Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una solución del Taller N°4
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Martes 26 de junio del 2018

El trabajo dignifica
al ser humano

1. Algunas sugerencias

- Lean cuidadosamente el problema
- Reconozcan lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a ustedes se les consulta.
- Traten de entender en la forma más clara para ustedes, lo que se les pide, en particular si pueden usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!. Este acto nunca estará de más.
- Analicen cuidadosamente sus datos extrayendo la información que corresponde, orientados por su entendimiento de lo que deben probar.

2. Objetivos

- Fomentar el **trabajo en equipo.**
- Estimular **la comprensión de lectura** en problemas matemáticos.
- Clasificar después de leer el problema, **entre información y resultado pedido.**
- Estimular **el uso de una sintaxis adecuada** en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos
- Aprender a **generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente)**, para responder al problema planteado.

3. Ejercicios Propuestos

(1) Si $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ es una función tal que

$$T(x,y) = (\lambda x - 2y, x + \lambda y, 0)$$

entonces

(a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$

Una solución. Si $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ entonces P.d.q. $T(u+v) = T(u) + T(v)$. Por tanto

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(x+a, y+b) \\ &= (\lambda(x+a) - 2(y+b), x+a+\lambda(y+b), 0) \\ &= (\lambda x + \lambda a - 2y - 2b, x + a + \lambda y + \lambda b, 0) \\ &= (\lambda x - 2y + \lambda a - 2b, x + \lambda y + a + \lambda b, 0) \\ &= (\lambda x - 2y, x + \lambda y, 0) + (\lambda a - 2b, a + \lambda b, 0) \\ &= T(x,y) + T(a,b) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos

Además, para $\gamma \in \mathbb{R}$ y $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ debemos mostrar que $T(\gamma u) = \gamma T(u)$, luego,

$$\begin{aligned} T(\gamma u) &= T(\gamma x, \gamma y) \\ &= (\lambda\gamma x - 2\gamma y, \gamma x + \lambda\gamma y, 0) \\ &= (\gamma(\lambda x - 2y), \gamma(x + \lambda y), 0) \\ &= \gamma(\lambda x - 2y, x + \lambda y, 0) \\ &= \gamma T(x, y) \\ &= \gamma T(u) \end{aligned}$$

Así que, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ inyectiva}\}$

Una solución. Debemos estudiar los elementos del conjunto $\mathbb{S}$ y entonces .

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{S} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ T \text{ inyectiva} \\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \ker(T) = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \end{aligned}$$

Por tanto debemos estudiar el $\ker(T)$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} u \in \ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^2 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge T(x, y) = (0, 0, 0) \\ &\iff u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (\lambda x - 2y, x + \lambda y, 0) = (0, 0, 0) \\ &\iff u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left.\begin{array}{lrcl} (1) & \lambda x - 2y & = & 0 \\ (2) & x + \lambda y & = & 0 \end{array}\right| \\ &\overset{\lambda\cdot(2)}{\iff} u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left.\begin{array}{lrcl} (1) & \lambda x - 2y & = & 0 \\ (3) & \lambda x + \lambda^2 y & = & 0 \end{array}\right| \\ &\overset{(3)-(1)}{\iff} u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left.\begin{array}{rcl} \lambda x - 2y & = & 0 \\ \lambda^2 y + 2y & = & 0 \end{array}\right| \\ &\iff u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left.\begin{array}{rcl} \lambda x - 2y & = & 0 \\ (\lambda^2 + 2)y & = & 0 \end{array}\right| \\ &\iff u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (\lambda x - 2y = 0 \wedge [(\lambda^2 + 2) = 0 \vee y = 0)] \\ &\iff u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (\lambda x - 2y = 0 \wedge y = 0) \quad (\text{ Pues, } \lambda^2 + 2 \neq 0) \\ &\iff u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (\lambda x = 0 \wedge y = 0 \wedge x = 0) \\ &\iff u = (0, 0) \quad (\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Así que

$$\ker(T) \ = \ \{(0, 0\} \quad (\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$$

O sea $\mathbb{S} = \mathbb{R}$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacios vectoriales y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base $\mathbb{V}$. Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ entonces demuestre que

$$\beta = \{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} \text{ linealmente independiente} \Longrightarrow T \text{ Inyectiva}$$

