

1. Algunas sugerencias

- Lean cuidadosamente el problema
- Reconozcan lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a ustedes se les consulta.
- Traten de entender en la forma más clara para ustedes, lo que se les pide, en particular si pueden usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!. Este acto nunca estará de más.
- Analicen cuidadosamente sus datos extrayendo la información que corresponde, orientados por su entendimiento de lo que deben probar.

2. Objetivos

- Fomentar el **trabajo en equipo**.
- Estimular **la comprensión de lectura** en problemas matemáticos.
- Clasificar después de leer el problema, **entre información y resultado pedido**.
- Estimular **el uso de una sintaxis adecuada** en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos
- Aprender a **generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente)**, para responder al problema planteado.

3. Ejercicios Propuestos

- (1) Si $\mathbb{W} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a - 2b + 3c + 2d = 0 \wedge a - b - 2c + d = 0 \right\}$ entonces Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$
 Solución. Haremos uso del criterio del subespacio generado.

$$\begin{aligned}
 A \in \mathbb{W} &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a - 2b + 3c + 2d = 0 \wedge a - b - 2c + d = 0 \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = 2b - 3c - 2d \wedge a = b + 2c - d \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = 2b - 3c - 2d \wedge b + 2c - d = 2b - 3c - 2d \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = 2b - 3c - 2d \wedge d = b - 5c \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = 2b - 3c - 2(b - 5c) \wedge d = b - 5c \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = 2b - 3c - 2b + 10c \wedge d = b - 5c \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} 7c & b \\ c & b - 5c \end{pmatrix}; \quad (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7c & 0 \\ c & -5c \end{pmatrix}; \quad (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
 &\iff A = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; \mid b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \leq \mathbb{W}$$

¹Cada problema vale 2.0 puntos

(2) Si $\alpha = \{2 + x + \lambda x^2, 1 + \lambda x + x^2, 1 - 2x + (\lambda - 1)x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ entonces determine, si es posible, el conjunto

$$\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es un sistema de generadores para } \mathbb{R}_2[x]\}$$

Solución

$$\lambda \in \mathbb{L} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ es un sistema de generadores para } \mathbb{R}_2[x]$$

Luego para $\lambda \in \mathbb{L}$ y para cada $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, tiene solución la ecuación

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = c_1(2 + x + \lambda x^2) + c_2(1 + \lambda x + x^2) + c_3(1 - 2x + (\lambda - 1)x^2)$$

Así que

$$\begin{aligned} (2c_1 + c_2 + c_3) + (c_1 + \lambda c_2 - 2c_3)x + (c_1\lambda + c_2 + (\lambda - 1)c_3)x^2 &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \implies \\ \left. \begin{array}{l} (1) \quad 2c_1 + c_2 + c_3 = a_0 \\ (2) \quad c_1 + \lambda c_2 - 2c_3 = a_1 \\ (3) \quad c_1\lambda + c_2 + (\lambda - 1)c_3 = a_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(1)-(2)} \\ \xrightarrow{(3)-\lambda(2)} \end{array} & \left. \begin{array}{l} c_2(1 - 2\lambda) + 5c_3 = a_0 - 2a_1 \\ c_1 + \lambda c_2 - 2c_3 = a_1 \\ c_2(1 - \lambda^2) + (3\lambda - 1)c_3 = a_2 - \lambda a_1 \end{array} \right\} \\ \underline{c_2(1 - 2\lambda)(3\lambda - 1) + 5(3\lambda - 1)c_3 = (a_0 - 2a_1)(3\lambda - 1)} &\implies [(1 - 2\lambda)(3\lambda - 1) - 5(1 - \lambda^2)]c_2 = (a_0 - 2a_1)(3\lambda - 1) - 5a_2 + 5\lambda a_1 \\ \underline{5c_2(1 - \lambda^2) + 5(3\lambda - 1)c_3 = 5a_2 - 5\lambda a_1} &\implies (\lambda - 2)(\lambda - 3)c_2 = (a_0 - 2a_1)(3\lambda - 1) - 5a_2 + 5\lambda a_1 \\ &\implies c_2 = \frac{(a_0 - 2a_1)(3\lambda - 1) - 5a_2 + 5\lambda a_1}{(\lambda - 2)(\lambda - 3)} \quad (\lambda \neq 2) \wedge (\lambda \neq 3) \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{L} = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

(3) Si \mathbb{V} un \mathbb{R} espacio vectorial, y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{V}$. Si definimos $\beta = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ tal que $w_i = \sum_{j=1}^i (-1)^j v_j$, para $i = 1, 2, 3, 4$ entonces demuestre que

$$\alpha \text{ sistema de generadores de } \mathbb{V} \implies \beta \text{ sistema de generadores de } \mathbb{V}$$

Solución

En primer lugar, tenemos que por definición.

$$\begin{aligned} w_1 &= -v_1 \\ w_2 &= -v_1 + v_2 \\ w_3 &= -v_1 + v_2 - v_3 \\ w_4 &= -v_1 + v_2 - v_3 + v_4 \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, si $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es un sistema de generadores existen escalares c_1, c_2, c_3 , y c_4 tales que

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 \quad (*)$$

Finalmente, para verificar si β es un sistema de generadores, intentamos resolver la ecuación

$$u = a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + a_4w_4 \quad (**)$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + a_4w_4 = u &\implies a_1(-v_1) + a_2(-v_1 + v_2) + a_3(-v_1 + v_2 - v_3) + a_4(-v_1 + v_2 - v_3 + v_4) = u \\ &\implies (-a_1 - a_2 - a_3 - a_4)v_1 + (a_2 + a_3 + a_4)v_2 + (-a_3 - a_4)v_3 + a_4v_4 = u \end{aligned}$$

$$\alpha \xrightarrow{\text{de } (*)} \left. \begin{array}{l} -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = c_1 \\ a_2 + a_3 + a_4 = c_2 \\ -a_3 - a_4 = c_3 \\ a_4 = c_4 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} a_4 = c_4 \\ a_3 = -c_3 - c_4 \\ a_2 = c_2 + c_3 \\ a_1 = -c_1 - c_2 \end{cases}$$

Así que sustituyendo en (**) tenemos que

$$u = (-c_1 - c_2)w_1 + (c_2 + c_3)w_2 + (-c_3 - c_4)w_3 + c_4w_4$$