# Rudimentos 8: Grupos
# Profesor Ricardo Santander

Este Capitulo estará destinado a presentar contenidos y actividades que permitirán al estudiante, clasificar conjuntos que poseen una estructura especial, la estructura de grupos, usando como herramienta central las funciones llamadas homomorfismos de grupos:

## 1. Definiciones y Ejemplos Básicos

Nuestra experiencia con los números nos muestra que en forma natural, "podemos realizar mezclas de ellos", incluso somos capaces de aplicar propiedades para mejorar nuestros desarrollos, y así optimizar nuestro tiempo de ejecución. En suma para muy pocos, al menos eso creo, resulta incomprensible o desconocida la palabra operatoria de números.

En este contexto se realiza por ejemplo la adición de enteros y el formato usual es $n + m = r$. Ahora formalmente esta, es una función cuyo dominio es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y su imagen es $\mathbb{Z}$, pues en primer lugar podemos modelar $+$ como:

$$\begin{array}{rcccl} + & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longmapsto & \mathbb{Z} \\ & & (z_1, z_2) & \longmapsto & +(z_1, z_2) = z_1 + z_2 \end{array}$$

Y como $z + 0 = z \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$ entonces $Img(+) = \mathbb{Z}$, es decir $+$ es una función sobreyectiva. En honor a estas cuestiones históricas y a su carácter propio, haremos la distinción para estas funciones en la siguiente definición:

**Definición 1.1.** *Sea $C$ un conjunto no vacío, $*$ se llamará una operación binaria en $C$ si*

$$\begin{array}{rcccc} * & : & C \times C & \longmapsto & C \\ & & (c_1, c_2) & \longmapsto & c_1 * c_2 \end{array}$$

*Es una función.*

**Ejemplo 1.1.1.** (1) *La suma o adición usual de enteros es una operación binaria.*

(2) *En general la adición de reales y el producto de reales constituyen ejemplos de operaciones binarias.*

(3) *Sea $\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} \mid z > 0\}$, es decir los enteros positivos entonces define la operación binaria,*

$$* : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longmapsto \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } a * b = \begin{cases} \min(a, b) & si\ a \neq b \\ a & si\ a = b \end{cases}$$

*Por ejemplo:*

- $2 * 5 = 2$
- $3 * 3 = 3$
- *etc.*

(4) *En $\mathbb{Z}$ define la operación binaria,*

$$a * b = a + b + 12$$

*Por ejemplo*

- $2 * 3 = 17$
- $1 * 1 = 14$
- $5 * (-12) = 5$
- *En general,* $a * (-12) = a \ (\forall a; a \in \mathbb{Z})$

Estamos prestos para definir la estructura que por ahora nos interesa.

**Definición 1.2.** *Sea $G$ un conjunto no vacío, $*$ una operación binaria en $G$ entonces diremos que $(G, *)$ posee estructura de grupo o es un grupo si $*$ satisface en $G$ las siguientes propiedades:*

(1) $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$, *es decir $*$ asocia los elementos de $G$*

(2) *Existe $e_G \in G$ tal que $(\forall g;\ g \in G)$ tenemos,*

$$g * e_G = g \qquad \wedge \qquad e_G * g = g$$

*$e_G$ lo llamaremos elemento neutro de $G$ respecto de $*$*

(3) *Para cada $g \in G$ existe $g' \in G$ tal que:*

$$g * g' = g' * g = e_G$$

*El elemento $g'$ se llama el inverso de $g$ y es usual notarlo como, $g' = g^{-1}$*

*Si además $*$ satisface la propiedad conmutativa en $G$, es decir:*

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad (\forall g_1;\ g_1 \in G),\ (\forall g_2;\ g_2 \in G)$$

*entonces $(G, *)$, se llama grupo Abeliano o Conmutativo.*

**Ejemplo 1.2.1.**

(1) $(\mathbb{R}, +)$ *es un grupo abeliano, en este caso:* $e_{\mathbb{R}} = 0$ *y* $r^{-1} = -r$

(2) $(\mathbb{Q}, +)$ *es un grupo abeliano, en este caso:* $e_{\mathbb{Q}} = \dfrac{0}{1} = 0$ *y* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = -\dfrac{a}{b}$

(3) $(\mathbb{Z}, +)$ *es un grupo abeliano, en este caso:* $e_{\mathbb{Z}} = 0$ *y* $z^{-1} = -z$

(4) $(\mathbb{N}, +)$ *no es un grupo, pues no tiene solución en general en $\mathbb{N}$ la ecuación* $x + n = 0$

(5) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano, en este caso:* $e_{\mathbb{R}} = 1$ *y* $r^{-1} = \dfrac{1}{r}$

(6) $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano, en este caso:* $e_{\mathbb{Q}} = \dfrac{1}{1} = 1$ *y* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$

(7) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *no es un grupo, pues no tiene solución en general en $\mathbb{Z}$ la ecuación:* $a \cdot x = b$

(8) *Sea* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \dots, n)\}$

- *Si* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Diremos que*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Longleftrightarrow x_i = y_i \quad (\forall i; i = 1, 2, \dots n)$$

- *Ahora si definimos*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

*entonces* $(\mathbb{R}^n, +)$ *es un grupo abeliano* $(\forall n;\ n \in \mathbb{N})$*, y en este caso:*

- $e_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$ *y*

- $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^{-1} = (-x_1, -x_2, -x_3, \ldots, -x_n)$

**Ejemplo 1.2.2.** *Si definimos en* $\mathbb{Z}$ *la siguiente operación binaria:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \overset{*}{\longmapsto} & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

*tal que* $a * b = a + b + n$*, donde* $n$ *es un entero fijo; entonces el par* $(\mathbb{Z}, *)$ *es un grupo abeliano.*

*En efecto*

- $(\mathbb{Z}, *)$ *es una estructura cerrada*

  *Como* $(\mathbb{Z}, +)$ *es un grupo con la adición usual de enteros entonces*

  $$a * b = (a + b + n) \in \mathbb{Z} \quad (\forall a; a \in \mathbb{Z})(\forall b; b \in \mathbb{Z})$$

- $(\mathbb{Z}, *)$ *es una estructura asociativa, pues*

$$\begin{array}{rcll} (a * b) * c & = & (a * b) + c + n & \\ & = & (a + b + n) + c + n & \textit{como } (\mathbb{Z}, +) \textit{ es asociativo} \\ & = & a + (b + n + c) + n & \textit{como } (\mathbb{Z}, +) \textit{ es conmutativo} \\ & = & a + (b + c + n) + n & \\ & = & a + (b * c) + n & \\ & = & a * (b * c) & \end{array}$$

- *En* $(\mathbb{Z}, *)$ *existe elemento neutro, porque*$(\forall a; a \in \mathbb{Z})$

  $$a * e = a \iff a + e + n = a \iff e = -n$$

  *Así, ahora podemos comprobar directamente que* $e = -n$ *es el elemento neutro respecto de la operación* $*$*:*

  $$a * (-n) = a + (-n) + n = a \wedge -n * a = -n + a + n = a \qquad (\forall a; a \in \mathbb{Z})$$

- *En* $(\mathbb{Z}, *)$ *cada elemento admite inverso, pues tiene solución la ecuación*

  $$\begin{array}{rcl} a * a' = e & \iff & a + a' + n = -n \\ & \iff & a' = -a - 2n \end{array}$$

*Ahora si denotamos* $a^{-1} = -a - 2n$ *entonces*

$$a * a^{-1} = a + (-a - 2n) + n = -n \wedge a^{-1} * a = -a - 2n + a + n = -n \quad (\textit{para cada } a \in \mathbb{Z})$$

- *Finalmente,* $(\mathbb{Z}, *)$*, es un grupo conmutativo o Abeliano, porque*
$$a * b \;=\; a + b + n = b + a + n = b * a$$
- *Si* $n = 0$ *entonces* $(\mathbb{Z}, *) = (\mathbb{Z}, +)$
- *Si por ejemplo* $n = -5$ *entonces*
  - ► $a * b = a + b - 5$
  - ► $e = 5$
  - ► $a^{-1} = -a + 10$
  - ► *Si definimos* $x^2 = x * x$ *entonces podemos resolver por ejemplo la ecuación*

$$x^2 + 2 * x - 1 = 0 \tag{1}$$

*Solución*

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2 * x - 1 \\ &= x + x - 5 + 2 + x - 5 - 1 \\ &= 3x - 9 \end{aligned}$$

*Luego,* $x = 3$

*En general la operación* $*$ *transforma un grupo en otro grupo, o bien traslada la estructura en* $-n$ *unidades.*

---

## 2. El grupo de matrices

Dado un conjunto de datos, un problema siempre interesante es como ordenarlos de una forma rápida y eficiente, es claro que la rapidez y eficiencia dependen de las necesidades que plantea la situación; en esta dirección tenemos por ejemplo la forma como se ordenan los departamentos en un edificio $A$ de n-pisos. Una forma sería la siguiente: El departamento $a_{ij}$, esta en el piso $i$ y ocupa la posición $j$ en dicho piso; de esta forma $A = (a_{ij})$ es una buena representación del edificio, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2}$$

**Definición 2.1.** *A será llamada una Matriz de n-filas y m-columnas ( orden* $n \times m$*) sobre* $\mathbb{R}$ *si A es de la forma modelada en* (2).

