Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una solución de la Pep N° 2
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Martes 12 de Diciembre del 2017

El trabajo solidario hace humano al humano

(1) Si $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\beta = \{v_1 - v_2 + v_3, 2v_1 + v_2 - 2v_3, v_1 - v_3\}$ son dos bases del $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$ entonces determine la matriz cambio de base: $[I]_\beta^\alpha$

Una solución. Observamos que por definición

$$\begin{aligned} [I]_\beta^\alpha &= \left([v_1 - v_2 + v_3]_\alpha \quad [2v_1 + v_2 - 2v_3]_\alpha \quad [v_1 - v_3]_\alpha\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ y $\alpha = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ entonces determine si es posible, una base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $A = [I]_\alpha^\beta$

Una solución. Observamos que

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Luego, no existe una tal base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $A = [I]_\alpha^\beta$

(3) Dado el subespacio $\mathbb{W} = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Respecto del producto interno usual de $\mathbb{R}^3$:

a) Determine una base ortogonal para $\mathbb{W}$

Una solución. De acuerdo a la definición de $\mathbb{W}$ tenemos que

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ &\iff u = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ a_0 = a_1 - a_2 \\ &\iff u = (a_1 - a_2, a_1, a_2); \quad a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R} \\ &\iff u = (a_1, a_1, 0) + (-a_2, 0, a_2); \quad a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R} \\ &\iff u = a_1(1,1,0) + a_2(-1,0,1); \quad a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{W} = \langle\{\underbrace{(1,1,0)}_{\mathbb{W}}, \underbrace{(-1,0,1)}_{\mathbb{W}}\}\rangle$$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

Ahora observamos que $\alpha = \{(1,1,0), (-1,0,1)\}$ es linealmente independiente, pues
$a_1(1,1,0) + a_2(-1,0,1) = (0,0,0) \implies (a_1 - a_2, a_1, a_2) = (0,0,0) \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0$
Luego, α es una base de $\mathbb{W}$, pero no una base ortogonal pues,

$$\langle (1,1,0), (-1,0,1) \rangle = -1 \neq 0$$

entonces aplicamos Gram Schmidt y hacemos:

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1,1,0) \\
u_2 &= (-1,0,1) - \frac{\langle (-1,0,1), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle}(1,1,0) = (-1,0,1) - \frac{-1}{2}(1,1,0) \\
&= (-1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(-1,1,2)
\end{aligned}$$

Luego, podemos escoger la base ortogonal para $\mathbb{W}$

$$\alpha' = \{(1,1,0), (-1,1,2)\}$$

Ya que

$$\langle (1,1,0), (-1,1,2) \rangle = -1 + 1 + 0 = 0$$

b) Determine $\mathbb{P}_{\mathbb{W}}$. La proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{W}$

Una solución. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathbb{W}}(x,y,z) &= \frac{\langle (x,y,z), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle}(1,1,0) + \frac{\langle (x,y,z), (-1,1,2) \rangle}{\langle (-1,1,2), (-1,1,2) \rangle}(-1,1,2) \\
&= \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1,0) + \left(\frac{-x+y+2z}{6}\right)(-1,1,2) \\
&= \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y-2z}{6}, \frac{x+y}{2} + \frac{-x+y+2z}{6}, \frac{-x+y+2z}{3}\right) \\
&= \left(\frac{3x+3y+x-y-2z}{6}, \frac{3x+3y-x+y+2z}{6}, \frac{-x+y+2z}{3}\right) \\
&= \left(\frac{4x+2y-2z}{6}, \frac{2x+4y+2z}{6}, \frac{-x+y+2z}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2x+y-z}{3}, \frac{x+2y+z}{3}, \frac{-x+y+2z}{3}\right)
\end{aligned}$$

Observamos finalmente que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathbb{W}}(1,1,0) &= (1,1,0) \\
\mathbb{P}_{\mathbb{W}}(-1,1,2) &= (-1,1,2)
\end{aligned}$$

c) Determine $d(1,2,1), \mathbb{W})$. La distancia de $(1,2,1)$ a $\mathbb{W}$

Una solución. Finalmente tenemos también por definición que

$$\begin{aligned}
d(1,2,1), \mathbb{W}) &= \|(1,2,1) - \mathbb{P}_{\mathbb{W}}(1,2,1)\| \\
&= \|(1,2,1) - (1,2,1)\| \\
&= 0
\end{aligned}$$