Una solución. Como debemos mostrar que T es una transformación lineal inyectiva entonces podemos estudiar su núcleo. En consecuencia, si suponemos que $u \in \ker(T)$ entonces

$$\begin{aligned}
u \in \ker(T) &\iff u \in \mathbb{V} \wedge T(u) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\iff u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in \mathbb{V} \wedge T(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = 0_{\mathbb{V}} \ (\alpha \text{ es una base de } \mathbb{V}) \\
&\iff u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in \mathbb{V} \wedge a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + a_3T(v_3) = 0_{\mathbb{V}} \ (T \text{ es una T. Lineal }) \\
&\iff u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in \mathbb{V} \wedge a_1 = a_2 = a_3 = 0 \ (\beta \text{ L. I. }) \\
&\iff u = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\
&\iff u = 0_{\mathbb{V}}
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y T es inyectiva

(3) Construya $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

(a) $\ker(T) = \langle\{(1,1,1),(1,0,-1),(2,1,0)\}\rangle$

(b) $\text{Img }(T) = \langle\{(2,-1,1)\}\rangle$

Una solución. Observamos que si una tal transformación lineal T existe entonces de acuerdo al teorema de la dimensión y dado que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$ debemos tener que:

$$3 \;=\; \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) \qquad (\star)$$

Por otra parte, verificamos directamente que:

- $(2,-1,1) \neq (0,0,0) \Longrightarrow \{(2,-1,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente y $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) = 1$

- del item anterior y de $(\star)$ sigue que $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) = 2$, pero entonces $\{(1,1,1),(1,0,-1),(2,1,0)\}$ es un conjunto linealmente dependiente, y verificamos que $(1,1,1)+(1,0,-1) = (2,1,0)$ y también que

$$\begin{aligned}
a_1(1,1,1)+a_2(1,0,-1) = (0,0,0) &\Longrightarrow (a_1+a_2, a_1, a_1-a_2) = (0,0,0)\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2 &=& 0\\ a_1 &=& 0\\ a_1-a_2 &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0
\end{aligned}$$

Luego, $\{(1,1,1),(1,0,-1)\}$ es una base de $\ker(T)$

Finalmente procedemos a construir T, conforme a nuestro algoritmo:

- Si definimos $\alpha = \{(1,1,1),(1,0,-1),(0,0,1)\}$ entonces α es una base de $\mathbb{R}^3$, pues para cada $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tenemos que

$$\begin{aligned}
a_1(1,1,1)+a_2(1,0,-1)+a_3(0,0,1) = (x,y,z) &\Longrightarrow (a_1+a_2, a_1, a_1-a_2+a_3) = (x,y,z)\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2 &=& x\\ a_1 &=& y\\ a_1-a_2+a_3 &=& z \end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_2 &=& x-y\\ a_1 &=& y\\ a_3 &=& x-2y+z \end{array}\right|
\end{aligned}$$

Así que,

$$(x,y,z) \;=\; y(1,1,1)+(x-y)(1,0,-1)+(x-2y+z)(0,0,1)$$

Podemos comprobar directamente que

$$\begin{array}{rcl}
(1,1,1) &=& 1(1,1,1)+(0)(1,0,-1)+(0)(0,0,1) \quad \checkmark\\
(1,0,-1) &=& 0(1,1,1)+(1)(1,0,-1)+(0)(0,0,1) \quad \checkmark\\
(0,0,1) &=& 0(1,1,1)+(0)(1,0,-1)+(1)(0,0,1) \quad \checkmark
\end{array}$$

Por tanto α es una base de $\mathbb{R}^3$, (recuerde el teorema mágico).

- Ahora, imponemos las condiciones que debe cumplir nuestra futura T en la base, que es un proceso central en el ya dicho algoritmo.

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (0,0,0) \\ T(1,0,-1) &= (0,0,0) \\ T(0,0,1) &= (2,-1,1) \end{aligned}$$

- Para concluir, extendemos la definición de T a todo el espacio "por linealidad"

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= yT(1,1,1)+(x-y)T(1,0,-1)+(x-2y+z)T(0,0,1) \\ &= y(0,0,0)+(x-y)(0,0,0)+(x-2y+z)(2,-1,1) \\ &= (2x-4y+2z,-x+2y-z,x-2y+z) \end{aligned}$$

  O sea que,

$$T(x,y,z) = (2x-4y+2z,-x+2y-z,x-2y+z)$$

  Comprobamos como siempre, y obtenemos que T es una transformación lineal por construcción y que

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (0,0,0) \\ T(1,0,-1) &= (0,0,0) \\ T(0,0,1) &= (2,-1,1) \end{aligned}$$