x-y) = xy$$

Solución

Si hacemos $f(x,y) = x^3y^4 + (1-x^2)e^{x-y} + \sin(x-y) - xy = 0$

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\\
&= -\frac{3x^2y^4 + (-2x)e^{x-y} + (1-x^2)e^{x-y} + \cos(x-y) - y}{4x^3y^3 + (1-x^2)e^{x-y}(-1) + \cos(x-y)(-1) - x}\\
&= -\frac{3x^2y^4 - 2xe^{x-y} + (1-x^2)e^{x-y} + \cos(x-y) - y}{4x^3y^3 - (1-x^2)e^{x-y} - \cos(x-y) - x}
\end{aligned}$$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

(3) Determine máximos, mínimos y puntos sillas (si existen)de la función

$$f(x,y) = 4x^3 - 4y^3 + 12xy + 33$$

Solución

(a) Determinamos las derivadas parciales de f

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 12x^2 + 12y \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 24x \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 12 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 12x - 12y^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -24y \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12
\end{aligned}$$

(b) Anulamos las primeras derivadas parciales de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \left.\begin{array}{rcl} (1)\ 12x^2 + 12y &=& 0 \\ (2)\ 12x - 12y^2 &=& 0 \end{array}\right| \stackrel{(+)}{\Longrightarrow} 12x^2 - 12y^2 + 12x + 12y = 0$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \Downarrow & \\
x^2 - y^2 + x + y &=& 0 \\
 & \Downarrow & \\
(x-y)(x+y) + (x+y) &=& 0 \\
 & \Downarrow & \\
(x+y)[x-y+1] &=& 0 \\
 & \Downarrow & \\
x = -y & \vee & y = x+1
\end{array}$$

(c) Finalmente determinamos y decidimos los puntos críticos

- Si $y = -x$ entonces $x = 0 \quad \vee \quad x = 1$, y los puntos críticos son $P = (0,0)$ y $Q = (1,-1)$
- Si $y = x + 1$ entonces $x^2 + x + 1 = 0$, no tiene solución en $\mathbb{R}$
- Decidimos los puntos críticos:

$$\Delta(x,y) = -(24)^2 xy - 144$$

Luego,
- $\circ$ $\Delta(0,0) = -144 < 0$, luego P es un punto silla.
- $\circ$ $\Delta(1,-1) = 24^2 - 144 > 0$ y $f_{xx}(1,-1) = 12 > 0$, luego Q es un mínimo.