Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una Solución del Control 3
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
martes 27 de Agosto del 2013

El trabajo solidario y honesto hace humano al ser humano

(1) Si consideramos la función $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(a,b,c) \;=\; (a+b+c)+(a-b+c)x+(b-2c)x^2$$

Entonces demuestre que T es un isomorfismo

En primer lugar observamos que para $A=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ y $B=(p,q,r)\in\mathbb{R}^3$ tenemos que

$$\begin{aligned}
T(A+B) &= T(a+p,b+q,c+r)\\
&= (a+p+b+q+c+r)+(a+p-(b+q)+c+r)x+(b+q-2(c+r))x^2\\
&= (a+p+b+q+c+r)+(a+p-b-q+c+r)x+(b+q-2c-2r)x^2\\
&= (a+b+c+p+q+r)+(a-b+c+p-q+r)x+(b-2c+q-2r)x^2\\
&= (a+b+c)+(a-b+c)x+(b-2c)x^2+(p+q+r)+(p-q+r)x+(q-2r)x^2\\
&= T(a,b,c)+T(p,q,r)\\
&= T(A)+(B)
\end{aligned}$$

Además para $\lambda\in\mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
T(\lambda A) &= T(\lambda a,\lambda b,\lambda c)\\
&= \lambda(a+b+c)+\lambda(a-b+c)x+\lambda(b-2c)x^2\\
&= \lambda((a+b+c)+(a-b+c)x+(b-2c)x^2)\\
&= \lambda T(a,b,c)\\
&= \lambda T(A)
\end{aligned}$$

Así que $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3),\mathbb{R}_2[x])$

Además, para estudiar la inyectividad debemos examinar el $\ker(T)$, e.e.

$$\begin{aligned}
A\in\ker(T) &\iff A\in\mathbb{R}^3\wedge T(A)=0_{\mathbb{R}_2[x]}\\
&\iff A=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge T(a,b,c)=0+0x+0x^2\\
&\iff A=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge (a+b+c)+(a-b+c)x+(b-2c)x^2=0+0x+0x^2\\
&\iff A=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcl} a+b+c &=& 0\\ a-b+c &=& 0\\ b-2c &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff A=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcl} a+b+c &=& 0\\ a-b+c &=& 0\\ b &=& 2c\end{array}\right|\\
&\iff A=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcl} a+3c &=& 0\\ a-c &=& 0\\ b &=& 2c\end{array}\right|\\
&\iff A=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcr} a &=& -3c\\ a &=& c\\ b &=& 2c\end{array}\right| \Longrightarrow c=a=b=0\\
&\iff A=(0,0,0)
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(T)=\{(0,0,0)\}$ y para ver que T es sobreyectiva basta aplicar el teorema de la dimensión, por ende es un isomorfismo.

[1] Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

(2) Si $T:\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{R}^2$ es una función tal que

$$T(x,y,z) \;=\; (\lambda x-2y+z,x+\lambda y-z)$$

entonces

a) Demuestre que $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ para cada $\lambda\in\mathbb{R}$

En efecto, si $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ entonces P.d.q. $T(u+v)=T(u)+T(v)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x+a,y+b,z+c)\\
&= (\lambda(x+a)-2(y+b)+z+c,x+a+\lambda(y+b)-(z+c))\\
&= (\lambda x+\lambda a-2y-2b+z+c,x+a+\lambda y+\lambda b-z-c)\\
&= (\lambda x-2y+z+\lambda a-2b+c,x+\lambda y-z+a+\lambda b-c)\\
&= (\lambda x-2y+z,x+\lambda y-z)+(\lambda a-2b+c,a+\lambda b-c)\\
&= T(x,y,z)+T(a,b,c)\\
&= T(u)+T(v)
\end{aligned}$$

Además, para $\gamma\in\mathbb{R}$ y $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ debemos mostrar que $T(\gamma u)=\gamma T(u)$, luego,

$$\begin{aligned}
T(\gamma u) &= T(\gamma x,\gamma y,\gamma z)\\
&= (\lambda\gamma x-2\gamma y+\gamma z,\gamma x+\lambda\gamma y-\gamma z)\\
&= (\gamma(\lambda x-2y+z),\gamma(x+\lambda y-z))\\
&= \gamma(\lambda x-2y+z,x+\lambda y-z)\\
&= \gamma T(x,y,z)\\
&= \gamma T(u)
\end{aligned}$$

Así que, $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ para cada $\lambda\in\mathbb{R}$.

b) Determine el conjunto $\mathbb{S}=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid T \text{ inyectiva}\}$

Una solución. Observamos que si T fuese inyectiva para algún λ entonces en virtud del Teorema de la Dimensión tenemos que

$$3=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)=0+\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) \quad\Longrightarrow\quad 3=\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T))\le 2(\Longrightarrow\Longleftarrow)$$

Luego,

$$\mathbb{S} \;=\; \emptyset$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacios vectoriales y $\alpha=\{v_1,v_2,v_3\}$ una base $\mathbb{V}$. Si $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ entonces demuestre que

$$\beta=\{T(v_1),T(v_2),T(v_3)\}\text{ linealmente independiente}\Longrightarrow T\text{ Inyectiva}$$

En efecto.
Supongamos que $u\in\ker(T)$ entonces

$$\begin{aligned}
u\in\ker(T) &\iff u\in\mathbb{V}\wedge T(u)=0_{\mathbb{V}}\\
&\iff u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\in\mathbb{V}\wedge T(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)=0_{\mathbb{V}}\quad(\alpha\text{ es una base de }\mathbb{V})\\
&\iff u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\in\mathbb{V}\wedge a_1T(v_1)+a_2T(v_2)+a_3T(v_3)=0_{\mathbb{V}}\quad(T\text{ es una T. Lineal })\\
&\iff u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\in\mathbb{V}\wedge a_1=a_2=a_3=0\quad(\beta\text{ L. I. })\\
&\iff u=0_{\mathbb{V}}
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(T)=\{0_{\mathbb{V}}\}$ y T es inyectiva