Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática
A. Matemático DIE

Una solución del Control N°1
Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Martes 03 de julio del 2018

El trabajo dignifica
al ser humano

(1) Sea $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y,z)=(x+y+\lambda z, x-\lambda y-z)$ entonces

(a) Demuestre que $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ para cada $\lambda\in\mathbb{R}$

Una Solución, debemos mostrar en primer lugar que para $u=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$ y $v=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ entonces $T(u+v)=T(u)+T(v)$. En consecuencia para $\lambda\in\mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))\\
&= T(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\\
&= (x_1+x_2+y_1+y_2+\lambda(z_1+z_2), x_1+x_2-\lambda(y_1+y_2)-(z_1+z_2))\\
&= (x_1+x_2+y_1+y_2+\lambda z_1+\lambda z_2, x_1+x_2-\lambda y_1-\lambda y_2-z_1-z_2)\\
&= (x_1+y_1+\lambda z_1+x_2+y_2+\lambda z_2, x_1-\lambda y_1-z_1+x_2-\lambda y_2-z_2)\\
&= (x_1+y_1+\lambda z_1, x_1-\lambda y_1-z_1)+(x_2+y_2+\lambda z_2, x_2-\lambda y_2-z_2)\\
&= T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2)\\
&= T(u)+T(v)
\end{aligned}$$

En segundo lugar, si tomamos $\mu\in\mathbb{R}$ y $w=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ entonces debemos mostrar que $T(\mu w)=\mu T(w)$. Así que

$$\begin{aligned}
T(\mu w) &= T(\mu(x,y,z))\\
&= T(\mu x,\mu y,\mu z)\\
&= (\mu x+\mu y+\mu\lambda z, \mu x-\mu\lambda y-\mu z)\\
&= \mu(x+y+\lambda z, x-\lambda y-z)\\
&= \mu T(x,y,z)\\
&= \mu T(w)
\end{aligned}$$

Luego, $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ para cada $\lambda\in\mathbb{R}$

(b) Determine el conjunto $\mathbb{S}=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid T \text{ es sobreyectiva}\}$

Una Solución, en este caso procedemos a examinar, a fin de caracterizar, los elementos de $\mathbb{S}$.

$$\lambda\in\mathbb{S} \iff \lambda\in\mathbb{R} \quad\wedge\quad T \text{ sobreyectiva} \qquad (*)$$

Así que de $(*)$ sigue que para un tal $\lambda\in\mathbb{S}$, si es que existe alguno, para cada $w=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tiene solución en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $T(X)=w$, es decir, para cada $w=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ existe $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(a,b)$.

En consecuencia examinemos las posibles soluciones de la ecuación $T(X)=w$.

[1] Cada problema vale 2.0 puntos

$$\begin{aligned} T(x,y,z)=(a,b) &\iff (x+y+\lambda z, x-\lambda y-z)=(a,b)\\ &\iff \begin{array}{rcl|} x+y+\lambda z &=& a\\ x-\lambda y-z &=& b \\ \hline \end{array}\\ &\Longrightarrow \begin{array}{rcl|} (\lambda+1)y+(\lambda+1)z &=& a-b\\ x-\lambda y-z &=& b \\ \hline \end{array}\\ &\Longrightarrow \begin{array}{rcl|} (\lambda+1)(y+z) &=& a-b\\ x-\lambda y-z &=& b \\ \hline \end{array} \quad (**) \end{aligned}$$

Entonces de $(**)$, siguen los siguientes casos

Si $(\lambda+1)=0$ es decir $\lambda=-1$ entonces sustituyendo en $(**)$ tenemos el comportamiento:

$$\begin{array}{rcl|} 0 &=& a-b\\ x-\lambda y-z &=& b \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \quad a=b$$

Lo cual dice que T no es sobreyectiva, pues sólo tenemo solución para $w=(a,a)$. e.e. $-1\in\mathbb{S}$

