Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Guía de Ejercicios: Producto interno
Análisis Matemático
Profesor Ricardo Santander Baeza
Mayo del 2018

1. Objetivos

(1) Al presentar a ustedes estos ”Ejercicios” espero que les permitan:

(a) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.
(b) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.
(c) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.
(d) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas.
(e) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y ”en lo posible haber aprehendido” de los tópicos analizados.

(2) Los conceptos escogidos en esta guía son los siguientes:

(a) Producto Interno
(b) Base Ortogonal
(c) Proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt
(d) Proyección Ortogonal
(e) Distancia a un Subespacio
(f) Complemento ortogonal de un Subespacio

(3) Además para un Espacio vectorial $\mathbb{V}$, estudiaremos la estrechísima relación que existe entre los conceptos de sistemas de coordenadas y producto interno, y para un subespacio $\mathbb{W}$, la descomposición del espacio en la forma $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$.

(4) Esperaría que no se dediquen a copiarlos y a tratar de aprenderlos de memoria, pues esto es “pan para hoy y hambre para mañana”en realidad la idea es que se implanten las conecciones neuronales que permitan aprender a relacionar regularidades entre materias aparentemente diferentes. No olviden que se espera que nuestros Estudiantes y en particular las Ingenieras e Ingenieros de la Universidad de Santiago de Chile se desenvuelvan con propiedad y soltura en situaciones de incertidumbre.

(5) Finalmente, el objetivo es que se siembre en cada Una y cada Uno de ustedes, la semilla de la responsabilidad ética que representa el trabajo bien hecho o debidamente certificado. Para ello será necesario que cada problema planteado y resuelto sea comprobado, usando su definición o alguna de sus propiedades obtenidas de la misma.

2. Ejercicios Resueltos: Producto Interno

(1) Dada la base $\alpha = \{(2,1,0),(3,1,2),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ entonces respecto del producto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Determine α' base ortogonal obtenida de la base α, vía el proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt.

Solución. Aplicamos el proceso de G-S y para ello definimos:

$$\begin{aligned}
v_1' &= (2,1,0)\\
v_2' &= (3,1,2) - \frac{\langle (3,1,2),(2.1.0)\rangle}{\langle (2.1.0),(2,1,0)\rangle}(2,1,0)\\
&= (3,1,2) - \frac{7}{5}(2,1,0)\\
&= \left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},2\right)\\
&= \frac{1}{5}(1,-2,10)
\end{aligned}$$

Ahora podemos escoger a $v_2' = (1,-2,10)$ y entonces

$$\begin{aligned}
v_3' &= (1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1),(1,-2,10)\rangle}{\langle (1,-2,10),(1,-2,10)\rangle}(1,-2,10) - \frac{\langle (1,1,1),(2,1,0)\rangle}{\langle (2,1,0),(2,1,0)\rangle}(2,1,0)\\
&= (1,1,1) - \frac{9}{105}(1,-2,10) - \frac{3}{5}(2,1,0) = (1,1,1) - \frac{3}{35}(1,-2,10) - \frac{3}{5}(2,1,0)\\
&= \left((1 - \frac{3}{35} - \frac{6}{5}, 1 + \frac{6}{35} - \frac{3}{5}, 1 - \frac{6}{7}\right)\\
&= \left(\frac{35-3-42}{35}, \frac{35+6-21}{35}, \frac{1}{7}\right)\\
&= \left(-\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)\\
&= \frac{1}{7}(-2,4,1)
\end{aligned}$$

Luego, una base ortogonal pedida es

$$\alpha' = \{(2,1,0),(1,-2,10),(-2,4,1)\}$$

(2) Si consideramos en $\mathbb{R}^4$ el producto interno usual y el subespacio

$$\mathbb{W} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+2z-t=0 \wedge x-y+z+t=0\right\}$$

Entonces

(a) Determinemos una proyección ortogonal $P_{\mathbb{W}}$ de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{W}$

Solución. Determinamos en primer lugar una base de $\mathbb{W}$. e.e.