Usaremos la notación:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) &= \{ \text{ matrices de orden } n \times m \text{ sobre } \mathbb{R}\} \\ \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n) &= \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times n) \end{aligned}$$

**2.2. Algunas Matrices Especiales.** Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ entonces

- $A$ será llamada Matriz fila si $n = 1$. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ fila de largo } 5$$

- $A$ será llamada Matriz columna si $m = 1$. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ columna de largo } 5$$

- $A$ será llamada Matriz nula si $a_{ij} = 0 \quad (\forall i; 1 \leq i \leq n); (\forall j; 1 \leq j \leq m)$. Por ejemplo

$$(0)_{(2\times 3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nula de orden } 2 \times 3$$

- $A$ será llamada Matriz cuadrada si $n = m$. Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{cuadrada de orden } 3$$

- $A$ será llamada Matriz diagonal si:

  - $n = m$
  - $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

  Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{diagonal de orden } 3$$

- $A$ será llamada Matriz identidad si:

  - $n = m$
  - $a_{ij} = \begin{cases} 1 : & i = j \\ 0 : & i \neq j \end{cases}$

  Y se denota por $I_n$

Por ejemplo

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{identidad de orden 3}$$

⧫ $A$ será llamada Matriz triangular superior si:

- $n = m$
- $a_{ij} = 0$ si $i > j$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{triangular superior de orden 3}$$

⧫ $A$ será llamada Matriz triangular inferior si:

- $n = m$
- $a_{ij} = 0$ si $i < j$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{triangular inferior de orden 3}$$

⧫ $A$ será llamada Matriz simétrica si:

- $n = m$
- $a_{ij} = a_{ji}$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{simétrica de orden 3}$$

⧫ $A$ será llamada Matriz antisimétrica si:

- $n = m$
- $a_{ij} = -a_{ji}$

Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \\ -7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{antisimétrica de orden 3}$$

- $A^t$ será llamada Matriz traspuesta de $A$ si: $A^t = (a_{ji}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

En general $A$ simétrica si $A = A^t$ y $A$ antisimétrica si $A = -A^t$

## 2.3. Adición de matrices.

- Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces definimos:

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (1 \leq i \leq n); (1 \leq j \leq m)$$

- Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces definimos una operación binaria "+", como sigue:

$$\begin{array}{cccccl} + & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m) & \text{tal que } A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \\ & & (A, B) & \longmapsto & A + B & \end{array} \tag{3}$$

**Ejemplo 2.3.1.** *Si* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ *entonces*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*En general,*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & (a_{13} + b_{13}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & (a_{23} + b_{23}) & \dots & (a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & (a_{m3} + b_{m3}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Teorema 2.4.** $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m), +)$ *es un grupo abeliano*

Demostración

- La relación definida en (3) es una operación en el conjunto de matrices.

- Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m))$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m))$ y $C = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m))$ entonces usando la adición definida en (3) tenemos que

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= ((a_{ij})+(b_{ij}))+c_{ij} \\
&= ((a_{ij}+b_{ij}))+c_{ij} \\
&= ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) \\
&= (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) \qquad \text{( usamos la asociatividad de } \mathbb{R}) \\
&= a_{ij}+((b_{ij})+(c_{ij})) \\
&= A+(B+C)
\end{aligned}
$$

Luego, $(A+B)+C = A+(B+C)$, y la importancia de la asociatividad estriba en que la operación inicialmente definida para dos sumados se extiende naturalmente a un número finito de sumandos.

- $(0)_{(n\times m)}$ es el elemento neutro aditivo en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$, porque si

Suponemos que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m))$ entonces

$$
\begin{aligned}
A+(0)_{(n\times m)} &= (a_{ij})+(0) \\
&= (a_{ij}+0) \\
&= (a_{ij}) \qquad \text{( usamos la propiedad del neutro aditivo de } \mathbb{R}) \\
&= A
\end{aligned}
$$

Luego, $A+(0)_{(n\times m)} = A = (0)_{(n\times m} + A \qquad (\forall A; A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m))$

- Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces $-A = (-a_{ij})$ es el inverso aditivo de $A$, ya que

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces

$$
\begin{aligned}
A+-A &= (a_{ij})+(-a_{ij}) \\
&= (a_{ij}-a_{ij}) \\
&= (0)_{(n\times m)} \qquad \text{( usamos la propiedead del inverso aditivo de } \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

En particular, $A - B := A + (-B)$ en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$

- Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$, y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n \times m)$ entonces $A+B = B+A$, pues

$$
\begin{aligned}
A+B &= (a_{ij})+(b_{ij}) \\
&= (a_{ij}+b_{ij}) \\
&= (b_{ij}+a_{ij}) \qquad \text{( usamos la conmutatividad de } \mathbb{R}) \\
&= (b_{ij})+(a_{ij}) \\
&= B+A
\end{aligned}
$$

### 2.5. Ejercicios Resueltos.

(1) Determine la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (1000)$; tal que

$$
a_{ij} = \begin{cases} i & : i \leq j \\ 0 & : i > j \end{cases} \tag{4}
$$

$$ \tag{5} $$

Además calcule la "traza,"(en símbolos $tr$) de la matriz $A$ donde:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{1000} a_{ii} \tag{6}$$

Solución

(i) De la definición hecha en (4) tenemos que, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_{23} &= 2 & &\text{pues la ”fila 2 es menor que la columna 3”} \\ a_{32} &= 0 & &\text{pues la ”fila 3 es mayor que la columna 2”} \end{aligned}$$

Despues de lo anterior tenemos que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{11000} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{21000} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{31000} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{10001} & a_{10002} & a_{10003} & \dots & a_{10001000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1000 \end{pmatrix}$$

(ii) Finalmente,

$$\begin{aligned} tr(A) &= \sum_{i=1}^{1000} a_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{1000} i \\ &= \frac{1000 \cdot 1001}{2} \\ &= 500500 \end{aligned}$$

(2) En el conjunto de matrices $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, considera el siguiente subconjunto:

$$S = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\} \tag{7}$$

Donde $A^t$, es la matriz traspuesta de la matriz $A$. En símbolos.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Así por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in S \qquad \wedge \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in S$

En general para entender al conjunto S, debemos ingresar al conjunto:

$$
\begin{aligned}
A \in S &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = A^t \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{c|} a_{11} = a_{11} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{21} = a_{12} \\ a_{22} = a_{22} \\ \hline \end{array} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{12} = a_{21} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora si $A = (a_{ij}) \in S$ y $B = (b_{ij}) \in S$ entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

Por otra parte,

$$(A+B)^t = (a_{ij} + b_{ij})^t = (a_{ji} + b_{ji}) = A^t + B^t = A + B$$

Conclusión $A + B \in S$

Además, $(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ y si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in S$ entonces $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{pmatrix} \in S$.

Así que $(S, +)$ es un grupo abeliano

Observen que si $A \in S$ entonces

$$A \quad = \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}}_{\in S}$$

## 2.6. Ejercicios Propuestos.

(1) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(100)$. Determine la matriz $A$ correspondiente en cada caso:

- $a_{ij} = \begin{cases} 1 & : i \leq j \\ 0 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$
- $a_{ij} = \begin{cases} j & : i \leq j \\ 1 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$
- $a_{ij} = \begin{cases} i+j & : i \geq j \\ i-j & : \text{ en otro caso} \end{cases}$

- $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j^2 & : i \leq j \\ 0 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$

(2) Calcule $Tr(A)$ (traza de $A$) en el ejercicio anterior.

(3) Demuestre en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)$ que:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $A = A^t \Longleftrightarrow (a_{ij}) = (a_{ji})$

(4) En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)$ determine los conjuntos

- $S_A = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) \mid A = A^t\}$ matrices simétrica de orden 3.
- $AS_A = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) \mid A = -A^t\}$ matrices antisimétrica de orden 3.

(5) Demuestre que:

- $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) \Longrightarrow A + A^t \in S_A$
- $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) \Longrightarrow A - A^t \in AS_A$

(6) Demuestre que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) = S_A \oplus AS_A$. Es decir que se satisfacen simultáneamente las propiedades[1]

- $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3) = S_A + AS_A$
- $S_A \cap AS_A = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)}\}$

(7) Complete las siguientes sentencias:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $A = A^t$ entonces $x =$
- Si $A$ es simétrica entonces $A - A^t =$
- Si $A$ es una matriz triangular superior entonces $A^t$ es
- Si $A$ es una matriz diagonal entonces $A^t =$

(8) Define una nueva operación en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(2)$ como sigue:

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Consideremos el siguiente conjunto:

[1] En este caso se dice que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(3)$ es suma directa de los conjuntos $S_A$ y $AS_A$

$$G = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2) \right\}$$

- Muestre que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$
- Demuestre que (G,+) es un grupo
- Si $G' = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Demuestre que $G = G'$

## 3. Grupo de polinomios

**Definición 3.1.** *Un polinomio $p(x)$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ en la "indeterminada $x$", es una suma formal infinita de la forma:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

*donde los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$ son nulos, salvo para un número finito de valores de $i$.*

**Ejemplo 3.1.1.** (1) $p(x) = 2 + 3x + 0x^2 - 5x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \cdots = 2 + 3x - 5x^3$

(2) $q(x) = 0 + x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + x^5 + \cdots = x + x^5$

(3) $h(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots = 0$

(4) *En general, notaremos un polinomio de la forma,*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

**Definición 3.1.2.** *El conjunto de polinomios será notado como:*

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid (a_i \in \mathbb{R}), (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \right\} \tag{9}$$

