**Universidad de Santiago de Chile**
**Departamento de Matemática**
**A. Matemático DIE**

**Una Solución de la Pep N° 1**
**Profesor Ricardo Santander Baeza[1]**
**Viernes 27 de Abril del 2018**

**El trabajo solidario hace humano al humano**

(1) Si definimos el conjunto

$$\mathbb{W} \quad = \quad \left\{A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Entonces

a) Demuestre que $\mathbb{W}\le \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Una solución En primer lugar observamos que

$$(0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}\Longrightarrow (0)\in\mathbb{W}\Longrightarrow \mathbb{W}\neq\emptyset$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
A\in\mathbb{W} &\iff A=(a_{ij})\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \left.\begin{array}{rcl}a+b&=&0\\c+d&=&0\end{array}\right|\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge b=-a\wedge c=-d\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a&-a\\-d&d\end{pmatrix};\quad (a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R})\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a&-a\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-d&d\end{pmatrix};\quad (a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R})\\
&\iff A=a\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}}_{\in\mathbb{W}}+d\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}}_{\in\mathbb{W}};\quad (a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbb{W} \quad = \quad \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle\le \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

b) Determine una base de $\mathbb{W}$

Una solución. Observamos en primer lugar que

$$\alpha \quad = \quad \left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$$

Es un sistema de generadores para $\mathbb{W}$, así que sólo resta mostar que $\alpha$ es un conjunto linealmente independiente, y para verlo basta observar que:

$$a_1\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow \begin{pmatrix}a_1&-a_1\\-a_2&a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a_1=a_2=0$$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $\alpha = \{u, v\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si definimos $\beta = \{\lambda u + v, u + \lambda v\} \subset \mathbb{V}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \beta \text{ es una base de } \mathbb{V}\}$$

Una solución. Debemos estudiar los elementos del conjunto $\mathbb{S}$, y entonces

$$\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \beta \text{ es una base de } \mathbb{V}$$

Pero como $\alpha$ es una base entonces la dimensión de $\mathbb{V} = 2$ y para que $\beta$ sea base basta que sea Linealmente independiente o un sistema de generadores, haciendo uso de un corolario del teorema mágico.

Por tanto podemos verificar para $\lambda \in \mathbb{S}$ bajo que condiciones $\beta$ es linealmente independiente, y en consecuencia si suponemos que $c_1(\lambda u + v) + c_2(u + \lambda v) = 0_{\mathbb{V}}$ entonces

$$c_1(\lambda u + v) + c_2(u + \lambda v) = 0_{\mathbb{V}} \implies c_1\lambda u + c_1 v + c_2 u + c_2\lambda v = 0_{\mathbb{V}} \implies (c_1\lambda + c_2)u + (c_1 + c_2\lambda)v = 0_{\mathbb{V}}$$

$$\overset{\alpha\ Li}{\implies} \left.\begin{array}{rcl} c_1\lambda + c_2 & = & 0 \\ c_1 + c_2\lambda & = & 0 \end{array}\right| \implies \left.\begin{array}{rcl} c_1\lambda^2 + c_2\lambda & = & 0 \\ c_1 + c_2\lambda & = & 0 \end{array}\right| \implies c_1\lambda^2 - c_1 = 0 \implies c_1(\lambda^2 - 1) = 0$$

Luego $c_1 = 0$ si $(\lambda^2 - 1) \neq 0$, es decir si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$. Además si $c_1 = 0$ entonces $c_2 = 0$ y $\beta$ es linealmente independiente y por ende una base si y sólo si $\lambda^2 - 1 \neq 0$, e.e. $\lambda \neq 1 \vee \lambda \neq -1$. Así que

$$\mathbb{S} \;=\; \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

(3) Si definimos $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ no sea una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)\}$$

Una solución. Debemos estudiar los elementos del conjunto $\mathbb{S}$ y entonces iniciamos nuestro protocolo:

$$\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \;\wedge\; \alpha \text{ no sea una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \qquad (*)$$

Entonces de $(*)$ sigue que basta verificar que para $\lambda \in \mathbb{S}$, $\alpha$ no es Linealmente independiente o no es un sistema de generadores, pues como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)) = 3$ y la cardinalidad de $\alpha$ es también 3 entonces en virtud del Teorema Mágico, para ser base bastaría que fuera linealmente independiente o un sistema de generadores.

En consecuencia, verificaremos cuando $\alpha$ no es linealmente independiente, y

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a - 2b + 3c \\ -\lambda a + 4b + c \\ 3a - 6b + 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & a & - & 2b & + & 3c & = & 0 \\ (2) & -\lambda a & + & 4b & + & c & = & 0 \\ (3) & 3a & - & 6b & + & 4c & = & 0 \end{array}\right| \overset{(3)-(1)}{\implies} \left.\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & a & - & 2b & + & 3c & = & 0 \\ (2) & -\lambda a & + & 4b & + & c & = & 0 \\ (4) & 2a & - & 4b & + & c & = & 0 \end{array}\right| \overset{(4)-(2)}{\implies}$$

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & a & - & 2b & + & 3c & = & 0 \\ (2) & -\lambda a & + & 4b & + & c & = & 0 \\ (4) & 2a + \lambda a & - & 8b & & & = & 0 \end{array}\right| \implies \left.\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & a & - & 2b & + & 3c & = & 0 \\ (2) & -\lambda a & + & 4b & + & c & = & 0 \\ (4) & & & & & \frac{(2+\lambda)a}{8} & = & b \end{array}\right| \implies$$

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcl} (5) & a & - & \frac{(2+\lambda)a}{4} & + & 3c & = & 0 \\ (6) & -\lambda a & + & \frac{(2+\lambda)a}{2} & + & c & = & 0 \\ (4) & & & & & \frac{(2+\lambda)a}{8} & = & b \end{array}\right| \implies \left.\begin{array}{lrcrcrcl} (5) & a & - & \frac{(2+\lambda)a}{4} & + & 3c & = & 0 \\ (6) & -\lambda a & + & \frac{(2+\lambda)a}{2} & + & c & = & 0 \\ (4) & & & & & \frac{(2+\lambda)a}{8} & = & b \end{array}\right| \implies$$

$$\left.\begin{array}{lrcrcl} (5) & (2-\lambda)a & + & 12c & = & 0 \\ (6) & (2-\lambda)a & + & 2c & = & 0 \\ (4) & & & \frac{(2+\lambda)a}{8} & = & b \end{array}\right| \implies \left.\begin{array}{lrcr} (5) & (2-\lambda)a & = & -12c \\ (6) & (2-\lambda)a & = & -2c \\ (4) & \frac{(2+\lambda)a}{8} & = & b \end{array}\right| \implies$$

$$c = 0 \wedge (2-\lambda)a = 0 \wedge b = \frac{(2+\lambda)a}{8}$$

Luego, basta que $\lambda = 2$, para que $a$ sea cualquier número real en tal caso $\alpha$ es linealmente dependiente y por ende no base y la conclusión es:

$$\mathbb{S} = \{2\}$$