$$
\begin{aligned}
u\in\mathbb{W} &\Leftrightarrow u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\wedge x+y+2z-t=0\wedge x-y+z+t=0\\
&\Leftrightarrow u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\wedge \begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& 0\\ x-y+z+t &=& 0\end{array}\\
&\Leftrightarrow u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\wedge \begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& 0\\ 2x+3z &=& 0\end{array}\\
&\Leftrightarrow u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\wedge \begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& 0\\ z &=& -\frac{2}{3}x\end{array}\\
&\Leftrightarrow u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\wedge \begin{array}{rcl} x+y-\frac{4}{3}x-t &=& 0\\ z &=& -\frac{2}{3}x\end{array}\\
&\Leftrightarrow u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\wedge \begin{array}{rcl} y &=& \frac{1}{3}x+t\\ z &=& -\frac{2}{3}x\end{array}\\
&\Leftrightarrow u=\left(x,\frac{1}{3}x+t,-\frac{2}{3}x,t\right);\quad x\in\mathbb{R}\wedge t\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow u=\left(x,\frac{1}{3}x,-\frac{2}{3}x,0\right)+(0,t,0,t);\quad x\in\mathbb{R}\wedge t\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow u=x\left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)+t\,(0,1,0,1);\quad x\in\mathbb{R}\wedge t\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\mathbb{W}=\left\langle\left\{\left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right),(0,1,0,1)\right\}\right\rangle
$$

Finalmente $\alpha=\left\{\left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right),(0,1,0,1)\right\}$ es una base de $\mathbb{W}$, pues

$$
\begin{aligned}
x\left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)+t\,(0,1,0,1)=(0,0,0,0) &\iff \left(x,\frac{1}{3}x+t,-\frac{2}{3}x,t\right)=(0,0,0,0)\\
&\Rightarrow\quad x=t=0
\end{aligned}
$$

Ahora, para concluir aplicamos el proceso de Gram-Schmidt y para ello definimos:

$$
\begin{aligned}
u_1' &= (0,1,0,1)\\
u_2' &= \left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)-\frac{\langle\left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right),(0,1,0,1)\rangle}{\langle(0,1,0,1),(0,1,0,1)\rangle}\,(0,1,0,1)\\
&= \left(1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)-\frac{1}{6}\,(0,1,0,1)\\
&= \left(1,\frac{1}{6},-\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}(6,1,-4,-1)
\end{aligned}
$$

Luego, $\alpha'=\{(0,1,0,1),(6,1,-4,-1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{W}$.

Así que ahora definimos la proyección ortogonal

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(x,y,z,t) &= \frac{\langle (x,y,z,t),(0,1,0,1)\rangle}{\|(0,1,0,1)\|^2}(0,1,0,1) + \frac{\langle (x,y,z,t),(6,1,-4,-1)\rangle}{\|(6,1,-4,-1)\|^2}(6,1,-4,-1) \\
&= \left(\frac{y+t}{2}\right)(0,1,0,1) + \left(\frac{6x+y-4z-t}{54}\right)(6,1,-4,-1) \\
&= \left(\frac{6x+y-4z-t}{9}, \frac{y+t}{2} + \frac{6x+y-4z-t}{54}, \frac{-12x-2y+8z+2t}{27}, \frac{y+t}{2} + \frac{-6x-y+4z+t}{54}\right) \\
&= \left(\frac{6x+y-4z-t}{9}, \frac{27y+27t+6x+y-4z-t}{54}, \frac{-12x-2y+8z+2t}{27}, \frac{27y+27t-6x-y+4z+t}{54}\right) \\
&= \left(\frac{6x+y-4z-t}{9}, \frac{28y+26t+6x-4z}{54}, \frac{-12x-2y+8z+2t}{27}, \frac{26y+28t-6x+4z}{54}\right)
\end{aligned}
$$