**Observación 3.1.3.** *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces tenemos dos casos posibles:*

- ⧫ *Existe al menos un $i$ tal que $a_i \neq 0$ en tal caso $p(x) \neq 0$, y el mayor de los $i$ no nulos es llamado el grado del polinomio y lo notamos $\partial p(x)$*
- ⧫ *Caso contrario todos los $a_i$ son cero, en este caso decimos que $p(x)$ es el polinomio nulo y lo notamos $p(x) = 0$ y decimos que su grado no existe.*

**Ejemplo 3.1.4.**

(1) $p(x) = 2 + 3x - 5x^3 \Longrightarrow \partial p(x) = 3$

(2) $q(x) = x + x^5 \Longrightarrow \partial p(x) = 5$

(3) *En general,*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \ \wedge \ a_n \neq 0 \Longrightarrow \partial p(x) = n$$

## 3.2. Adición de polinomios.

(1) Igualdad de polinomios

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$ dos polinomios entonces

$$p(x) = q(x) \Longleftrightarrow n = m \wedge a_i = b_i \quad (\forall i; i = 1, 2, \ldots, n)$$

(2) Adición de polinomios

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$ en $\mathbb{R}[x]$ entonces definimos la operación binaria.

$$\begin{array}{cccccc} + & : & \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] & \longmapsto & \mathbb{R}[x] \\ & & (p(x), q(x)) & \longmapsto & p(x) + q(x) \end{array}$$

Tal que

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i \tag{10}$$

**Ejemplo 3.2.1.**

(1) *Si* $p(x) = 1 + 2x - 3x^5$ *y* $q(x) = -4 + 3x + 4x^2 + 7x^5 + 2x^7$ *entonces*

$$p(x) + q(x) = -3 + 5x + 4x^2 + 4x^5 + 2x^7$$

(2) *Si* $p(x) = 3 - x^3$ *y* $q(x) = x^3$ *entonces* $p(x) + q(x) = 3$

**Observación 3.2.2.** *En general por la forma de sumar dos polinomios tenemos en los ejemplos que:*

$$\partial(p(x) + q(x)) \leq \max\{\partial p(x), \partial q(x)\}$$

**Teorema 3.3.** $(\mathbb{R}[x], +)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración

- Ya vimos que "+" es una operación en $\mathbb{R}[x]$

- Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son elementos de $\mathbb{R}[x]$ entonces

$$[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$$

Si $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ y $r(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ entonces

$$
\begin{aligned}
[p(x)+q(x)]+r(x) &= \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right] + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = \sum_{i=0}^{n} [a_i+b_i]x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} ([a_i+b_i]+c-i)x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i+[b_i+c_i])x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} [b_i+c_i]x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left[\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i\right] \\
&= p(x)+[q(x)+r(x)]
\end{aligned}
$$

Luego "+" es asociativa en $\mathbb{R}[x]$

- $e_{\mathbb{R}[x]}=0$ es el neutro en $\mathbb{R}[x]$, respecto de "+", pues

$$p(x)+0=p(x) \quad \wedge \quad 0+p(x)=p(x) \qquad (\forall p(x); p(x)\in \mathbb{R}[x])$$

- Si $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ entonces $[p(x)]^{-1}=\sum_{i=0}^{n} -a_i x^i = -p(x)$, es el inverso de $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$, respecto de "+", pues

$$p(x)+[p(x)]^{-1} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} -a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} [a_i-a_i]x^i = \sum_{i=0}^{n} 0x^i = 0 = e_{\mathbb{R}[x]}$$

- Si $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $q(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ entonces

$$p(x)+q(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i+a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = q(x)+p(x)$$

**Corolario 3.4.** *Si definimos* $\mathbb{R}_n[x]=\{p(x)\in\mathbb{R}[x] \mid \partial p(x)\leq n\}\cup\{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$ *entonces* $(\mathbb{R}_n[x],+)$ *es un grupo abeliano* $(\forall n;\ n\in\mathbb{N})$. *Observe que* $\mathbb{R}_n[x]$ *es el conjunto de todos los polinomios hasta grado n unidos con el polinomio nulo.*

## 4. Un ejemplo de grupo no conmutativo

Consideremos un conjunto $A$, para fijar ideas, con tres elementos, quizás los vértices de un triángulo, o tres personas distintas sentadas en una mesa o mejor;

$$A=\{1,2,3\}$$

Define a partir del conjunto $A$ el nuevo conjunto:

$$S_3(A)=\{\varphi : A \longmapsto A \mid \ \varphi \text{ es una función biyectiva}\}$$

- En primer lugar, determinemos ¿ Quién es $S_3(A)$ ?

  Sabemos que $\varphi\in S_3(A) \iff \varphi$ inyectiva y sobreyectiva. Así que para cada uno de los elementos de $S_3(A)$ podemos adoptar la siguiente notación:

$$\varphi_0 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_1 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_2 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_3 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_4 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

$$\varphi_5 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{inyectiva sin duda}$$

Son las únicas!!!. Así que

$$S_3(A) = \{1_{S_3(A)}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$$

♦ Si definimos en $S_3(A)$, la operación binaria composición de funciones:

$$\begin{array}{cccc} \circ & : & S_3(A) & \longmapsto & S_3(A) \\ & & (\varphi_i, \varphi_j) & \longmapsto & (\varphi_i \circ \varphi_j) \end{array}$$

entonces $(S_3(A), \circ)$ es un grupo no abeliano.

Para verificar esto, seguiremos la siguiente rutina:

- Aprendiendo a operar:

  $$(\varphi_2 \circ \varphi_3) : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \varphi_5$$

  Trabaja por definición, es decir lee así:

  En $\varphi_3$ el "1 va al 2" y en $\varphi_2$ "2 va al 2", luego, "1 va al 2".

  En $\varphi_3$ el "2 va al 1" y en $\varphi_2$ "1 va al 3", luego, "2 va al 3".

  En $\varphi_3$ el "3 va al 3" y en $\varphi_2$ "3 va al 1", luego, "3 va al 1".

- De acuerdo a esta forma de operar, tenemos que en general:

  $$\varphi_0 \circ \varphi_i = \varphi_i \quad \wedge \quad \varphi_i \circ \varphi_0 = \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

  Luego, $\varphi_0 = 1_{S_3(A)}$ es el neutro en $S_3(A)$

- Buscando los inversos:

$$(\varphi_1)^{-1} = \varphi_1$$

$$(\varphi_2)^{-1} = \varphi_2$$

$$(\varphi_3)^{-1} = \varphi_3$$

$$(\varphi_4)^{-1} = \varphi_5$$

$$(\varphi_5)^{-1} = \varphi_4$$

- $\varphi_3 \circ \varphi_2 = \varphi_4 \neq \varphi_2 \circ \varphi_3 = \varphi_5$

  Luego, $(S_3(A), \circ)$, es un grupo no conmutativo (o no abeliano).

## 5. Homomorfismos de grupos

Consideremos para fijar ideas los conjuntos: $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 2)$, $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}^2$ (en esta dirección no aporta mayor información el hecho de tomar "n" elementos en vez de 2) entonces podemos hacer las siguientes observaciones y preguntas:

(1) $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2), +)$, $(\mathbb{R}_1[x], +)$ y $(\mathbb{R}^2, +)$ son grupos abelianos, cada uno con su operación binaria correspondiente.

(2) ¿ Es diferente sustantivamente el arreglo de dos datos en forma de; columna o de fila o de par ordenado ?

En esta dirección tenemos lo siguiente:

- Podemos colocar entre estos conjuntos biyecciones naturales, a saber:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2) & \stackrel{\varphi}{\longmapsto} & \mathbb{R}_1[x] \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} & \longmapsto & a_{11} + a_{12}x \end{array} \tag{11}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[x] & \stackrel{\varphi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2) \\ a_{11} + a_{12}x & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \end{array} \tag{12}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[x] & \stackrel{\phi}{\longmapsto} & \mathbb{R}^2 \\ a_0 + a_1x & \longmapsto & (a_0, a_1) \end{array} \tag{13}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \stackrel{\phi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{R}_1[x] \\ (a, b) & \longmapsto & a + bx \end{array} \tag{14}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2) & \stackrel{\psi}{\longmapsto} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} & \longmapsto & (a_{11}, a_{12}) \end{array} \tag{15}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \stackrel{\psi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 2) \\ (a_{11}, a_{12}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \end{array} \tag{16}$$

- Por ejemplo, la función $\varphi$ satisface la siguiente propiedad:

  Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi(A+B) &= \varphi\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}\right] \\ &= \varphi\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}+b_{11}+(a_{12}+b_{12})x \\ &= a_{11}+a_{11}x+b_{11}+b_{12}x \\ &= \varphi(A)+\varphi(B) \end{aligned}$$

  Observen que $A+B$ representa la suma de matrices fila de orden $(1\times 2)$ y $\varphi(A)+\varphi(B)$, representa la suma de polinomios hasta de grado 1.

  Se puede comprobar directamente que las otras funciones satisfacen una propiedad similar en su contexto, así que vamos a archivar esta propiedad en una definición.

