**Universidad de Santiago de Chile**
**Departamento de Matemática**
**A. Matemático DIE**

**Una Solución de la Pep N° 1**
**Profesor Ricardo Santander Baeza**[1]
**Martes 16 de Mayo del 2017**

(1) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + 4z = 0 \wedge 2x - y + z = 0 \wedge 3x + 2y + 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + 3y + 4z = 0 \wedge 2x - y + z = 0 \wedge 3x + 2y + 5z = 0 \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + 4z &=& 0 \\ 2x - y + z &=& 0 \\ 3x + 2y + 5z &=& 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + 4z &=& 0 \\ 2x - y + z &=& 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + 4z &=& 0 \\ 6x - 3y + 3z &=& 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + 4z &=& 0 \\ 6x - 3y + 3z &=& 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + 4z &=& 0 \\ 7x + 0y + 7z &=& 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + 4z &=& 0 \\ z &=& -x \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + 4(-x) &=& 0 \\ z &=& -x \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} 3y - 3x &=& 0 \\ z &=& -x \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \left.\begin{array}{rcl} y &=& x \\ z &=& -x \end{array}\right| \\
&\iff u = (x, x, -x, t) : \quad (x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}) \\
&\iff u = (x, x, -x, 0) + (0, 0, 0, t) : \quad (x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}) \\
&\iff u = x(1, 1, -1, 0) + t(0, 0, 0, 1) : \quad (x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\mathbb{W} \;=\; \langle\{(1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}\rangle \leq \mathbb{R}^4$$

b) Determine una base de $\mathbb{W}$
Del punto anterior observamos que $\alpha = \{(1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{W}$, además como-

$$a(1, 1, -1, 0) + b(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \;\Rightarrow\; (a, a, -a, t) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow a = b = 0$$

entonces $\alpha$ también es linealmente independiente y por ende una base.

[1]Cada problema vale 2,0 puntos
Tiempo 90'

(2) Si $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ no es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)\}$$

Una solución: Debemos determinar el conjunto $\mathbb{S}$ y en consecuencia

$$\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ no es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \qquad (*)$$

De $(*)$ sigue que para ese $\lambda$ basta mostrar que $\alpha$ no es linealmente independiente, así que es lo que haremos, y para ello partimos suponiendo que

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Luego,

$$(**) \Longrightarrow \begin{array}{lcl|} 2a_1 + 3a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_2 + \lambda a_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl|} 2a_1 + 3a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 & = & 0 \\ 2a_2 + \lambda a_3 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{lcl|} a_2 - a_3 & = & 0 \\ 2a_2 + \lambda a_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl|} 2a_2 - 2a_3 & = & 0 \\ 2a_2 + \lambda a_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow (\lambda + 2)a_3 = 0 \quad (***)$$

De $(***)$ sigue que si $\lambda + 2 = 0$ entonces "$a_3$ puede asumir cualquier valor real".
'

Conclusión: Ai $\lambda = -2$ entonces $\alpha$ es linealmente dependiente y por tanto no es base.
Así que,

$$\mathbb{S} = \{-2\}$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y si consideramos los conjuntos

$$\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{V} \quad \wedge \quad \beta = \{v_1, v_1 - v_2, v_1 - v_2 + v_3\} \subset \mathbb{V}$$

Entonces demuestre, si es posible, que

$$\beta \text{ Sistema de generadores para } \mathbb{V} \Longrightarrow \alpha \text{ Sistema de generadores para } \mathbb{V}$$

Una solución: Si $\beta$ es un sistema de generadores entonces para cada $u \in \mathbb{V}$ existen escalares $c_1, c_2$ y $c_3$ tal que

$$u = c_1 v_1 + c_2(v_1 - v_2) + c_3(v_1 - v_2 + v_3) \qquad (*)$$

De $(*)$ sigue que, para cada $u \in \mathbb{V}$

$$\begin{aligned} u &= c_1 v_1 + c_2 v_1 - c_2 v_2 + c_3 v_1 - c_3 v_2 + c_3 v_3 \\ &= \underbrace{(c_1 + c_2 + c_3)}_{a_1} v_1 + \underbrace{(-c_2 - c_3)}_{a_2} v_2 + \underbrace{c_3}_{a_3} v_3 \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha$ es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$, pues para cada $u \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3; \text{ donde, } \left\{ \begin{array}{lcl} a_1 & = & c_1 + c_2 + c_3 \\ a_2 & = & -c_2 - c_3 \\ a_3 & = & c_3 \end{array} \right.$$