Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una solución del Taller N° 2
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
martes 24 de Abril del 2018

El trabajo dignifica
al ser humano

1. Algunas sugerencias

- Lean cuidadosamente el problema
- Reconozcan lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a ustedes se les consulta.
- Traten de entender en la forma más clara para ustedes, lo que se les pide, en particular si pueden usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!. Este acto nunca estará de más.
- Analicen cuidadosamente sus datos extrayendo la información que corresponde, orientados por su entendimiento de lo que deben probar.

2. Objetivos

- Fomentar el **trabajo en equipo.**
- Estimular **la comprensión de lectura** en problemas matemáticos.
- Clasificar después de leer el problema, **entre información y resultado pedido.**
- Estimular **el uso de una sintaxis adecuada** en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos
- Aprender a **generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente)**, para responder al problema planteado.

3. Ejercicios Propuestos

(1) Si $\alpha = \{2+x+\lambda x^2,\ 1+\lambda x+x^2,\ 1-2x+(\lambda-1)x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ entonces determine, si es posible, el conjunto

$$\mathbb{L} \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es una base de } \mathbb{R}_2[x]\}$$

Solución. Usando el teorema mágico podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{L} \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ es una base de } \mathbb{R}_2[x] \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ es un sistema de generadores para } \mathbb{R}_2[x] \end{aligned}$$

Luego para $\lambda \in \mathbb{L}$ y para cada $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, tiene solución la ecuación

$$a_o + a_1x + a - 2x^2 \quad = \quad c_1(2+x+\lambda x^2) + c_2(1+\lambda x+x^2) + c_3(1-2x+(\lambda-1)x^2)$$

Así que

[1] Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 90'

$$(2c_1+c_2+c_3)+(c_1+\lambda c_2-2c_3)x+(c_1\lambda+c_2+(\lambda-1)c_3)x^2 = a_0+a_1x+a_2x^2 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lrcl} (1) & 2c_1+c_2+c_3 & = & a_0\\ (2) & c_1+\lambda c_2-2c_3 & = & a_1\\ (3) & c_1\lambda+c_2+(\lambda-1)c_3 & = & a_2\end{array}\right| \overset{\substack{(1)-2(2)\\(3)-\lambda(2)}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcl} c_2(1-2\lambda)+5c_3 & = & a_0-2a_1\\ c_1+\lambda c_2-2c_3 & = & a_1\\ c_2(1-\lambda^2)+(3\lambda-1)c_3 & = & a_2-\lambda a_1\end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rcl} c_2(1-2\lambda)(3\lambda-1)+5(3\lambda-1)c_3 & = & (a_0-2a_1)(3\lambda-1)\\ 5c_2(1-\lambda^2)+5(3\lambda-1)c_3 & = & 5a_2-5\lambda a_1\end{array}\right| \Longrightarrow [(1-2\lambda)(3\lambda-1)-5(1-\lambda^2)]c_2=(a_0-2a_1)(3\lambda-1)-5a_2+5\lambda a_1$$

$$\Longrightarrow (\lambda-2)(\lambda-3)c_2=(a_0-2a_1)(3\lambda-1)-5a_2+5\lambda a_1$$

$$\Longrightarrow c_2=\frac{(a_0-2a_1)(3\lambda-1)-5a_2+5\lambda a_1}{(\lambda-2)(\lambda-3)} \quad (\lambda\neq 2)\wedge(\lambda\neq 3)$$

Luego, $\mathbb{L}=\mathbb{R}-\{2,3\}$

(2) Si $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, y $\alpha=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\subset\mathbb{V}$. Si definimos $\beta=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ tal que $w_i=\sum_{j=1}^{i}(-1)^j v_j$, para $i=1,2,3,4$ entonces demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \Longrightarrow \beta \text{ base de } \mathbb{V}$$

Solución

En primer lugar, tenemos que por definición.

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & -v_1\\ w_2 & = & -v_1+v_2\\ w_3 & = & -v_1+v_2-v_3\\ w_4 & = & -v_1+v_2-v_3+v_4\end{array} \tag{1}$$

Ahora, para continuar para demostrar la independencia lineal de β procedemos conforme a la definición, y a lo obtenido en (1)

$$\begin{array}{rcl} a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3+a_4w_4=0_{\mathbb{V}} & \Longrightarrow & a_1(-v_1)+a_2(-v_1+v_2)+a_3(-v_1+v_2-v_3)+a_4(-v_1+v_2-v_3+v_4)=0_{\mathbb{V}}\\ & \Longrightarrow & (-a_1-a_2-a_3-a_4)v_1+(a_2+a_3+a_4)v_2+(-a_3-a_4)v_3+a_4v_4=0_{\mathbb{V}}\\ & \overset{\alpha \text{ base}}{\Longrightarrow} & \left.\begin{array}{rcl} -a_1-a_2-a_3-a_4 & = & 0\\ a_2+a_3+a_4 & = & 0\\ -a_3-a_4 & = & 0\\ a_4 & = & 0\end{array}\right| \Longrightarrow a_4=a_3=a_2=a_1=0\end{array}$$

Así que β es linealmente independiente y en virtud del teorema mágico $\beta esunabase.$

Una solución alternativa:

Si $u\in\mathbb{V}$ entonces como α es base, en particular es un sistema de generadores y existen escalares c_1,c_2,c_3, y c_4 tales que

$$u = c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4 \qquad (*)$$

Ahora para verificar si β es un sistema de generadores, intentamos resolver la ecuación

$$u=a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3+a_4w_4 \qquad (**)$$

Pero entonces

$$\begin{array}{rcl} a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3+a_4w_4=u & \Longrightarrow & a_1(-v_1)+a_2(-v_1+v_2)+a_3(-v_1+v_2-v_3)+a_4(-v_1+v_2-v_3+v_4)=u\\ & \Longrightarrow & (-a_1-a_2-a_3-a_4)v_1+(a_2+a_3+a_4)v_2+(-a_3-a_4)v_3+a_4v_4=u\\ & \overset{\alpha \text{ de } (*)}{\Longrightarrow} & \left.\begin{array}{rcl} -a_1-a_2-a_3-a_4 & = & c_1\\ a_2+a_3+a_4 & = & c_2\\ -a_3-a_4 & = & c_3\\ a_4 & = & c_4\end{array}\right| \Longrightarrow \begin{cases} a_4=c_4\\ a_3=-c_3-c_4\\ a_2=c_2+c_3\\ a_1=-c_1-c_2\end{cases}\end{array}$$

Así que sustituyendo en $(**)$ tenemos que

$$u=(-c_1-c_2)w_1+(c_2+c_3)w_2+(-c_3-c_4)w_3+c_4w_4$$