Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una solución de la Pep N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Martes 31 de Octubre del 2017

El trabajo solidario hace humano al humano

(1) Si $\mathbb{W} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a + 2b + 3c - 2d = 0 \wedge a - b + 2c - d = 0 \right\}$ entonces

a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Solución. Haremos uso del criterio del subespacio generado.

$$\begin{aligned}
A \in \mathbb{W} &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a + 2b + 3c - 2d = 0 \wedge a - b + 2c - d = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = -2b - 3c + 2d \wedge a = b - 2c + d \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = -2b - 3c + 2d \wedge b - 2c + d = -2b - 3c + 2d \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = -2b - 3c + 2d \wedge d = 3b + c \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = -2b - 3c + 2(3b + c) \wedge d = 3b + c \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = 4b - c \wedge d = 3b + c \\
&\iff A = \begin{pmatrix} (4b - c) & b \\ c & (3b + c) \end{pmatrix};\ b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} 4b & b \\ 0 & 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & 0 \\ c & c \end{pmatrix};\ b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \\
&\iff A = b\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \left\{ b\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \mid b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

b) Determine una base para $\mathbb{W}$

Solución. Para que $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ sea una base debemos verificar si es linealmente independiente, ya que en el punto anterior verificamos que es un sistema de generadores, pero entonces

$$b\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4b - c & b \\ c & 3b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow b = c = 0$$

Así que α es una base de $\mathbb{W}$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

(2) Si $\alpha = \{(1+\lambda, 0, 1), (2, 1, 2), (1, -1, 1-\lambda)\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces determine el conjunto.

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es un sistema de generadores}\}$$

Solución, iniciamos estudiando los elementos de $\mathbb{S}$.

$$\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ es un sistema de generadores} \qquad (*)$$

Así que para $\lambda \in \mathbb{S}$ tenemos que "debe tener, para cada $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, solución la ecuación"

$$(x, y, z) = a_1(1+\lambda, 0, 1) + a_2(2, 1, 2) + a_3(1, -1, 1-\lambda) \qquad (**)$$

En consecuencia debemos proceder a resolver dicha ecuación:

$$\begin{aligned} a_1(1+\lambda, 0, 1) + a_2(2, 1, 2) + a_3(1, -1, 1-\lambda) &= (x, y, z) \Longrightarrow \\ ((1+\lambda)a_1 + 2a_2 + a_3, a_2 - a_3, a_1 + 2a_2 + (1-\lambda)a_3) &= (x, y, z) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (1+\lambda)a_1 + 2a_2 + a_3 &=& x \\ a_2 - a_3 &=& y \\ a_1 + 2a_2 + (1-\lambda)a_3 &=& z \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} (1+\lambda)a_1 + 2a_2 + a_3 &=& x \\ 2a_2 - 2a_3 &=& 2y \\ a_1 + 2a_2 + (1-\lambda)a_3 &=& z \end{array}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& x - 2y \\ 2a_2 - 2a_3 &=& 2y \\ a_1 + (1-\lambda)a_3 + 2a_3 &=& z - 2y \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} (1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& x - 2y \\ 2a_2 - 2a_3 &=& 2y \\ a_1 + (3-\lambda)a_3 &=& z - 2y \end{array}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& x - 2y \\ 2a_2 - 2a_3 &=& 2y \\ (1+\lambda)a_1 + (1+\lambda)(3-\lambda)a_3 &=& (1+\lambda)(z-2y) \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} (1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& x - 2y \\ 2a_2 - 2a_3 &=& 2y \\ (2\lambda - \lambda^2)a_3 &=& (1+\lambda)(z-2y) - x + 2y \end{array}\right|$$

Luego, para que existan a_1, a_2 y a_3 debe suceder lo siguiente:

$$a_3 = \frac{(1+\lambda)(z-2y) - x + 2y}{\lambda(2-\lambda)}, \quad \lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 2$$

Así que,

$$\mathbb{S} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

Podemos comprobar nuestro trabajo y para ello observamos que:

Si $\lambda = 0$ tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 + 2a_2 + a_3 &=& x \\ 2a_2 - 2a_3 &=& 2y \\ a_1 + 2a_2 + a_3 &=& z \end{array}\right| \Longrightarrow x = z$$

Luego, α no genera $\mathbb{R}^3$ y $0 \notin \mathbb{S}$
Si $\lambda = 2$ tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 3a_1 + 2a_2 + a_3 &=& x \\ a_2 - a_3 &=& y \\ a_1 + 2a_2 - a_3 &=& z \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3a_1 + 3a_2 &=& x + y \\ a_2 - a_3 &=& y \\ a_1 + a_2 &=& z - y \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{x+y}{3} = z - y \Longrightarrow x + 4y - 3z = 0$$

