**Universidad de Santiago de Chile**
**Departamento de Matemática**
**A. Matemático DIE**

**Una Solución del Taller N° 1**
**Profesor Ricardo Santander Baeza**[1]
**Martes 03 de Abril del 2018**

**El trabajo solidario es lo único**
**que hace humano al ser humano**

## 1. Algunas sugerencias

- Lean cuidadosamente el problema
- Reconozcan lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a ustedes se les consulta.
- Traten de entender en la forma más clara para ustedes, lo que se les pide, en particular si pueden usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!. Este acto nunca estará de más.
- Analicen cuidadosamente sus datos extrayendo la información que corresponde, orientados por su entendimiento de lo que deben probar.

## 2. Objetivos

- Fomentar el **trabajo en equipo.**
- Estimular **la comprensión de lectura** en problemas matemáticos.
- Clasificar después de leer el problema, **entre información y resultado pedido.**
- Estimular **el uso de una sintaxis adecuada** en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos
- Aprender a **generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente)**, para responder al problema planteado.

## 3. Ejercicios Propuestos

(1) Si $\mathbb{W} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t=0 \wedge x-2y+z-t=0\}$ entonces demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$.

Una solución. Sabemos que

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} & \Longleftrightarrow & u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ x+y-z+t=0 \wedge x-2y+z-t=0 \\
& \Longleftrightarrow & u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ \left.\begin{array}{cccccccccc} (1) & x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ (2) & x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right| \\
& \stackrel{(2)+(1)}{\Longleftrightarrow} & u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ \left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 0\cdot z & - & 0\cdot t & = & 0 \end{array}\right| \\
& \Longleftrightarrow & u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ \left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & & & y & = & 2x \end{array}\right| \\
& \Longleftrightarrow & u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ y = 2x \wedge x + 2x - z + t = 0 \\
& \Longleftrightarrow & u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ y = 2x \wedge z = 3x + t \\
& \Longleftrightarrow & u = (x, 2x, 3x+t, t) \quad x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \\
& \Longleftrightarrow & u = (x, 2x, 3x, 0) + (0,0,t,t) \quad (x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}) \\
& \Longleftrightarrow & u = x\underbrace{(1,2,3,0)}_{\in \mathbb{W}} + t\underbrace{(0,0,1,1)}_{\in \mathbb{W}} \quad (x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{W} \quad = \quad \langle \{(1,2,3,0),(0,0,1,1)\} \rangle \leq \mathbb{R}^4$$

(2) Si $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid x+2y-z-3t=0 \wedge 2x-y-z+t=0 \wedge 3x+y-2z-2t=0 \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

Una Solución:

$$
\begin{aligned}
A\in \mathbb{W} \quad &\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge x+2y-z-3t=0\wedge 2x-y-z+t=0\wedge 3x+y-2z-2t=0\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{array}{lrcl|} (1) & x+2y-z-3t & = & 0\\ (2) & 2x-y-z+t & = & 0\\ (3) & 3x+y-2z-2t & = & 0\\ \hline \end{array}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2);\ \text{de } (2)+(3) \text{ tenemos que } \begin{array}{lrcl|} (1) & x+2y-z-3t & = & 0\\ (2) & 5x-3z-t & = & 0\\ \hline \end{array}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{array}{lrcl|} (1) & x+2y-z-3t & = & 0\\ (2) & t & = & 5x-3z\\ \hline \end{array}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & y\\ z & 5x-3z\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{array}{rcl|} x+2y-z-3(5x-3z) & = & 0\\ \hline \end{array}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & y\\ z & 5x-3z\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{array}{rcl|} x+2y-z-15x+9z & = & 0\\ \hline \end{array}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & y\\ z & 5x-3z\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{array}{rcl|} 2y-14x+8z & = & 0\\ \hline \end{array}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & y\\ z & 5x-3z\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{array}{rcl|} y & = & 7x-4z\\ \hline \end{array}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & 7x-4z\\ z & 5x-3z\end{pmatrix}\wedge x\in\mathbb{R}\wedge z\in\mathbb{R}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} x & 7x\\ 0 & 5x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -4z\\ z & -3z\end{pmatrix}\wedge x\in\mathbb{R}\wedge z\in\mathbb{R}\\
&\Longleftrightarrow \quad A=x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 7\\ 0 & 5\end{pmatrix}}_{\in\mathbb{W}}+z\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}}_{\in\mathbb{W}}\wedge x\in\mathbb{R}\wedge z\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{W} &= \left\{x\begin{pmatrix} 1 & 7\\ 0 & 5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\wedge z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 & 7\\ 0 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}\right\rangle \le \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)
\end{aligned}
$$

(3) Sea $\alpha=\{v_1,v_2,v_3\}\subset\mathbb{R}^3$ y $\beta=\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\subset\mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle=\langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle$$

Solución. Observen lo siguiente

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1\cdot v_1+0\cdot(v_1+v_2)+0\cdot(v_1+v_2+v_3)\in\langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle\\
v_2 &= (-1)v_1+1\cdot(v_1+v_2)+0\cdot(v_1+v_2+v_3)\in\langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle\\
v_3 &= 0\cdot v_1+(-1)(v_1+v_2)+1\cdot(v_1+v_2+v_3)\in\langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle
\end{aligned}
$$

Como, $\langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle\le\mathbb{V}$ entonces para todo $a_1\in\mathbb{R},a_2\in\mathbb{R},a_3\in\mathbb{R}$

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\in\langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle\Longrightarrow\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle\subset\langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1\cdot v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3\in\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle\\
v_1+v_2 &= 1\cdot v_1+1\cdot v_2+0\cdot v_3\in\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle\\
v_1+v_2+v_3 &= 1\cdot v_1+1\cdot v_2+1\cdot v_3\in\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle
\end{aligned}
$$

Como, $\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle\le\mathbb{V}$ entonces para todo $c_1\in\mathbb{R},c_2\in\mathbb{R},c_3\in\mathbb{R}$

$$c_1v_1+c_2(v_1+v_2)+c_3(v_1+v_2+v_3)\in\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle\Longrightarrow\langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle\subset\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle$$

Luego

$$\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle = \langle\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\}\rangle$$