Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una solución de la Pep N° 2
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Viernes 8 de Junio del 2018

(1) Dada la base $\alpha = \{(2,1,0),(3,1,2),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ entonces respecto del producto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Determine α' base ortogonal obtenida de la base α, vía el proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt.

Solución. Aplicamos el proceso de G-S y para ello definimos:

$$\begin{aligned} v_1' &= (2,1,0) \\ v_2' &= (3,1,2) - \frac{\langle (3,1,2),(2.1.0)\rangle}{\langle (2.1.0),(2,1,0)\rangle}(2,1,0) = (3,1,2) - \frac{7}{5}(2,1,0) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 2\right) = \frac{1}{5}(1,-2,10) \end{aligned}$$

Ahora podemos escoger a $v_2' = (1,-2,10)$ y entonces

$$\begin{aligned} v_3' &= (1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1),(1,-2,10)\rangle}{\langle (1,-2,10),(1,-2,10)\rangle}(1,-2,10) - \frac{\langle (1,1,1),(2,1,0)\rangle}{\langle (2,1,0),(2,1,0)\rangle}(2,1,0) \\ &= (1,1,1) - \frac{9}{105}(1,-2,10) - \frac{3}{5}(2,1,0) = (1,1,1) - \frac{3}{35}(1,-2,10) - \frac{3}{5}(2,1,0) \\ &= \left((1 - \frac{3}{35} - \frac{6}{5}, 1 + \frac{6}{35} - \frac{3}{5}, 1 - \frac{6}{7}\right) = \left((\frac{35-3-42}{35}, \frac{35+6-21}{35}, \frac{1}{7}\right) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}(-2,4,1) \end{aligned}$$

Luego, una base ortogonal pedida es

$$\alpha' = \{(2,1,0),(1,-2,10),(-2,4,1)\}$$

(2) Si consideramos en $\mathbb{R}^4$ el producto interno usual y el subespacio

$$\mathbb{W} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+2z-t = 0 \wedge x-y+z+t = 0\right\}$$

Entonces

a) Determine una proyección ortogonal $P_{\mathbb{W}}$ de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{W}$

Solución. Determinamos en primer lugar una base de $\mathbb{W}$. e.e.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x+y+2z-t = 0 \wedge x-y+z+t = 0 \\ &\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{|rcl|} x+y+2z-t &=& 0 \\ x-y+z+t &=& 0 \end{array} \\ &\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{|rcl|} x+y+2z-t &=& 0 \\ 2x+3z &=& 0 \end{array} \\ &\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{|rcl|} x+y+2z-t &=& 0 \\ z &=& -\frac{2}{3}x \end{array} \\ &\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{|rcl|} x+y-\frac{4}{3}x-t &=& 0 \\ z &=& -\frac{2}{3}x \end{array} \\ &\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{|rcl|} y &=& \frac{1}{3}x+t \\ z &=& -\frac{2}{3}x \end{array} \\ &\Leftrightarrow u = \left(x, \frac{1}{3}x+t, -\frac{2}{3}x, t\right); \quad x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow u = \left(x, \frac{1}{3}x, -\frac{2}{3}x, 0\right) + (0,t,0,t); \quad x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow u = x\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right) + t(0,1,0,1); \quad x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

[1]El problema (1) vale 2 puntos. El problema (2) vale 3 puntos. El problema 3 vale 1 punto
Tiempo 90'

Luego $\mathbb{W}=\langle\{(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0),(0,1,0,1)\}\rangle$. Finalmente $\alpha=\{(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0),(0,1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{W}$, pues

$$x\left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)+t\,(0,1,0,1)=(0,0,0,0)\Rightarrow\left(x,\frac{1}{3}x+t,-\frac{2}{3}x,t\right)=(0,0,0,0)\Rightarrow x=t=0$$

Ahora, para concluir aplicamos el proceso de Gram-Schmidt y para ello definimos:

$$\begin{aligned}
u_1' &= (0,1,0,1)\\
u_2' &= \left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)-\frac{\langle(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0),(0,1,0,1)\rangle}{\langle(0,1,0,1),(0,1,0,1)\rangle}(0,1,0,1)=\left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)-\frac{1}{6}(0,1,0,1)\\
&= \left(1,\frac{1}{6},-\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}(6,1,-4,-1)
\end{aligned}$$

Luego, $\alpha'=\{(0,1,0,1),(6,1,-4,-1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{W}$. Así que ahora definimos la proyección ortogonal