(b) Determinemos $d((1,1,1,1),\mathbb{W})$

Solución. Aplicamos la definición y obtenemos que

$$
\begin{aligned}
d((1,1,1,1),\mathbb{W}) &= \|(1,1,1,1) - P_{\mathbb{W}}(1,1,1,1)\| \\
&= \left\|(1,1,1,1) - \left(\frac{2}{9}, \frac{56}{54}, -\frac{4}{27}, \frac{52}{54}\right)\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{7}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{31}{27}, \frac{1}{27}\right)\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{7}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{31}{27}, \frac{1}{27}\right)\right\| \\
&= \frac{1}{27}\|(21,-1,31,1)\| \\
&= \frac{1}{9}\sqrt{156}
\end{aligned}
$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con un producto interno $\langle , \rangle$ y $\alpha = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{V}$, donde $v_1 \neq 0_{\mathbb{V}}$ y $v_2 \neq 0_{\mathbb{V}}$. Si aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto α, obtenemos el conjunto $\alpha' = \{v_1', v_2'\}$, donde $v_1' = v_1$. Demuestre, si es posible que

$$v_2' = 0_{\mathbb{V}} \implies \alpha \text{ es un conjunto linealmente dependiente}$$

Solución, por definición tenemos que

$$\begin{aligned}
a_1v_1 + a_2v_2 = 0_{\mathbb{V}} &\implies a_1v_1' + a_2(v_2' - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}v_1' = 0_{\mathbb{V}} \\
&\implies a_1v_1' - a_2\frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}v_1' = 0_{\mathbb{V}} \\
&\implies \left(a_1 - a_2\frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}\right)v_1' = 0_{\mathbb{V}} \\
&\implies \left(a_1 - a_2\frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}\right) = 0 \qquad (\text{Pues } v_1' = v_1 \neq 0_{\mathbb{V}}) \\
&\implies a_1 = a_2\frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}
\end{aligned}$$

Luego,

$$a_2\frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}v_1 + a_2v_2 = 0_{\mathbb{V}} \quad (a_2 \in \mathbb{R})$$

Así que α es linealmente dependiente.

Alternativa:

$$\begin{aligned}
v_2' = v_2 - \left(\frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\right)v_1 &\implies 0_{\mathbb{V}} = v_2 - \left(\frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\right)v_1 \\
&\implies v_2 = \underbrace{\left(\frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\right)}_{\neq 0}v_1
\end{aligned}$$

Así que α es linealmente dependiente.

3. Ejercicios Propuestos: Producto Interno

(1) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z - t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$.
(b) $d((1, 0, 0, 1), \mathbb{W})$

(2) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0 \wedge 2x + 4y - 2z + 2t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$
(b) Calcule $d((x, y, z, t), W)$

(3) Sea $\mathbb{W} = \{(1, 1, 2, 0), (0, -1, 4, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) ¿Es posible determinar $P_{\mathbb{W}}$?. Si es posible exhiba una tal proyección, caso contrario, justifique su respuesta
(b) ¿Es posible determinar $P_{\langle\mathbb{W}\rangle}$?. Si es posible exhiba una tal proyección, caso contrario, justifique su respuesta

(4) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z - t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$
(b) Muestre que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$

(5) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0 \wedge 2x + 4y - 2z + 2t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$
(b) Muestre que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$

(6) Sea $\mathbb{W} = \{(1, 1, 2, 0), (0, -1, 4, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$

(a) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$
(b) ¿Es posible mostrar que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$?

(7) Consideremos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ con el producto interno usual, es decir, $\langle A, B\rangle = tr(B^t \cdot A)$.

(a) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$ entonces

(i) Determine $P_{\mathbb{W}}$
(ii) $d\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{W}\right)$
(iii) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(b) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$ entonces

(i) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(ii) $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{W}\right)$

(iii) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid tr(A) = 0\}$ entonces

(i) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(ii) $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{W}\right)$

(iii) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(8) Si en el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ consideramos para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) \tag{1}$$

Y el subespacio $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 + a_1 - 3a_2 = 0\}$ entonces respecto de (1)

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(b) Calcule $d(1 + x + x^2, \mathbb{W})$

(c) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(9) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

(a) $P_{\mathbb{W}} \circ P_{\mathbb{W}} = P_{\mathbb{W}}$

(b) $P_{\mathbb{W}}$ es sobreyectiva

(c) $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

(d) $P_{\mathbb{W}}(w) = w \Longleftrightarrow w \in \mathbb{W}$

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

(a) $d(u, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow u \in \mathbb{W}$

(b) $d(u, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow P_{\mathbb{W}}(u) = u$

(11) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n con producto interno $\langle , \rangle$, y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ conjunto ortogonal respecto de } \langle , \rangle \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ conjunto linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

BUEN TRABAJO!!!