Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una solución de la Pep N°3
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Martes 02 de Enero del 2018

El trabajo solidario y honesto hace humano al ser humano

(1) Si $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y) = (2x-3y, x+2y, x-y)$ entonces

a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

Una solución.
Si $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces debemos mostrar en primer lugar que $T(u+v) = T(u) + T(v)$. Así que

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2)\\
&= (2(x_1+x_2) - 3(y_1+y_2), x_1+x_2+2(y_1+y_2), x_1+x_2-(y_1+y_2))\\
&= (2x_1+2x_2-3y_1-3y_2, x_1+x_2+2y_1+2y_2, x_1+x_2-y_1-y_2)\\
&= (2x_1-3y_1+2x_2-3y_2, x_1+2y_1+x_2+2y_2, x_1-y_1+x_2-y_2)\\
&= (2x_1-3y_1, x_1+2y_1, x_1-y_1) + (2x_2-3y_2, x_2+2y_2, x_2-y_2)\\
&= T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)\\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

Luego, $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

En segundo lugar, para $\lambda \in \mathbb{R}$ debemos mostrar que, $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ entonces

$$\begin{aligned}
T(\lambda u) &= T(\lambda x_1, \lambda y_1)\\
&= (2\lambda x_1 - 3\lambda y_1, \lambda x_1 + 2\lambda y_1, \lambda x_1 - \lambda y_1)\\
&= (\lambda(2x_1-3y_1), \lambda(x_1+2y_1), \lambda(x_1-y_1))\\
&= \lambda(2x_1-3y_1, x_1+2y_1, x_1-y_1)\\
&= \lambda T(x_1,y_1)\\
&= \lambda T(u)
\end{aligned}$$

Luego, $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

b) Determine $\ker(T)$

Una solución. Aplicando la definición de núcleo de T obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
u \in \ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^2 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge T(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (2x-3y, x+2y, x-y) = (0,0,0)\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left.\begin{array}{rcl} 2x-3y &=& 0\\ x+2y &=& 0\\ x-y &=& 0 \end{array}\right|\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left.\begin{array}{rcl} -y &=& 0\\ 3y &=& 0\\ x &=& y \end{array}\right|\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x = y = 0\\
&\iff u = (0,0)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\ker(T) = \{(0,0)\}$$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

c) ¿$(1,1,0) \in$ Img (T).? Justifique su respuesta usando argumentos algebraicos.

Una solución. Por definición de Img(T) tenemos que

$$\begin{aligned}
(1,1,0) \in \mathrm{Img}(T) &\iff (\exists (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2): \ T(x,y) = (1,1,0)\\
&\iff (\exists (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2): \ (2x-3y, x+2y, x-y) = (1,1,0)\\
&\iff (\exists (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2): \ \left.\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 1\\ x+2y & = & 1\\ x-y & = & 0 \end{array}\right|\\
&\iff (\exists (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2): \ \left.\begin{array}{rcl} -y & = & 1\\ 3y & = & 1\\ x & = & y \end{array}\right|\\
&\iff (\exists (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2): \ \left.\begin{array}{rcl} y & = & -1\\ y & = & \frac{1}{3}\\ x & = & y \end{array}\right| \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)
\end{aligned}$$

Lueg, $(1,1,0) \notin \mathrm{Img}(T)$

(2) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y,z) = (x+y+\lambda z, x-\lambda y - z)$ entonces

a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$

Una solución.
Si $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ entonces debemos mostrar en primer lugar que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Así que

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)\\
&= (x_1+x_2+y_1+y_2+\lambda(z_1+z_2), x_1+x_2-\lambda(y_1+y_2)-(z_1+z_2))\\
&= (x_1+y_1+\lambda z_1+x_2+y_2+\lambda z_2, x_1-\lambda y_1-z_1+x_2-\lambda y_2-z_2)\\
&= (x_1+y_1+\lambda z_1, x_1-\lambda y_1-z_1) + (x_2+y_2+\lambda z_2), x_2-\lambda y_2-z_2)\\
&= T(x_1,y_1,z_1) + T(x_2,y_2,z_2)\\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