**Definición 5.1.** *Sean $(G,*)$ y $(G',\star)$ dos grupos y $h : G \longmapsto G'$ una función. Diremos que $h$ es un homomorfismo de grupos si satisface la siguiente propiedad.*

$$h(u*v) = h(u)\star h(v) \quad (\forall u; u\in G), (\forall v; v\in G)$$

**Ejemplo 5.1.1.** *Si definimos $h : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h(x,y) = (x+2y, 3x-y)$ entonces $h$ es un homomorfismo de grupos*

*En efecto, si $u\in\mathbb{R}^2$ y $v\in\mathbb{R}^2$, debemos mostrar que $h(u+v) = h(u)+h(v)$. En consecuencia:*

$$\left.\begin{array}{lcl} u\in\mathbb{R}^2 & \Longleftrightarrow & u=(x_1,y_1) \\ v\in\mathbb{R}^2 & \Longleftrightarrow & u=(x_2,y_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

*Luego,*

$$\begin{aligned} h(u+v) &= h(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= (x_1+x_2+2(y_1+y_2), 3(x_1+x_2)-(y_1+y_2)) \\ &= (x_1+x_2+2y_1+2y_2, 3x_1+3x_2)-y_1-y_2) \\ &= (x_1+2y_1, 3x_1-y_1)+(x_2+2y_2, 3x_2-y_2) \\ &= h(x_1,y_1)+h(x_2,y_2) \\ &= h(u)+h(v) \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.1.2.** *Si $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que para $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n)$, $h(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}$ entonces $h$ es un homomorfismo de grupos.*

*En efecto, si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (n)$ entonces*

$$\begin{aligned} h(A+B) &= h(a_{ij}+b_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_{ii}+b_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} \\ &= h(A)+h(B) \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.1.3.** *Si* $h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ *tal que* $h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 - a_2x + a_0x^2$ *entonces* $h$ *es un homomorfismo de grupos*

*En efecto, si* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ *y* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ *entonces*

$$\begin{aligned}
h(p(x) + q(x)) &= h(a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2)\\
&= h(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2)\\
&= (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)x + (a_0 + b_0)x^2\\
&= a_1 + b_1 - a_2x - b_2x + a_0x^2 + b_0x^2\\
&= a_1 - a_2x + a_0x^2 + b_1 - b_2x + b_0x^2\\
&= h(p(x)) + h(q(x))
\end{aligned}$$

**Ejemplo 5.1.4.** *Las funciones definidas en* (11), (12), (13), (14), (15), (16), *son homomorfismos de grupo*

**Definición 5.2.** *Si* $(G, *)$ *y* $(G', \star)$ *son dos grupos entonces notaremos*

$$Hom(G, G') = \{h : G \longmapsto G' \mid h \text{ homomorfismo}\} \tag{17}$$

**Lema 5.2.1.** *Si* $(G, *)$ *y* $(G', \star)$ *son dos grupos, y* $h \in Hom(G, G')$ *entonces*

(1) $h(e_G) = e_{G'}$

*Observamos en primer lugar que*

$$\begin{aligned}
h(e_G) &= h(e_G * e_G) && (\text{ propiedad del neutro})\\
&= h(e_G) \star h(e_G) && (h \in Hom(G, G'))
\end{aligned}$$

*Y luego,*

$$(h(e_G) \star (h(e_G))^{-1} = h(e_G)) \Longrightarrow h(e_G) = e_{G'}$$

(2) $(h(g))^{-1} = h(g^{-1})$
*Para verificar esta propiedad podemos proceder como sigue*

$$\begin{aligned}
e_{G'} &= h(e_G)\\
&= h(g * g^{-1})\\
&= h(g) \star h(g^{-1})
\end{aligned}$$

*Así que.*

$$(e_{G'} = h(g) \star h(g^{-1})) \Longrightarrow (h(g))^{-1} = h(g^{-1})$$

**Definición 5.3.** *Si* $(G, *)$ *y* $(G', \star)$ *son dos grupos, y* $h \in Hom(G, G')$ *entonces*

(1) $ker(h) = \{g \in G \mid h(g) = e_{G'}\}$ *se llama el núcleo del homomorfismo* $h$.

(2) $Img(h) = \{h(g) \in G' \mid g \in G\}$ *se llama la imagen del homomorfismo* $h$.

**Teorema 5.4.** *Si* $(G, *)$ *y* $(G', \star)$ *son dos grupos, y* $h \in Hom(G, G')$ *entonces*

$$h \text{ inyectivo } \Longleftrightarrow ker(h) = \{e_G\}$$

Demostración

- ⧫ Si suponemos que $h$ es inyectiva entonces para $g \in G$

$$\begin{array}{rcll} g \in ker(h) & \Longleftrightarrow & h(g) = e_{G'} & \text{(definición de kernel)} \\ & \Longrightarrow & h(g) = h(e_G) & (h(e_G) = e_{G'}) \\ & \Longrightarrow & g = e_G & (h \text{ inyectiva}) \\ & \Longrightarrow & ker(h) \subset \{e_G\} & \\ & \Longrightarrow & ker(h) = \{e_G\} & (\text{Pues, } e_G \in \ker(h)) \end{array}$$

- ⧫ Recíprocamente, si suponemos que $ker(h) = \{e_G\}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} h(g_1) = h(g_2) & \Longrightarrow & h(g_1) \star (h(g_2))^{-1} = e_{G'} \\ & \Longrightarrow & h(g_1) \star h((g_2)^{-1}) = e_{G'} \\ & \Longrightarrow & h(g_1 * (g_2)^{-1}) = e_{G'} \\ & \Longrightarrow & g_1 * (g_2)^{-1} \in ker(h) \\ & \Longrightarrow & g_1 * (g_2)^{-1} = e_{G'} \\ & \Longrightarrow & g_1 = g_2 \end{array}$$

**Ejemplo 5.4.1.** *Sea $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $h(a,b,c) = a + bx + cx^2$ entonces*

- *$h$ es un homomorfismo de grupos, pues*

  *Si $u = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ entonces*

$$\begin{array}{rcl} h(u+v) & = & h(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \\ & = & a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 \\ & = & (a_1 + b_1 x + c_1 x^2) + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2) \\ & = & h(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2) \\ & = & h(u) + h(v) \end{array}$$

- *$h$ es inyectivo, de acuerdo al teorema (5.4) si $ker(h) = \{(0,0,0)\}$, así que*

$$\begin{array}{rcl} u \in ker(h) & \Longleftrightarrow & u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge h(u) = e_{\mathbb{R}_2[x]} \\ & \Longleftrightarrow & u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge h(a,b,c) = 0 + 0x + 0x^2 \\ & \Longleftrightarrow & u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge a + bx + cx^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ & \Longleftrightarrow & u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge (a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0) \\ & \Longleftrightarrow & u = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

  *Luego, $h$ es inyectivo*

**Ejemplo 5.4.2.** *Si $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, tal que $T(x,y,z) = (x + 2y + z, x - y - z, z)$ entonces $T$ es un homomorfismo de grupos.*

*Para ello debemos verificar que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para cada $u$ y $v$ en $\mathbb{R}^3$*

*Por tanto, si $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ entonces $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$, y*

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T((u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)) \\
&= ((u_1+v_1)+2(u_2+v_2)+(u_3+v_3), (u_1+v_1)-(u_2+v_2)-(u_3+v_3), (u_3+v_3)) \\
&= (u_1+v_1+2u_2+2v_2+u_3+v_3, u_1+v_1-u_2-v_2-u_3-v_3, u_3+v_3) \\
&= (u_1+2u_2+u_3, u_1-u_2-u_3, u_3)+(v_1+2v_2+v_3, v_1-v_2-v_3, v_3) \\
&= T(u_1,u_2,u_3)+T(v_1,v_2v_3) \\
&= T(u)+T(v)
\end{aligned}
$$

*Así que, $T$ es un homomorfismo de grupos.*

*Ahora, calculemos el "Núcleo de (T)" o kernel de $T$ o $ker(T)$, para concluir acerca de su inyectividad.*

$$
\begin{aligned}
u \in ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff u = (u_1,u_2,u_3) \wedge T((u_1,u_2,u_3)) = (0,0,0) \\
&\iff u = (u_1,u_2,u_3) \wedge (u_1+2u_2+u_3, u_1-u_2-u_3, u_3) = (0,0,0) \\
&\iff u = (u_1,u_2,u_3) \wedge \left.\begin{array}{ccccccc} u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & 0 \\ u_1 & - & u_2 & - & u_3 & = & 0 \\ & & & & u_3 & = & 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (u_1,u_2,u_3) \wedge \left[u_3 = 0 \wedge \left.\begin{array}{ccccc} u_1 & + & 2u_2 & = & 0 \\ u_1 & - & u_2 & = & 0 \end{array}\right|\right] \\
&\iff u = (u_1,u_2,u_3) \wedge u_3 = u_1 = u_2 = 0 \\
&\iff u = (0,0,0)
\end{aligned}
$$

*Luego, $ker(T) = \{(0,0,0)\}$, y $T$ es un homomorfismo inyectivo.*

*Finalmente determinemos la imagen de $T$, para concluir acerca de la sobreyectividad.*

$$
\begin{aligned}
v \in Img(T) &\iff v \in \mathbb{R}^3 \wedge (\exists u; u \in \mathbb{R}^3) : T(u) = v \\
&\iff v = (v_1,v_2,v_3) \wedge T(u_1,u_2,u_3) = (v_1,v_2,v_3) \\
&\iff v = (v_1,v_2,v_3) \wedge \left.\begin{array}{ccccccc} u_1 & + & 2u_2 & + & u_3 & = & v_1 \\ u_1 & - & u_2 & - & u_3 & = & v_2 \\ & & & & u_3 & = & v_3 \end{array}\right| \\
&\iff v = (v_1,v_2,v_3) \wedge \left[u_3 = v_3 \wedge \left.\begin{array}{ccccc} u_1 & + & 2u_2 & = & v_1 - v_3 \\ u_1 & - & u_2 & = & v_2 + v_3 \end{array}\right|\right] \\
&\iff v = (v_1,v_2,v_3) \wedge \left[u_3 = v_3 \wedge \ 3u_2 = v_1 - v_2 - 2v_3\right] \\
&\iff v = (v_1,v_2,v_3) \wedge \left[u_3 = v_3 \wedge \begin{array}{ccc} u_2 & = & \dfrac{v_1 - v_2 - 2v_3}{3} \\ u_1 & = & \dfrac{v_3 + 2v_2 + v_1}{3} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