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(x,y,z,t) &= \frac{\langle(x,y,z,t),(0,1,0,1)\rangle}{\|(0,1,0,1)\|^2}(0,1,0,1)+\frac{\langle(x,y,z,t),(6,1,-4,-1)\rangle}{\|(6,1,-4,-1)\|^2}(6,1,-4,-1)\\
&= \left(\frac{y+t}{2}\right)(0,1,0,1)+\left(\frac{6x+y-4z-t}{54}\right)(6,1,-4,-1)\\
&= \left(\frac{6x+y-4z-t}{9},\frac{y+t}{2}+\frac{6x+y-4z-t}{54},\frac{-12x-2y+8z+2t}{27},\frac{y+t}{2}+\frac{-6x-y+4z+t}{54}\right)\\
&= \left(\frac{6x+y-4z-t}{9},\frac{27y+27t+6x+y-4z-t}{54},\frac{-12x-2y+8z+2t}{27},\frac{27y+27t-6x-y+4z+t}{54}\right)\\
&= \left(\frac{6x+y-4z-t}{9},\frac{28y+26t+6x-4z}{54},\frac{-12x-2y+8z+2t}{27},\frac{26y+28t-6x+4z}{54}\right)
\end{aligned}$$

b) Determine $d((1,1,1,1),\mathbb{W})$

Solución. Aplicamos la definición y obtenemos que

$$\begin{aligned}
d((1,1,1,1),\mathbb{W}) &= \|(1,1,1,1)-P_{\mathbb{W}}(1,1,1,1)\|=\left\|(1,1,1,1)-\left(\frac{2}{9},\frac{56}{54},-\frac{4}{27},\frac{52}{54}\right)\right\|=\left\|\left(\frac{7}{9},-\frac{1}{27},\frac{31}{27},\frac{1}{27}\right)\right\|\\
&= \left\|\left(\frac{7}{9},-\frac{1}{27},\frac{31}{27},\frac{1}{27}\right)\right\|=\frac{1}{27}\|(21,-1,31,1)\|=\frac{1}{9}\sqrt{156}
\end{aligned}$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con un producto interno $\langle,\rangle$ y $\alpha=\{v_1,v_2\}\subset\mathbb{V}$, donde $v_1\neq 0_{\mathbb{V}}$ y $v_2\neq 0_{\mathbb{V}}$. Si aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto α, obtenemos el conjunto $\alpha'=\{v_1',v_2'\}$, donde $v_1'=v_1$. Demuestre, si es posible que

$$v_2'=0_{\mathbb{V}}\quad\Longrightarrow\quad\alpha\text{ es un conjunto linealmente dependiente}$$

Solución, por definición tenemos que

$$\begin{aligned}
a_1v_1+a_2v_2=0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a_1v_1'+a_2(v_2'-\frac{\langle v_2,v_1'\rangle}{\langle v_1',v_1'\rangle}v_1'=0_{\mathbb{V}}\Longrightarrow a_1v_1'-a_2\frac{\langle v_2,v_1'\rangle}{\langle v_1',v_1'\rangle}v_1'=0_{\mathbb{V}}\\
&\Longrightarrow \left(a_1-a_2\frac{\langle v_2,v_1'\rangle}{\langle v_1',v_1'\rangle}\right)v_1'=0_{\mathbb{V}}\\
&\Longrightarrow \left(a_1-a_2\frac{\langle v_2,v_1'\rangle}{\langle v_1',v_1'\rangle}\right)=0\qquad(\text{Pues }v_1'=v_1\neq 0_{\mathbb{V}})\\
&\Longrightarrow a_1=a_2\frac{\langle v_2,v_1'\rangle}{\langle v_1',v_1'\rangle}
\end{aligned}$$

Luego,

$$a_2\frac{\langle v_2,v_1'\rangle}{\langle v_1',v_1'\rangle}v_1+a_2v_2=0_{\mathbb{V}}\quad(a_2\in\mathbb{R})$$

Así que α es linealmente dependiente.
Alternativa:

$$v_2'=v_2-\left(\frac{\langle v_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\right)v_1\quad\Longrightarrow\quad 0_{\mathbb{V}}=v_2-\left(\frac{\langle v_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\right)v_1\Longrightarrow v_2=\underbrace{\left(\frac{\langle v_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\right)}_{\neq 0}v_1$$

Así que α es linealmente dependiente.