Luego, $T(u+v) = T(u) + T(v)$

En segundo lugar, para $\gamma \in \mathbb{R}$ debemos mostrar que, $T(\gamma u) = \gamma T(u)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
T(\gamma u) &= T(\gamma x_1, \gamma y_1, \gamma z_1)\\
&= (\gamma x_1 + \gamma y_1 + \lambda\gamma z_1, \gamma x_1 - \lambda\gamma y_1 - \gamma z_1)\\
&= (\gamma(x_1+y_1+\lambda z_1), \gamma(x_1-\lambda y_1-z_1))\\
&= \gamma(x_1+y_1+\lambda z_1, x_1-\lambda y_1-z_1)\\
&= \gamma T(x_1,y_1,z_1)\\
&= \gamma T(u)
\end{aligned}$$

Luego, $T(\gamma u) = \gamma T(u)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

b) Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es sobreyectiva}\}$

Una solución. Observamos que

$$\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge T \text{ es sobreyectiva}$$

Luego, para $\lambda \in \mathbb{S}$ y para cada $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ debe tener solución en $\mathbb{R}^3$ la ecuación:

$$T(x,y,z) = (a,b)$$

Pero entoces para $\lambda \in \mathbb{S}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
T(x,y,z)=(a,b) &\iff (x+y+\lambda z, x-\lambda y-z)=(a,b)\\
&\iff \left.\begin{array}{lrcl} (1) & x+y+\lambda z &=& a\\ (2) & x-\lambda y-z &=& b\end{array}\right|\\
&\overset{(1)-(2)}{\iff} \left.\begin{array}{rcr} y+\lambda y+z+\lambda z &=& a-b\\ x-\lambda y-z &=& b\end{array}\right|\\
&\iff \left.\begin{array}{rcr} (\lambda+1)(y+z) &=& a-b\\ x-\lambda y-z &=& b\end{array}\right| \qquad (*)
\end{aligned}$$

Caso 1: Si $\lambda+1=0$ entonces de $(*)$ sigue que

$$\left.\begin{array}{rcr} 0 &=& a-b\\ x+y-z &=& b\end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{rcr} a &=& b\\ x+y-z &=& b\end{array}\right|$$

Luego, el sistema sólo tiene solución cuando $u=(a,a)$, así que $\lambda=-1\notin\mathbb{S}$.

Caso 2: Si $\lambda+1\neq 0$ entonces de $(*)$ sigue que

$$\left.\begin{array}{rcr} y+z &=& \frac{a-b}{(\lambda+1)}\\ x-\lambda y-z &=& b\end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{rcr} y &=& \frac{a-b}{(\lambda+1)}-z\\ x-\lambda y-z &=& b\end{array}\right| \iff$$

$$\left.\begin{array}{rcr} y &=& \frac{a-b}{(\lambda+1)}-z\\ x &=& b+\lambda y+z\end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{rcl} y &=& \frac{a-b}{(\lambda+1)}-z\\ x &=& b+\frac{\lambda(a-b)}{(\lambda+1)}-(\lambda-1)z\end{array}\right|$$

Luego,

$$\mathbb{S} = \mathbb{R}-\{-1\}$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ tal que T no nula. Si $\alpha=\{v_1,v_2,v_3\}$ es un subconjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$ entonces demuestre que

$$\ker(T)=\{0_{\mathbb{V}}\} \implies T(\alpha)=\{T(v_1),T(v_2),T(v_3)\} \text{ es linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

Una solución. Debemos demostrar que $T(\alpha)$ es un conjunto linealmente independiente, y entonces procedemos usando la definición de un tal concepto, Así que si suponemos que

$$aT(v_1)+bT(v_2)+cT(v_3) = 0_{\mathbb{V}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
aT(v_1)+bT(v_2)+cT(v_3)=0_{\mathbb{V}} &\implies T(av_1)+T(bv_2)+T(cv_3)=0_{\mathbb{V}}\\
&\implies T(av_1+bv_2+cv_3)=0_{\mathbb{V}}\\
&\implies (av_1+bv_2+cv_3)\in\ker(T)\\
&\overset{\ker(T)=\{0_{\mathbb{V}}\}}{\implies} av_1+bv_2+cv_3=0_{\mathbb{V}}\\
&\overset{\alpha\ Li}{\implies} a=b=c=0
\end{aligned}$$

Luego, $T(\alpha)$ es un conjunto linealmente independiente.