Si $(\lambda+1)\neq 0$ es decir $\lambda\neq -1$ entonces de $(**)$ sigue que

$$\begin{array}{rcl|} y+z &=& \frac{a-b}{\lambda+1}\\ x-\lambda y-z &=& b \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl|} y &=& \frac{a-b}{\lambda+1}-z\\ x &=& b+\lambda y+z \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl|} y &=& \frac{a-b}{\lambda+1}-z\\ x &=& b+\lambda\left(\frac{a-b}{\lambda+1}-z\right)+z \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcl|} y &=& \frac{a-b}{\lambda+1}-z\\ x &=& b+\frac{\lambda a-\lambda b}{\lambda+1}-\lambda z+z \\ \hline \end{array}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} &= (x+y+\lambda z, x-\lambda y-z)\\ &= \left(b+\frac{\lambda a-\lambda b}{\lambda+1}-\lambda z+z+\frac{a-b}{\lambda+1}-z+\lambda z, b+\frac{\lambda a-\lambda b}{\lambda+1}-\lambda z+z-\frac{\lambda(a-b)}{\lambda+1}+\lambda z-z\right)\\ &= (a,b) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbb{S} \;=\; \mathbb{R}-\{-1\}$$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacios vectoriales y $\alpha=\{v_1,v_2,v_3\}$ un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$. Si $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ entonces demuestre si es posible que

$$T(\alpha)=\{T(v_1),T(v_2),T(v_3)\} \text{ base de } \mathbb{V} \Longrightarrow \ker(T)=\{0_{\mathbb{V}}\}$$

Una solución. Debemos mostrar que $\ker(T)=\{0_{\mathbb{V}}\}$ entonces recordamos en primer lugar que

$$u\in\ker(T) \iff u\in\mathbb{V} \quad\wedge\quad T(u)=0_{\mathbb{V}}$$

En segundo lugar, observamos como $T(\alpha)$ es una base de $\mathbb{V}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})=3$.
En tercer lugar, tenemos que α es un conjunto linealmente independiente con cardinalidad 3, así que por el teorema mágico es también un sistema de generadores o sea una base de $\mathbb{V}$.

Finalmente estudiamos los elementos del núcleo de T.

$$\begin{aligned} u\in\ker(T) &\iff u\in\mathbb{V} \quad\wedge\quad T(u)=0_{\mathbb{V}}\\ &\overset{\alpha\text{ base}}{\Longrightarrow} u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\in\mathbb{V} \quad\wedge\quad T(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)=0_{\mathbb{V}}\\ &\overset{T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})}{\Longrightarrow} u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\in\mathbb{V} \quad\wedge\quad a_1T(v_1)+a_2T(v_2)+a_3T(v_3)=0_{\mathbb{V}}\\ &\overset{T(\alpha)\text{ Li}}{\Longrightarrow} u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\in\mathbb{V} \quad\wedge\quad a_1=a_2=a_3=0\\ &\Longrightarrow u=0_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\ker(T)=\{0_{\mathbb{V}}\}$$

(3) Construya, si es posible $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\text{Img } (T) = \langle\{(1,1,1),(1,0,-1),(3,1,-1)\}\rangle$$

Una solución. Sabemos que para construir $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ nos basta definirla en una base de $\mathbb{R}^3$ y posteriormente "extenderla por linealidad al espacio entero". en consecuencia podemos pensar de la siguiente forma:

Como las condiciones están dadas en la Img (T) entonces podemos escoger por ejemplo la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir $c(3) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. y definimos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1,1) \\ T(0,1,0) &= (1,0,-1) \\ T(0,0,1) &= (3,1,-1) \end{aligned}$$

Finalmente, como usamos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ entonces tenemos la extension por linealidad como sigue

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= x(1,1,1) + y(1,0,-1) + z(3,1,-1) \\ &= (x+y+3z, x+z, x-y-z) \end{aligned}$$

En particular observamos que

$$\begin{aligned} u \in \ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = (0,0,0) \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge T(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge (x+y+3z, x+z, x-y-z) = (0,0,0) \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+y+3z &=& 0 \\ x+z &=& 0 \\ x-y-z &=& 0 \end{array}\right| \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+y+3z &=& 0 \\ x &=& -z \\ x-y-z &=& 0 \end{array}\right| \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -x \wedge \left.\begin{array}{rcl} y-2x &=& 0 \\ 2x-y &=& 0 \end{array}\right| \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -x \wedge y = 2x \\ &\iff u = (x,2x,-x), \quad x \in \mathbb{R} \\ &\iff u = x(1,2,-1), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego,

$$\ker(T) = \langle\{(1,2,-1\}\rangle$$

Y es bien definida porque $\alpha = \{(1,1,1),(1,0,-1),(3,1,-1)\}$ es un conjunto linealmente dependiente, ya que $(1,1,1) + 2(1,0,-1) = (3,1,-1)$ y $\beta = \{(1,1,1),(1,0,-1)\}$ es linealmente independiente, es decir se verifica el teorema de la dimensión.

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)}_{3} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T))}_{1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img}(T))}_{2}$$