Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una Solución del Control N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
09 de Mayo del 2017

(1) Si $\mathbb{W} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+2z-t=0 \wedge x+y-z-2t=0\right\}$ entonces

a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$

Solución. Observamos que

$$0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4 \wedge 0+0+2\cdot 0 - 0 = 0 \wedge 0+0-0-2\cdot 0 = 0$$

Así que $0_{\mathbb{R}^4} \in \mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \neq \emptyset$

Ahora, determinamos un sistema de generadores para $\mathbb{W}$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} &\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x+y+2z-t=0 \wedge x+y-z-2t=0\\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{cccc} (1) & x+y+2z-t & = & 0 \\ (2) & x+y-z-2t & = & 0 \end{array}\\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge (\text{ de } (1)-(2) \text{ sigue que }) \begin{array}{ccc} 3z+t & = & 0 \\ x+y-z-2t & = & 0 \end{array}\\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{ccc} t & = & -3z \\ x+y & = & -5z \end{array}\\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{array}{ccc} t & = & \frac{3}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y \\ z & = & -\frac{1}{5}\,x - \frac{1}{5}\,y \end{array}\\
&\iff u = \left(x, y, -\frac{1}{5}\,x - \frac{1}{5}\,y, \frac{3}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y\right) \;(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})\\
&\iff u = \left(x, 0, -\frac{1}{5}\,x, \frac{3}{5}\,x\right) + \left(0, y, -\frac{1}{5}\,y, \frac{3}{5}\,y\right) \;(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})\\
&\iff u = \left(x, y, -\frac{1}{5}\,x - \frac{1}{5}\,y, \frac{3}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y\right) \;(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})\\
&\iff u = x\left(1, 0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) + y\left(0, 1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) \;(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})\\
&\iff u \in \left\langle\left\{\left(1, 0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right), \left(0, 1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}\right\rangle
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} \;=\; \left\langle\left\{\left(1, 0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right), \left(0, 1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}\right\rangle \leq \mathbb{R}^4$$

b) Determine una base para $\mathbb{W}$

Si llamamos $\alpha = \left\{\left(1,0,-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right), \left(0,1,-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$ entonces α ya es un sistema de generadores de $\mathbb{W}$. Por otra parte, si

$$\begin{aligned}
x\left(1, 0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) + y\left(0, 1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) = (0,0,0,0) &\Rightarrow \left(x, y, -\frac{1}{5}\,x - \frac{1}{5}\,y, \frac{3}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y\right) = (0,0,0,0)\\
&\Rightarrow x = y = 0
\end{aligned}$$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

Luego, α es linealmente independiente y por tanto una base de $\mathbb{W}$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial. Si $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{V}$, y $\beta = \{v_1, v_1 - v_2, v_1 - v_2 + v_3\} \subset \mathbb{V}$ entonces demuestre si es posible, (caso contrario justifique su respuesta) que

$$\alpha \text{ linealmente independiente en } \mathbb{V} \quad \Longrightarrow \quad \beta \text{ linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
a_1v_1 + a_2(v_1 - v_2) + a_3(v_1 - v_2 + v_3) = 0_{\mathbb{V}} \quad & \Rightarrow \quad a_1v_1 + a_2v_1 - a_2v_2 + a_3v_1 - a_3v_2 + a_3v_3 = 0_{\mathbb{V}} \\
& \Rightarrow \quad (a_1 + a_2 + a_3)v_1 + (-a_2 - a_3)v_2 + a_3v_3 = 0_{\mathbb{V}} \\
& \Rightarrow \quad (a_1 + a_2 + a_3)v_1 + (-a_2 - a_3)v_2 + a_3v_3 = 0_{\mathbb{V}} \\
& \overset{(\alpha \text{ Li })}{\Rightarrow} \quad \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \\ -a_2 - a_3 & = & 0 \\ a_3 & = & 0 \end{array}\right| \\
& \Rightarrow \quad a_3 = a_2 = a_1 = 0
\end{aligned}$$

Luego, β es Linealmente independiente

(3) Si $\alpha = \{(1,0,0)), (1,1,0), (1,\lambda,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{B} \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es un sistema de generadores }\}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{B} \quad & \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \alpha \text{ es un sistema de generadores} \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \text{ la ecuación } (x,y,z) = a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,\lambda,1) \\
& \qquad \text{tiene solución para cada } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \text{ el sistema } \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & x \\ a_2 + \lambda a_3 & = & y \\ a_3 & = & z \end{array}\right| \text{tiene solución para cada } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \text{ el sistema } \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & x \\ a_2 & = & y - \lambda z \\ a_3 & = & z \end{array}\right| \text{tiene solución para cada } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \text{ el sistema } \left.\begin{array}{lcl} a_1 & = & x - y + \lambda z - z \\ a_2 & = & y - \lambda z \\ a_3 & = & z \end{array}\right| \text{tiene solución para cada } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{S} = \mathbb{R}$