Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una solución del Control N° 2
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Martes 28 de Noviembre del 2017

El trabajo solidario hace humano al humano

(1) Dada la base $\beta = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\}$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces determine si es posible, una base $\alpha = \{A_1, A_2, A_3\}$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)$ tal que $A = [I]_{\alpha}^{\beta}$

Una Solución. Sabemos que si una tal base α existe entonces debe verificarse por definición que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} [A_1]_{\beta} & [A_2]_{\beta} & [A_3]_{\beta} \end{pmatrix}$$

Pero, también tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Así que

$$\begin{pmatrix} [A_1]_{\beta} & [A_2]_{\beta} & [A_3]_{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[A_1]_{\beta} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} A_1 = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
[A_2]_{\beta} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} A_2 = -3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\
[A_3]_{\beta} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} A_3 = -6\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\alpha = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}\}$$

Observamos finalmente, que como la $\dim_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)} = 3$ y la cardinalidad de α también es 3 entonces para que α sea base basta que sea Linealmente independiente, así que eso verificamos: e.e.

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto significa que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Pero, como

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 6$$

entonces $(*)$ tiene solución única o rango máximo, en cualquier caso esto significa que $a = b = c = 0$ y α es linealmente independiente y por ende una base.

[1]Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 90'

(2) Si $\mathbb{W} = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) - p(2) = 0 \wedge p(-1) = 0\right\} \leq \mathbb{R}_3[x]$ y definimos el producto interno:

$$\left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3\right\rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2 + 3a_3b_3 \tag{1}$$

Entonces respecto del producto interno definido en (1) determine, si es posible, una base ortogonal para $\mathbb{W}$

Una Solución: En primer lugar debemos determinar una base del subespacio $\mathbb{W}$ y para ello iniciamos determinando un sistema de generadores para él. e.e.

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge p(1) - p(2) = 0 \wedge p(-1) = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) - (a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3) = 0 \wedge a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge -a_1 - 3a_2 - 7a_3 = 0 \wedge a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge a_1 + 3a_2 + 7a_3 = 0 \wedge a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_1 + 3a_2 + 7a_3 & = & 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 & = & 0 \end{array}\right| \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \wedge a_0 = -4a_2 - 6a_3 \quad \wedge a_1 = -3a_2 - 7a_3 \\
&\iff p(x) = -4a_2 - 6a_3 + (-3a_2 - 7a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3; \quad (a_2 \in \mathbb{R}) \wedge (a_3 \in \mathbb{R}) \\
&\iff p(x) = a_2(-4 - 3x + x^2) + a_3(-6 - 7x + x^3); \quad (a_2 \in \mathbb{R}) \wedge (a_3 \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle\{-4 - 3x + x^2, -6 - 7x + x^3\}\rangle$$

Entonces $\alpha = \{-4 - 3x + x^2, -6 - 7x + x^3\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{W}$ y es linealmente independiente pues

$$a(-4 - 3x + x^2) + b(-6 - 7x + x^3) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} -4a - 6b & = & 0 \\ -3a - 7b & = & 0 \\ a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a = b = 0$$

Por ende α es una base de $\mathbb{W}$.
Finalmente procedemos a ortogonalizar la base α aplicando el proceso de G-S.
Sea $p_1(x) = -6 - 7x + x^3$ entonces

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= (-4 - 3x + x^2) - \frac{\langle -4 - 3x + x^2, -6 - 7x + x^3\rangle}{\langle -6 - 7x + x^3, -6 - 7x + x^3\rangle}(-6 - 7x + x^3) \\
&= (-4 - 3x + x^2) - \frac{66}{137}(-6 - 7x + x^3) \\
&= -152 + 51x + 137x^2 - 66x^3
\end{aligned}$$

Así que

$$\alpha' = \{-6 - 7x + x^3, -152 + 51x + 137x^2 - 66x^3\}$$