Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una Solución del Control N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Martes 24 de Octubre del 2017

El trabajo solidario hace humano al humano

(1) Si $\mathbb{W}=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)\mid x+y+z+t=0\wedge x-y-z+t=0\wedge y+z+t=0\right\}$ entonces demuestre que $\mathbb{W}\leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)$

Una solución usando la técnica de los generadores: Entonces

$$\begin{aligned}
A\in\mathbb{W} &\iff A=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)\ \wedge\ x+y+z+t=0\wedge x-y-z+t=0\wedge y+z+t=0\\
&\iff A=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)\ \wedge\ \left.\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 0\\ x-y-z+t &=& 0\\ y+z+t &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff A=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)\ \wedge\ \left.\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ -y-z+t &=& 0\\ y+z+t &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff A=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)\ \wedge\ \left.\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ t &=& 0\\ y+z &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff A=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)\ \wedge\ \left.\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ t &=& 0\\ z &=& -y\end{array}\right|\\
&\iff A=\begin{pmatrix} 0\\ y\\ -y\\ 0\end{pmatrix};\quad y\in\mathbb{R}\\
&\iff A=y\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix};\quad y\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \left\{y\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\mid y\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}}_{\in\mathbb{W}}\right\}\right\rangle\leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4\times 1)$$

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 90'

(2) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ una base de $\mathbb{R}^3$, y $\beta = \{\lambda v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_1 + v_2 - v_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \beta \text{ es linealmente independiente en } \mathbb{V}\}$$

Una solución. Debemos estudiar los elementos de $\mathbb{S}$, así que procedemos en consecuencia.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{S} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \beta \text{ es linealmente independiente en } \mathbb{V} \\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ [a(\lambda v_1 - v_2) + b(v_1 + v_2) + c(v_1 + v_2 - v_3) = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow \underbrace{a = b = c = 0}_{\text{unicamente}}] \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a(\lambda v_1 - v_2) + b(v_1 + v_2) + c(v_1 + v_2 - v_3) = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a\lambda v_1 - av_2 + bv_1 + bv_2 + cv_1 + cv_2 - cv_3 = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow a\lambda v_1 + bv_1 + cv_1 - av_2 + bv_2 - cv_3 = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow (a\lambda + b + c)v_1 + (-a + b)v_2 - cv_3 = 0_{\mathbb{V}} \\ &\overset{\alpha Li}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcl} a\lambda + b + c & = & 0 \\ -a + b & = & 0 \\ -c & = & 0 \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a\lambda + b & = & 0 \\ -a + b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a\lambda + a & = & 0 \\ b & = & a \\ c & = & 0 \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} (\lambda + 1)a & = & 0 \\ b & = & a \\ c & = & 0 \end{array}\right| \qquad (\star) \end{aligned}$$

De $(\star)$ sigue que

$$\lambda + 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0 \quad \text{(únicamente)}$$

Luego,

$$\mathbb{S} \quad = \quad \mathbb{R} - \{-1\}$$

(3) Si $\alpha = \{(1, \lambda + 1, -1)), (1, -2, 1)(0, \lambda + 3, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{B} \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es una base } \}$$

Una solución. Debemos determnar el conjunto $\mathbb{B}$ y entonces procedemos en consecuencia:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{B} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \alpha \text{ es una base} \\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \alpha \text{ es un sistema de generadores y un conjunto linealmente independiente} \end{aligned}$$

Aquí en esta etapa del proceso, podemos observar lo siguiente:

Como la $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$ y la cardinalidad de α es también 3 entonces para que α sea una base basta que sea un sistema de generadores o un conjunto linealmente independiente, esto por supuesto como una consecuencia del teorema mágico.

En el caso verificaremos para que valores de λ; α es un conjunto linealmente independiente, y entonces iniciamos el proceso suponiendo que

$$a(1, \lambda + 1, -1)) + b(1, -2, 1) + c(0, \lambda + 3, -2) \quad = \quad (0, 0, 0) \tag{1}$$

Ahora si en (1) suponemos que tenemos una solución entonces debería suceder que:

$$\begin{aligned} (a + b, a(\lambda + 1) - 2b + c(\lambda + 3), -a + b - 2c) = (0, 0, 0) &\iff \left.\begin{array}{rcl} a + b &=& 0 \\ a(\lambda + 1) - 2b + c(\lambda + 3) &=& 0 \\ -a + b - 2c &=& 0 \end{array}\right| \\ &\iff \left.\begin{array}{rcr} b &=& -a \\ a(\lambda + 1) - 2(-a) + c(\lambda + 3) &=& 0 \\ -a + (-a) - 2c &=& 0 \end{array}\right| \\ &\iff \left.\begin{array}{rcr} b &=& -a \\ a(\lambda + 1) + 2a + c(\lambda + 3) &=& 0 \\ -2a - 2c &=& 0 \end{array}\right| \\ &\iff \left.\begin{array}{rcr} b &=& -a \\ a(\lambda + 1) + 2a + (-a)(\lambda + 3) &=& 0 \\ c &=& -a \end{array}\right| \\ &\iff \left.\begin{array}{rcr} b &=& -a \\ a(\lambda + 1) + 2a - a(\lambda + 3) &=& 0 \\ c &=& -a \end{array}\right| \\ &\iff \left.\begin{array}{rcr} b &=& -a \\ a(\lambda + 1 + 2 - \lambda - 3) &=& 0 \\ c &=& -a \end{array}\right| \\ &\iff \left.\begin{array}{rcr} b &=& -a \\ a \cdot 0 &=& 0 \\ c &=& -a \end{array}\right| \end{aligned}$$

Luego, hemos comprobado que $(\forall a; a \in \mathbb{R})$ tenemos que

$$a(1, \lambda + 1, -1)) - a(1, -2, 1) - a(0, \lambda + 3, -2) \quad = \quad (0, 0, 0) \tag{2}$$

Así que de (2) sigue que $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$, α es linealmente dependiente y por tanto

$$\mathbb{B} \quad = \quad \emptyset$$