*Luego, tenemos que existe $u = \left(\dfrac{v_3 - 2v_2 + v_1}{3}, \dfrac{v_1 - v_2 - 2v_3}{3}, v_3\right)$, tal que*

$$
T\left(\frac{v_3 + 2v_2 + v_1}{3}, \frac{v_1 - v_2 - 2v_3}{3}, v_3\right) = (v_1,v_2,v_3) \tag{18}
$$

*Así concluimos que $T$ es sobreyectiva, pues $Img(T) = \mathbb{R}^3$*

*En particular, si definimos la función* $H : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$H(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{v_3 + 2v_2 + v_1}{3}, \frac{v_1 - v_2 - 2v_3}{3}, v_3\right) \tag{19}$$

*entonces de* (18) *y* (19), *sigue que:*

$$\begin{aligned}
(T \circ H)(v_1, v_2, v_3) &= T\left(\frac{v_3 + 2v_2 + v_1}{3}, \frac{v_1 - v_2 - 2v_3}{3}, v_3\right) \\
&= \left(\frac{v_3 + 2v_2 + v_1}{3} + 2\frac{v_1 - v_2 - 2v_3}{3} + v_3, \frac{v_3 + 2v_2 + v_1}{3} - \frac{v_1 - v_2 - 2v_3}{3} - v_3, v_3\right) \\
&= (v_1, v_2, v_3)
\end{aligned}$$

*Análogamente,*

$(H \circ T)(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3)$. *Es decir,* $T$ *posee inversa y* $H$, *la es. Es decir* $H = T^{-1}$

## 6. Isomorfismos de Grupos

**Definición 6.1.** *Sea* $h \in Hom(G, G')$ *entonces* $h$ *se llama un isomorfismo de grupos si* $h$ *es biyectiva, es decir* $h$ *es inyectiva y sobreyectiva. En tal caso diremos que* $G$ *y* $G'$ *son isomorfos y notaremos* $G \cong G'$

*Al conjunto de isomorfismos entre los grupos* $G$ *y* $G'$, *lo notaremos como:*

$Iso(G; G') = \{h \in Hom(G, G') \mid h \text{ isomorfismo } \}$, *y* $Aut(G) = Iso(G; G)$, *será el conjunto de automorfismo de* $G$.

**6.2. Isomorfismos Canónicos.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos los isomorfismos canónicos.

(1) $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (1 \times n)$

Basta definir el homomorfismo canónico:

$$h : R^n \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (1 \times n) :\ h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Y su homomorfismo inverso

$$h^{-1} : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (1 \times n) \longmapsto R^n :\ h^{-1}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(2) $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}_n[x]$

Basta definir el homomorfismo canónico:

$$h : \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}_n[x] :\ h(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Y su homomorfismo inverso

$$h^{-1} : \mathbb{R}_n[x] \longmapsto \mathbb{R}^{n+1} :\ h^{-1}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

(3) En suma, como grupos tenemos que $(\forall n; n \in \mathbb{N})$:

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (1 \times n) \cong \mathbb{R}_{n-1}[x] \tag{20}$$

**6.3. Isomorfismos Elementales de Matrices.** Llamaremos operaciones elementales de matrices a las funciones.

(1) Permutación de filas:

$$\begin{array}{ccccc}(L_r \longleftrightarrow L_s) & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)\\ & & A & \longmapsto & (L_r \longleftrightarrow L_s)(A)\end{array} \tag{21}$$

Donde $(L_r \longleftrightarrow L_s)(A)$ es igual que $A$ salvo que tiene permutada la fila $r$ con la fila $s$

(2) Ponderación de una fila por una constante no nula.

$$\begin{array}{ccccc}(L_r \longrightarrow \alpha L_r) & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)\\ & & A & \longmapsto & (L_r \longleftrightarrow \alpha L_r)(A)\end{array} \tag{22}$$

Donde $(L_r \longrightarrow L_s)(A)$ es igual que $A$ salvo que tiene multiplicada la fila $r$ por la constante no nula $\alpha$

(3) Adición de un múltiplo de una fila a otra fila.

$$\begin{array}{ccccc}(L_r \longleftrightarrow L_r+\alpha L_s) & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m) & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n\times m)\\ & & A & \longmapsto & (L_r \longleftrightarrow L_r+\alpha L_s)(A)\end{array} \tag{23}$$

Donde $(L_r \longleftrightarrow L_r+\alpha L_s)(A)$ es igual que $A$, salvo que tiene la fila $r$ sustituida por la fila $r$ más $\alpha$ veces la fila $s$, con $\alpha \neq 0$

**Ejemplo 6.3.1.** *Si consideramos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 6\\ 3 & -5 & 4 & 12\\ 9 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

*entonces como la "composición de funciones" es una función podemos hacer lo siguiente:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 6\\ 3 & -5 & 4 & 12\\ 9 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix} \quad (L_1 \longrightarrow \tfrac{1}{2}L_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3\\ 3 & -5 & 4 & 12\\ 9 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix} (L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3\\ 0 & -11 & 16 & 3\\ 9 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix} \quad (L_2 \longrightarrow L_3 - 9L_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3\\ 0 & -11 & 16 & 3\\ 0 & -16 & 43 & -26\end{pmatrix}$$

**Teorema 6.3.2.** *Las operaciones elementales de matrices definidas en* (21), (22) *y* (23) *son isomorfismos de grupos.*

*En efecto*

*Que son homomorfismos, es inmediato, y su biyectividad sigue de los siguientes hechos*

- $L_s \longleftrightarrow L_r$ *es inversa de* $L_r \longleftrightarrow L_s$.
- $L_i \longrightarrow \dfrac{1}{\alpha}L_i$ *es inversa de* $L_i \longrightarrow \alpha L_i$
- $L_i \longrightarrow L_i + \dfrac{1}{\alpha}L_j$ *es inversa de* $L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j$

## 7. Ejercicios Propuestos de Homomorfismos

(1) Sea $T: \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, z)$
- Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos.
- Demuestre que $T$ es sobreyectivo.
- Grafique $ker(T)$

(2) Sea $T: \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, x - z, y - x)$
- Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos.
- Demuestre que $T$ no es un Isomorfismo.
- Grafique $ker(T)$

(3) Sea $T: \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, x - z, y)$
- Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos.
- Demuestre que $T$ es un Isomorfismo.
- Determine $T^{-1}$

(4) Sea $T: \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, x - z, y)$
- Demuestre que $T \circ T$ es un Isomorfismo.
- Determine $(T \circ T)^{-1}$

(5) Sea $T: \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (3) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $T(a_{ij}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ii}$
- Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos.
- demuestre que $T$ es sobreyectivo.
- Determine $ker(T)$

(6) Sea $h: \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d, b - c)$.
- Muestre que $h$ es un homomorfismo de grupos
- Determine el $\ker(h)$
- Muestre que $h$ es sobreyectivo

(7) Sea $h: \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}^4$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b, b, c - b, d - a)$
- Demuestre que $h$ es un isomorfismo de grupos
- Determine $h^{-1}$

(8) Sea $h: \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}^4$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b, b - a, c - b, d - a)$
- Demuestre que $h$ no es un isomorfismo de grupos
- Determine $\ker(h)$

(9) Sea $T: \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (3) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}\ (3)$ tal que $T(a_{ij}) = (a_{ji})$
- Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos.
- demuestre que $T$ es un isomorfismo.

(10) Sea $h: \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & b \\ c - b & d - a \end{pmatrix}$

- Demuestre que $h$ es un isomorfismo de grupos

- Determine $h^{-1}$

(11) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a-b \\ c-b & d-a \end{pmatrix}$

- Demuestre que $h$ no es un isomorfismo de grupos
- Determine Img(h)

(12) Si $(G, *)$ un grupo y $T : G \longmapsto G$ una función tal que
- $T$ es un homomorfismo de grupos
- $T \neq (0)$ y $T \neq I_G$
- $T \circ T = T$

entonces demuestre que $T$ no es inyectiva.