Luego, α no genera $\mathbb{R}^3$ y $2 \notin \mathbb{S}$

Una prueba alternativa, como la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3 entonces usando nuestras herramientas concluimos que α es un sistema de generadores si y sólo si α es un conjunto Linealmente independiente, y en consecuencia determinaremos al conjunto $\mathbb{S}$ estudiando cuando α es un conjunto linealmente independiente. Por tanto usando la definición tenemos que para $\lambda \in \mathbb{S}$

$$
\begin{aligned}
a_1(1+\lambda, 0, 1) + a_2(2,1,2) + a_3(1,-1,1-\lambda) &= (0,0,0) \Longrightarrow \\
((1+\lambda)a_1 + 2a_2 + a_3, a_2 - a_3, a_1 + 2a_2 + (1-\lambda)a_3) &= (0,0,0)
\end{aligned}
$$

De donde sigue que,

$$
\left.\begin{array}{lcl}
(1+\lambda)a_1 + 2a_2 + a_3 &=& 0 \\
a_2 - a_3 &=& 0 \\
a_1 + 2a_2 + (1-\lambda)a_3 &=& 0
\end{array}\right| \Longrightarrow
\left.\begin{array}{lcl}
(1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& 0 \\
a_2 &=& a_3 \\
a_1 + (3-\lambda)a_3 &=& 0
\end{array}\right|
$$

$$
\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl}
(1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& 0 \\
a_2 &=& a_3 \\
(1+\lambda)a_1 + (1+\lambda)(3-\lambda)a_3 &=& 0
\end{array}\right|
$$

$$
\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl}
(1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& 0 \\
a_2 &=& a_3 \\
(1+\lambda)(3-\lambda)a_3 - 3a_3 &=& 0
\end{array}\right|
$$

$$
\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl}
(1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& 0 \\
a_2 &=& a_3 \\
((1+\lambda)(3-\lambda) - 3)a_3 &=& 0
\end{array}\right|
$$

$$
\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl}
(1+\lambda)a_1 + 3a_3 &=& 0 \\
a_2 &=& a_3 \\
(2\lambda - \lambda^2)a_3 &=& 0
\end{array}\right|
$$

$$
\Longrightarrow \lambda(2-\lambda) = 0 \vee a_3 = 0
$$

$$
\Longrightarrow \lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 2 \wedge a_3 = 0 \text{ (No olvide } \alpha \text{ debe ser Li.)}
$$

Y en tal caso $a_2 = 0 \wedge a_1 = 0$. Por tanto

$$
\mathbb{S} = \mathbb{R} - \{0, 2\}
$$

(3) Si $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{V}$. Si definimos $\beta = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ tal que $w_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} (-1)^j v_j$, para $i = 1, 2, 3, 4$ entonces demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \implies \beta \text{ base de } \mathbb{V}$$

Solución

En primer lugar, tenemos que por definición.

$$\begin{aligned} w_1 &= -v_1 \\ w_2 &= -v_1 + v_2 \\ w_3 &= -v_1 + v_2 - v_3 \\ w_4 &= -v_1 + v_2 - v_3 + v_4 \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, para continuar para demostrar la independencia lineal de β procedemos conforme a la definición, y a lo obtenido en (1)

$$\begin{aligned} a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + a_4w_4 = 0_{\mathbb{V}} &\implies a_1(-v_1) + a_2(-v_1 + v_2) + a_3(-v_1 + v_2 - v_3) + \\ &\quad\;\; a_4(-v_1 + v_2 - v_3 + v_4) = 0_{\mathbb{V}} \\ &\implies (-a_1 - a_2 - a_3 - a_4)v_1 + (a_2 + a_3 + a_4)v_2 + \\ &\quad\;\; (-a_3 - a_4)v_3 + a_4v_4 = 0_{\mathbb{V}} \\ &\overset{\alpha \text{ Li}}{\implies} \left.\begin{array}{rcl} -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 &=& 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 &=& 0 \\ -a_3 - a_4 &=& 0 \\ a_4 &=& 0 \end{array}\right| \implies a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0 \end{aligned}$$

Así que β es linealmente independiente

Finalmente, como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 4$ y $\#(\beta) = 4$ entonces β también es un sistema de generadores y por ende una base de $\mathbb{V}$.