(13) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1, a_0 - a_1, a_1)$

- Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos
- Determine $\ker(T)$
- Grafique Img$(T)$

(14) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 + a_0x - a_1x^2$

- Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos
- Demuestre que $T$ es un isomorfismo
- Determine $T^{-1}$

(15) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_3[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0x + \dfrac{a_1}{2}x^2 + \dfrac{a_2}{3}x^3$
- Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos
- Determine $Img(T)$

(16) Exhiba un isomorfismo entre los grupos $\mathbb{R}_n[x]$ y $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}\,(1 \times (n+1))$

(17) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 - \lambda a_1x + a_0x^2$. Determine el conjunto

$$I = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo de grupos}\}$$

(18) Sea $(\mathbb{G}, +)$ un grupo abeliano y $h : \mathbb{G} \longmapsto \mathbb{G}$ un homomorfismo de grupos tal que

- $h \neq 0$ (no es el homomorfismo nulo)
- $h \neq 1_{\mathbb{G}}$ (no es el homomorfismo identidad)
- $h \circ h = h$

Demuestre que $h$ no es un isomorfismo

## 8. Proyecto de Integración: Relaciones de Equivalencia, Grupos y Homomorfismos

Consideremos a la luz de lo que hemos analizado hasta ahora, la idea desarrollada en el proyecto integrado (**??**). Recordemos que allí teníamos los siguientes ingredientes:

♦ $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$, un grupo con la adición "+" (Ver ejemplo 1.2.1, (8))

♦ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, también un grupo con la adición "+"

♦ $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z)$, no es sólo una función sino que también es un homomorfismo de grupos, porque.

Si $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned}
f(u+v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\\
&= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - (z_1 + z_2))\\
&= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - z_1 - z_2)\\
&= (x_1 + y_1 + z_1, x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 + z_2, x_2 + y_2 - z_2)\\
&= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)\\
&= f(u) + f(v)
\end{aligned}$$

♦ Además, $f^{-1}(0, 0) = \ker(f)$, pues.

$$u \in f^{-1}(0,0) \iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge f(u) = (0,0) \iff u \in \ker(f)$$

Así que, $f^{-1}(0, 0) = \ker(f)$

♦ $\ker(f)$ es un grupo con la adición en $\mathbb{R}^3$, (Cuando un subconjunto de un grupo es además un grupo con las mismas operaciones del grupo ambiente, se lo llama un subgrupo), ya que.

- Si $u \in \ker(f)$ y $v \in \ker(f)$ entonces

$$\left.\begin{aligned}
u \in \ker(f) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\\
v \in \ker(f) &\iff v \in \mathbb{R}^3 \wedge f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(u+v) = f(u) + f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

  Así que + es una operación cerrada en el $\ker(f)$.

- Si $u \in \ker(f)$, $v \in \ker(f)$ y $w \in \ker(f)$ entonces

$$\begin{aligned}
f[(u+v)+w] &= f(u+v) + f(w) = f(u) + f(v) + f(w) = 0_{\mathbb{R}^2}\\
f[u+(v+w)] &= f(u) + f(v+w) = f(u) + f(v) + f(w) = 0_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned}$$

  Así que,+ es asociativa en $\ker(f)$

- $0_{\mathbb{R}^2} = 0_{\ker(f)}$, pues $f(0, 0, 0) = (0, 0)$, ver Lema 5.2.1

- Del Lema 5.2.1 sigue también que, $f(-u) = -f(u)$, así que $u \in \ker(f) \Longrightarrow -u \in \ker(f)$

♦ Si en $\overline{\mathbb{R}^3} = \{\overline{u} \mid u \in \mathbb{R}^3\}$, donde $\overline{u} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (u - v) \in \ker(f)\}$, definimos la operación $+$, como sigue:

$$\overline{u} + \overline{v} \quad = \quad \overline{u + v}$$

entonces $\overline{\mathbb{R}^3}, +$ es un grupo abeliano, donde $\ker(f) = e_{\overline{\mathbb{R}^3}} = \overline{(0,0,0)}$, (se los dejo como un ejercicio, para familiarizarse aún más, con el trabajo de clases de equivalencia).

♦ $\pi : \mathbb{R}^3 \longmapsto \overline{\mathbb{R}^3}$ tal que $\pi(u) = \overline{u}$ es un homomorfismo sobreyectivo, porque.

$$\pi(u + v) \quad = \quad \overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v} = \pi(u) + \pi(v)$$

Se lo llama usualmente homomorfismo proyección.

♦ Además, $\overline{f} : \overline{\mathbb{R}^3} \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{f}(\overline{u}) = f(u)$ es un isomorfismo de grupos, y para verificarlo basta probar que $\overline{f}$ es un homomorfismo, pues ya verificamos que es biyectiva en el proyecto integrado (**??**)

- Que $\overline{f}$ es un homomorfismo sigue de que

$$\overline{f}(\overline{u} + \overline{v}) \quad = \quad \overline{f}(\overline{u + v}) = f(u + v) = f(u) + f(v) = \overline{f}(\overline{u}) + \overline{f}(\overline{v})$$

- Sin embargo, para usar nuestras técnicas, podemos mostrar que es inyectiva a través del estudio del núcleo o kernel de $\overline{f}$.

$$\begin{aligned}
\overline{u} \in \ker(\overline{f}) &\iff \overline{u} \in \overline{\mathbb{R}^3} \wedge \overline{f}(\overline{u}) = (0,0) \\
&\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge f(u) = (0,0) \\
&\iff u \in \ker(f) \\
&\iff u \in \overline{(0,0,0)} \\
&\iff \overline{u} = \overline{(0,0,0)}
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(\overline{f} = \{\overline{(0,0,0)}\})$ y $\overline{f}$ es inyectiva

♦ Finalmente, $\overline{\mathbb{R}^3} \cong \mathbb{R}^2$. Se llama a $\overline{\mathbb{R}^3}$ grupo cuociente y se lo denota en este caso por $\mathbb{R}^3 / \ker(f) \cong \mathbb{R}^2$

## 8.1. Ejercicios Propuestos.

(1) Sea $h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_1[x]$ tal que $h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 - a_1 + a_2x$.

(a) Muestre que $h$ es un homomorfismo sobreyectivo y no inyectivo

(b) Si definimos en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación $p(x)\Re q(x) \iff (p(x) - q(x)) \in h^{-1}(0 + 0x)$ entonces demuestre que:

- $\Re$ es una relación de equivalencia
- $\overline{(0 + 0x + 0x^2)} = h^{-1}(0 + 0x)$
- Muestre que $\mathbb{R}_2[x] / \ker(h) \cong \mathbb{R}_1[x]$

(2) Sean $(\mathbb{G}, \cdot)$ y $(\mathbb{G}', \cdot)$ dos grupos y $h : \mathbb{G} \longmapsto \mathbb{G}'$ un homomorfismo sobreyectivo

- Demuestre que $\mathbb{G}/_{\ker(h)} \cong \mathbb{G}'$
- Concluya que $\mathbb{G} \cong \mathbb{G}' \Longleftrightarrow \ker(h) = \{0_{\mathbb{G}}\}$

## 9. Situaciones de Desempeño: Estructura de Grupos

### 9.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante ”Situaciones Problemáticas” que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y ”en lo posible haber aprehendido” de los tópicos analizados.

### 9.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es ”incognita”, o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar ”sinónimos matemáticos”, que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

### 9.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

(1) Sea $G = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 < a < 1\}$. Define en $G$ la operación binaria, $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

(a) Determine (si existe), el elemento neutro respecto de la operación $*$

(b) Determine (si existe), el elemento inverso para cada elemento de $G$.

(c) Demuestre que que $*$ es una operación conmutativa.

(2) Define en $\mathbb{Z}$ la operación

$$
\begin{array}{rcccl} * & : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longmapsto & \mathbb{Z} \\ & & (m,n) & \longmapsto & m*n \end{array} \quad \text{tal que } m*n = m-n+1
$$

Determine

- El neutro (si es que existe) en $\mathbb{Z}$ respecto de la operación $*$.
- El elemento inverso (si es que existe), respecto de la operación $*$, para cada $z\in\mathbb{Z}$.

(3) Sea $(\mathbb{G}, *)$ un grupo

(a) Demuestre que

$$x*x = x\ (\forall x; x\in\mathbb{G}) \Longrightarrow \mathbb{G} = \{e_{\mathbb{G}},\} \quad (\text{ donde } e_{\mathbb{G}} \text{ es el neutro de } \mathbb{G})$$

(b) Demuestre que

$$x*x = e_{\mathbb{G}} \quad (\forall x; x\in\mathbb{G}) \Longrightarrow \mathbb{G} \text{ es un grupo abeliano, ( es decir } x*y = y*x)$$

(4) Si $(G,*)$ es un grupo abeliano entonces demuestre que

$$(a\ *\ b)^2 = a^2 * b^2$$

(donde $z^2 = z*z$ , $\forall z; z\in G$)

(5) Considere la función $T:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\longmapsto\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(A)=A^t$, donde $A^t$ significa la matriz traspuesta de la matriz $A$, ver la definición en el módulo Estruc.:Grupos, anillos y cuerpos, recursos, grupo de matrices en definiciones y ejemplos.

(a) Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos, es decir, demuestre que $T(A+B)=T(A)+T(B)$

(b) Demuestre que $T$ es biyectiva

(c) Determine $T^{-1}$

(d) Demuestre que $\ker(T)=\{A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\mid T(A)=(0)\}=\{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$

(e) Determine el conjunto $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_1=\{A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\mid T(A)=A\}$

(6) Sea $T:\mathbb{R}^2\longmapsto\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y)=(x+y,x-y,x+3y)$. Demuestre que

(a) $T$ es un homomorfismo de grupos

(b) $T$ es inyectivo

(7) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(A) = A - A^t$

(a) Demuestre que $T$ es un homomorfismo de Grupos

(b) ¿$T$ es un isomorfismo?. Justifique su respuesta.

(8) Si se define la función $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto (\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(ax^2 + bx + c) = (a+b)x^2 + (b-c)x + a + b + c$$

Demuestre que T es un Isomorfismo de grupos

(9) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$

(a) Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(T)$. Concluya que $T$ no es inyectiva.

(10) Sea $T : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} (x+y+z+t) & (x+y-z) \\ \\ (x+y+z+2t) & (x-y+z) \end{pmatrix}$

(a) Demuestre que $h$ es un homomorfismo de grupos, $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

(b) Determine el conjunto

$$S_1 = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ no es inyectiva}\}$$

(c) Determine el conjunto

$$S_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ es sobreyectiva}\}$$

## 10. Solución de Situaciones de Desempeño: Estructura de Grupos

(1) Sea $G = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 < a < 1\}$. Define en $G$ la operación binaria, $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

(a) Determine (si existe), el elemento neutro respecto de la operación $*$

Debemos resolver la ecuación $a * e_G = a = e_G * a \qquad (\forall a; a \in G)$

$$\begin{aligned}
a * e_G = a &\iff \frac{a+e_G}{1+ae_G} = a\\
&\iff a + e_G = a + a^2 e_G\\
&\iff e_G = a^2 e_G\\
&\iff (a^2-1)e_G = 0\\
&\Longrightarrow a^2 = \pm 1 \vee e_G = 0\\
&\Longrightarrow e_G = 0 \qquad (\text{pues } -1 < a < 1)
\end{aligned}$$

Finalmente verificamos directamente $e_G = 0$,

$$a * 0 = \frac{a+0}{1+a\cdot 0} = \frac{a}{1} = a$$

(b) Determine (si existe), el elemento inverso para cada elemento de $G$.

Debemos resolver la ecuación $a * a^{-1} = 0 = a^{-1} * a \qquad (\text{para cada } a; a \in G)$

$$\begin{aligned}
a * a^{-1} = 0 &\iff \frac{a+a^{-1}}{1+aa^{-1}} = 0\\
&\iff a + a^{-1} = 0\\
&\Longrightarrow a^{-1} = -a
\end{aligned}$$

Finalmente verificamos que $a^{-1} = -a$, pues $a * (-a) = \dfrac{a-a}{1-a^2} = 0$

(c) Demuestre que $*$ es una operación conmutativa.

Debemos mostrar que $a * b = b * a$ para todos los elementos de $G$.

$$\begin{aligned}
a * b &= \frac{a+b}{1+ab}\\
&= \frac{b+a}{1+ba}\\
&= b * a
\end{aligned}$$

(2) Define en $\mathbb{Z}$ la operación

$$\begin{array}{cccccl}
* & : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longmapsto & \mathbb{Z} & \text{tal que } m * n = m - n + 1\\
 & & (m,n) & \longmapsto & m * n &
\end{array}$$

Determine

- El neutro (si es que existe) en $\mathbb{Z}$ respecto de la operación $*$.

Solución

Etapa 1. El neutro respecto de la operación $(*)$ existe si y sólo si existe $0_{\mathbb{Z}}$ tal que satisface globalmente la ecuación

$$m * 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} * m = m \qquad (\forall m; m \in \mathbb{Z})$$

entonces

$$\begin{aligned} m * 0_{\mathbb{Z}} = m &\iff m - 0_{\mathbb{Z}} + 1 = m \\ &\iff 0_{\mathbb{Z}} = 1 \end{aligned}$$

Finalmente verificamos directamente si el candidato es adecuado:

$$\begin{aligned} m * 1 &= m - 1 + 1 \\ &= m \qquad (\forall m; m \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} 1 * m &= 1 - m + 1 \\ &= 2 - m \\ &\neq m \quad (\text{salvo para } m = 1!!!) \end{aligned}$$

Luego no existe neutro respecto de $(*)$.

- El elemento inverso (si es que existe), respecto de la operación $*$, para cada $z \in \mathbb{Z}$.
  Como no existe neutro respecto de $(*)$ entonces no existe para cada elemento inverso respecto de $(*)$.

(3) Sea $(\mathbb{G}, *)$ un grupo

(a) Demuestre que

$$x * x = x \ (\forall x; x \in \mathbb{G}) \Longrightarrow \mathbb{G} = \{e_{\mathbb{G}}, \} \quad (\text{ donde } e_{\mathbb{G}} \text{ es el neutro de } \mathbb{G})$$

En efecto
Como $\mathbb{G}$ es un grupo entonces su neutro $e_{\mathbb{G}}$ es único, respecto del cumplimiento de la relación,

$$x * e_{\mathbb{G}} = e_{\mathbb{G}} * x = x \quad (\forall x; x \in \mathbb{G})$$

Luego,

$$x * x = x \ (\forall x; x \in \mathbb{G}) \Longrightarrow x = e_{\mathbb{G}} \Longrightarrow \mathbb{G} \subset \{e_{\mathbb{G}}\} \subset \mathbb{G} \Longrightarrow \mathbb{G} = \{e_{\mathbb{G}}\}$$

(b) Demuestre que

$$x * x = e_{\mathbb{G}} \quad (\forall x; x \in \mathbb{G}) \Longrightarrow \mathbb{G} \text{ es un grupo abeliano, ( es decir } x * y = y * x)$$

En efecto, en primer lugar,

$$x * x = e_{\mathbb{G}} \Longrightarrow x = x^{-1} \qquad\qquad (\bigstar)$$

En segundo lugar, como

$$(x * y) * (y * x)^{-1} = (x * y) * (x^{-1} * y^{-1}) \overset{(\bigstar)}{=} (x * y) * (x * y)) = e_{\mathbb{G}}$$

entonces $(x * y)^{-1} = (y * x)^{-1}$, y

$$x * y \;=\; y * x$$

(4) Si $(G,*)$ es un grupo abeliano entonces demuestre que

$$(a\ *\ b)^2 = a^2 * b^2$$

(donde $z^2 = z*z\ \ ,\ \forall z; z\in G$)

En efecto

$$\begin{array}{rcll}
(a*b)^2 & = & (a*b)*(a*b) & (\text{ Definición de la operación } *)\\
 & = & a*(b*a)*b & (\text{ Asociatividad respecto de la operación } *)\\
 & = & a*(a*b)*b & (\text{ Conmutatividad de la operación } *)\\
 & = & (a*a)*(b*b) & (\text{ Asociatividad respecto de la operación } *)\\
 & = & a^2*b^2 &
\end{array}$$

(5) Considere la función $T:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\longmapsto\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(A)=A^t$, donde $A^t$ significa la matriz traspuesta de la matriz $A$.

(a) Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos

Sean $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$. P.d.q $T(A+B)=T(A)+T(B)$ entonces

$$T(A+B)=T(a_{ij}+b_{ij})=(a_{ji}+b_{ji})=(a_{ji})+(b_{ji})=T(a_{ij})+T(b_{ij})=T(A)+T(B)$$

Luego, $T$ es un homomorfismo de grupos.

(b) Demuestre que $T$ es biyectiva

Etapa 1. Por demostrar que $T$ es inyectiva. Supongamos que $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y que $T(A)=T(B)$ entonces

$$\begin{array}{rcl}
T(A)=T(B) & \Longrightarrow & A^t=B^t\\
 & \Longrightarrow & (a_{ji})=(b_{ji})\\
 & \Longrightarrow & a_{ji}=b_{ji}\quad (1\le i\le 2);(1\le j\le 2)\\
 & \Longrightarrow & (a_{ij})=(b_{ij})\\
 & \Longrightarrow & A=B
\end{array}$$

Luego, $T$ es inyectiva

Etapa 2. Por demostrar que $T$ es sobreyectiva. Sea $B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ dada entonces debemos construir $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(A)=B$.

$$\begin{array}{rcl}
B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) & \Longrightarrow & B^t=(b_{ji})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\\
 & \Longrightarrow & T(B^t)=T((b_{ji}))=(b_{ij})
\end{array}$$

Luego, basta tomar $A=B^t$ y $T(A)=A^t=(B^t)^t=B$. Así que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\subset Img(T)$ y entonces $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)=Img(T)$ y $T$ es sobreyectiva

(c) Determine $T^{-1}$. Observamos que,

$$\begin{array}{rcl}
(T\circ T)(a_{ij}) & = & T(T(a_{ij}))\\
 & = & T(a_{ji})\\
 & = & (a_{ij})
\end{array}$$

Así que, $(T \circ T) = 1_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}$ y entonces $T^{-1} = T$

(d) Demuestre que $\ker(T) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid T(A) = (0)\} = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$

$$\begin{aligned}
A \in \ker(T) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ T(A) = (0)\\
&\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ T(a_{ij}) = (0)\\
&\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ (a_{ji}) = (0)\\
&\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ a_{ji} = (0) \quad (i = 1,2 \wedge j = 1,2)\\
&\iff A = (0)
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(T) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid T(A) = (0)\} = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$

(e) Determine el conjunto $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_1 = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid T(A) = A\}$

$$\begin{aligned}
A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_1 &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ T(A) = A\\
&\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ T(a_{ij}) = a_{ij}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ a_{12} = a_{21}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)
\end{aligned}$$

Luego, $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_1 = \left\{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a_{11} \in \mathbb{R}, a_{12} \in \mathbb{R}, a_{22} \in \mathbb{R}\right\}$

(6) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y) = (x+y, x-y, x+3y)$. Demuestre que

(a) $T$ es un homomorfismo de grupos

Sean $u \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$. Por demostrar que $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

$$\left.\begin{array}{l} u \in \mathbb{R}^2 \iff u = (x,y)\\ v \in \mathbb{R}^2 \iff v = (a,b)\end{array}\right\} \Longrightarrow u + v = (x+a, y+b)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x+a, y+b)\\
&= (x+a+y+b, x+a-(y+b), x+a+3(y+b))\\
&= (x+y+a+b, x-y+a-b, x+3y+a+3b)\\
&= (x+y, x-y, x+3y) + (a+b, a-b, a+3b)\\
&= T(x,y) + T(a,b)\\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

Entonces $T$ es un homomorfismo de grupos.

(b) $T$ es inyectivo, por demostrar que $\ker(T) = \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned}
u \ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^2 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge T(x,y) = (0,0,0) \\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x+y, x-y, x+3y) = (0,0,0) \\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ x-y &=& 0 \\ x+3y &=& 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x = y = 0 \\
&\iff u = (0,0) \\
&\iff \ker(T) = \{(0,0)\}
\end{aligned}$$

(7) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(A) = A - A^t$

(a) Demuestre que $T$ es un homomorfismo de Grupos

Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$. Debemos mostrar que T(A+B)=T(A)+T(B)

$$\begin{aligned}
T(A+B) &= A + B - (A+B)^t \\
&= A + B - A^t - B^t \\
&= (A - A^t) + (B - B^t) \\
&= T(A) + T(B)
\end{aligned}$$

(b) ¿$T$ es un isomorfismo?. Justifique su respuesta.

$T$ será isomorfismo de grupos: si es homomorfismo de grupos, (cosa que ya verificamos) y además debe ser biyectiva.

1. Estudiemos el núcleo de $T$, para verificar si $T$ es inyectiva o no.

$$\begin{aligned}
A \in \ker(T) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge T(A) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\
&\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A - A^t = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\
&\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = A^t \qquad (*)
\end{aligned}$$

Estudiemos que significa en $(*)$ que $A = A^t$.

$$\begin{aligned}
A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = A^t &\iff A = (a_{ij}) \wedge (a_{ij}) = (a_{ji}) \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{12}a21 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que $\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \right\}$

Luego, $T$ no es inyectiva y por tanto no es isomorfismo.

(8) Si se define la función $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto (\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + b)x^2 + (b - c)x + a + b + c$$

Demuestre que T es un Isomorfismo de grupos

Etapa 1. Por demostrar que $T$ es un homomorfismo.

Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$\begin{aligned}
T(p(x) + q(x)) &= T((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + [(a_1 + b_1) - (a_0 + b_0)]x + [(a_2 + b_2) + (a_1 + b_1)]x^2 \\
&= (a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2) + [(a_1 + b_1 - a_0 - b_0]x + [a_2 + b_2 + a_1 + b_1]x^2 \\
&= (a_0 + a_1 + a_2 + b_0 + b_1 + b_2) + [a_1 - a_0 + b_1 - b_0]x + [a_2 + a_1 + b_2 + b_1]x^2 \\
&= (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 - a_0)x + (a_2 + a_1)x^2 + (b_0 + b_1 + b_2) + (b_1 - b_0)x + (b_2 + b_1)x^2 \\
&= T(a_0 + a_1x + a_2x^2) + T(b_0 + b_1x + b_2x^2) \\
&= T(p(x)) + T(q(x))
\end{aligned}$$

Luego, $T$ es un homomorfismo de grupos

Etapa 2. Por demostrar que $T$ es inyectivo

$$\begin{aligned}
p(x) \in \ker(T) &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(p(x)) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 - a_0)x + (a_2 + a_1)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \left.\begin{array}{lcll} a_0 + a_1 + a_2 & = & 0 & (1) \\ a_1 - a_0 & = & 0 & (2) \\ a_1 + a_2 & = & 0 & (3) \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge [\text{ de } ((1) - (3))\ a_0 = 0;\ \text{de } (2)\ a_1 = 0;\ \text{de } (3)\ a_2 = 0] \\
&\Longrightarrow p(x) = 0 + 0x + 0x^2
\end{aligned}$$

Así que $\ker(T) \subset \{0 + 0x + 0x^2\}$, y como $T$ es un homomorfismo entonces $\{0 + 0x + 0x^2\} \subset \ker(T)$. de forma que

$$\ker(T) = \{0 + 0x + 0x^2\}$$

Y $T$ es inyectivo

Etapa 3. Por demostrar que $T$ es sobreyectiva, esto es por demostrar que $\mathrm{Img}(T) = \mathbb{R}_2[x]$

Como $T$ es una función entonces Img $(T) \subset \mathbb{R}_2[x]$. Así que debemos mostrar que $\mathbb{R}_2[x] \subset$ Img $(T)$ Para ello será suficiente mostrar que si $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ es dado entonces debemos resolver la ecuación $T(p(x)) = q(x)$, para algún $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned}
T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = b_0 + b_1x + b_2x^2 &\iff (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 - a_0)x + (a_2 + a_1)x^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 \\
&\iff \left.\begin{array}{lcll} a_0 + a_1 + a_2 & = & b_0 & (1) \\ a_1 - a_0 & = & b_1 & (2) \\ a_1 + a_2 & = & b_2 & (3) \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow [\text{ de } ((1) - (3))\ a_0 = b_0 - b_2;\ \text{de } (2)\ a_1 = b_1 + b_0 - b_2; \\
&\qquad \text{de } (3)\ a_2 = 2b_2 - b_0 - b_1]
\end{aligned}$$

Luego, $T(b_0 - b_2 + (b_1 + b_0 - b_2)x + (2b_2 - b_0 - b_1)x^2) = b_0 + b_1x + b_2x^2$

Así que , $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Img }(T)$ y entonces $\mathbb{R}_2[x] = \text{Img }(T)$.

(9) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$

(a) Demuestre que $T$ es un homomorfismo de grupos

Solución

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ entonces por demostrar que $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

$$\begin{aligned}
T(A+B) &= T\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) \\
&= (a_{11}+a_{22}) + (b_{11}+b_{22}) \\
&= T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ & a_{22} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= T(A) + T(B)
\end{aligned}$$

Luego, $T$ es un homomorfismo

(b) Determine $\ker(T)$. Concluya que $T$ no es inyectiva.

En efecto,

$$\begin{aligned}
A \in \ker(T) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge T(A) = 0_{\mathbb{R}} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a + d = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge d = -a \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \wedge (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Entonces

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}) \right\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(10) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\lambda x + y - 2z, x + \lambda y - 2z, z)$

(a) Demuestre que $h$ es un homomorfismo de grupos, $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

En efecto

- En primer lugar, $h$ es bien definido, transforma una matriz en un trio.

- Ahora, si $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ y $B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ entonces debemos probar que $h(A + B) = h(A) + h(B)$

$$\begin{aligned}
h(A+B) &= h\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + \\
&\quad \lambda(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2), z_1 + z_2) \\
&= (\lambda x_1 + y_1 - 2z_1, x_1 + \lambda y_1 - 2z_1, z_1) + \\
&\quad (\lambda x_2 + y_2 - 2z_2, x_2 + \lambda y_2 - 2z_2, z_2) \\
&= h\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&= h(A) + h(B)
\end{aligned}$$

(b) Determine el conjunto

$$S_1 = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ no es inyectiva}\}$$

Solución: Como $h$ es un homomorfismo entonces podemos utilizar el $ker(h)$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in S_1 &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ h \text{ no es inyectiva} \\
&\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \ker(h) \neq \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)}\}
\end{aligned}$$

Así que debemos estudiar la forma del $\ker(h)$

$$\begin{aligned}
A \in \ker(h) &\iff A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge (\lambda x + y - 2z, x + \lambda y - 2z, z) = (0,0,0) \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} \lambda x + y - 2z &=& 0 \\ x + \lambda y - 2z &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow (\lambda - 1)x + (1 - \lambda)y = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge (\lambda - 1)(x - y) = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge [(\lambda - 1) = 0 \vee (x - y) = 0]
\end{aligned}$$

Luego, $\lambda - 1 \neq 0 \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow (\lambda + 1)x = 0 \Longrightarrow [(\lambda + 1) = 0 \vee x = 0]$. Así que

$$S_1 = \{-1, 1\}$$

(c) Determine el conjunto

$$S_2 \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ es sobreyectiva}\}$$

Solución

$$\begin{aligned} \lambda \in S_2 &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ h \text{ es sobreyectiva} \\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ Img(h) = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Sabemos que es suficiente resolver en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$, la ecuación. $h(A) = u$ para $u \in \mathbb{R}^3$ dado

Entonces si $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dado, y $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} h(A) = u &\iff h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a, b, c) \\ &\iff (\lambda x + y - 2z, x + \lambda y - 2z, z) = (a, b, c) \iff \begin{array}{lcl|} \lambda x + y - 2z & = & a \\ x + \lambda y - 2z & = & b \\ z & = & c \\ \hline \end{array} \\ &\iff z = c \wedge (\lambda - 1)(x - y) = a - b \iff z = c \wedge x - y = \frac{a-b}{\lambda - 1} \wedge (\lambda - 1 \neq 0) \\ &\iff z = c \wedge x = y + \frac{a-b}{\lambda - 1} \end{aligned}$$

Luego,

$$h(A) = u \iff z = c \wedge x = y + \frac{a-b}{\lambda - 1} \wedge (\lambda + 1)y = b + 2c - \frac{a-b}{\lambda - 1}$$

.
Así que

$$S_2 = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

# Indice Alfabético

# Contenidos