Rudimentos 5: Teorema del Binomio
Profesor Ricardo Santander

Este capitulo esta destinado a presentar contenidos y actividades que permitirán al estudiante: Operar con simbología matemática, desarrollar expresiones que involucren un número finito de productos binomiales, y emplear el concepto de búsqueda instantánea, a fin de determinar rápida y eficientemente los términos en desarrollos binomiales mediante un algoritmo

1. Introducción a los Factoriales

Definición 1.1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *llamaremos* n *factorial a* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, *y definimos además* $0! = 1$

Ejemplo 1.1.1. $n! = (n-1)! \cdot n \quad$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$

En efecto

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)] \cdot n \\ &= (n-1)! \cdot n \end{aligned}$$

Definición 1.2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ *y* $k \leq n$ *llamaremos número combinatorio a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{1}$$

Ejemplo 1.2.1. $\binom{4}{3} = \dfrac{4!}{(4-3)!\,3!} = \dfrac{3! \cdot 4}{1! \cdot 3!} = 4$

Observación 1.2.2. *Consideremos un conjunto con cuatro elementos, digamos* $C = \{1,2,3,4\} \subset \mathbb{N}$ *entonces*

- ◇ *La cantidad de subconjuntos de* C *con cardinalidad 3 son los siguientes*

  $$C_1 = \{1,2,3\},\ \ C_2 = \{1,2,4\},\ \ C_3 = \{1,3,4\},\ C_3 = \{2,3,4\}$$

  Son como se ve cuatro conjuntos lo que coincide con $\binom{4}{3}$

- ◇ *La cantidad de subconjuntos de* C *con cardinalidad 2 son los siguientes seis conjuntos*

  $$C_1 = \{1,2\},\ \ C_2 = \{1,3,\},\ \ C_3 = \{1,4\},\ C_3 = \{2,3\},\ C_3 = \{2,4\},\ C_3 = \{3,4\}$$

  Y que también coincide con $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{(4-2)!\,2!} = \dfrac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 2!} = 6$

  En realidad esto no es una coincidencia, ya que en la práctica el número combinatorio $\binom{n}{k}$ *con* $k \leq n$, *fue construido para contar la cantidad de grupos con* k *elementos a partir de* n *elementos dados, (de* *allí la restricción $k \leq n$)*

1.3. Propiedades de los Números Combinatorios. Entre muchas propiedades de los números combinatorios, sólo exhibiremos las que necesitamos estrictamente para conseguir nuestros objetivos.

[1] $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$

En efecto

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

En particular, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, para verificar esta igualdad, basta hacer $k = 0$ y recordar que el conjunto vacío no tiene elementos y es subconjunto de todos los conjuntos

[2] $\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n+1}{n-(k-1)} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

En efecto

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n+1)}{(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n+1)}{(n-k)!(n-k+1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)}{n-(k-1)} = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n+1)}{n-(k-1)}\end{aligned}$$

[3] $\dbinom{n+1}{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}\dbinom{n}{k}$

En efecto

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n+1}{k+1}$$

[4] $\dbinom{n}{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1}\dbinom{n}{k}$

En efecto

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{1}{(k+1)(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{n-k}{(k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}\end{aligned}$$

[5] $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!}\\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}
$$

2. Teorema del Binomio

Teorema 2.1. *(Teorema del Binomio). Si* $n \in \mathbb{N}$*,* $a \in \mathbb{R}$ *y* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $a+b \neq 0$ *entonces*

$$
\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}
$$

Demostración

- *Debemos verificar que* $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$
- *Gestión de la información: Como* $n \in \mathbb{N}$ *entonces podemos usar el proceso de inducción matemática, para verificar la validez de la fórmula*

$$
F(n): \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})
$$

◇ *Debemos mostrar que F(1) es verdadera*

Por una parte tenemos que $(a+b)^1=(a+b)$*, y por otra,* $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{n-k}b^k=\binom{1}{0}a^{1-0}b^0+\binom{1}{1}a^{1-1}b^1=a+b$

Así que, $(a+b)^1=\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{n-k}b^k$*, y* $F(1)$ *es verdadera*

◇ *Hipótesis de inducción: Supongamos que F(n) es verdadera, es decir*

$$
(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad (H)
$$

◇ *Tesis de inducción. Debemos mostrar que F(n+1) es verdadera*

- *Desarrollando F(n+1) tenemos que*

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b)\\
&\overset{(H)}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

- *Aplicando la propiedad del reloj (**??**), a la segunda parcela en ($\star$) tenemos que*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} &= \sum_{k=0+1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}
\end{aligned}$$

- *Reemplazando en ($\star$) tenemos que:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^{k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}+\binom{n}{n}b^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^{k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^{k}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}
\end{aligned}$$

Así que F(n+1) es verdadera, y

$$(a+b)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

Corolario 2.2. En Teorema (2.1) *Para cada $k=0,1,\dots,n-1$ el término de orden $k+1$ es de la forma:*

$$\boxed{t_{k+1} \;=\; \binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}}$$

En efecto

Del teorema (2.1) sigue que

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}\\
&= \underbrace{\binom{n}{0}a^{n-0}b^{0}}_{t_1}+\underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^{1}}_{t_2}+\underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^{2}}_{t_3}+\cdots+\underbrace{\binom{n}{n}a^{n-n}b^{n}}_{t_{n+1}}
\end{aligned}$$

Así que $t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

3. Ejercicios Propuestos del Teorema del Binomio

[1] Determine el séptimo término en el desarrollo binomial $(2x - y)^{12}$

[2] Determine el noveno término en el desarrollo binomial $\left(2 + \dfrac{x}{4}\right)^{15}$

[3] Determine el decimocuarto término del desarrollo binomial $\left(4x^2y - \frac{1}{2xy^2}\right)^{20}$

[4] Determine el término que contiene a x^2 en el desarrollo binomial $\left(\sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)^{27}$

[5] Determine el término que contiene $\dfrac{x^2}{y^2}$ en el desarrollo binomial $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y^2}{2x^2}\right)^8$

[6] Determine el término que contiene a x^r en el desarrollo binomial $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$

[7] Si uno de los términos en el desarrollo binomial $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{60}$ es de la forma $a \cdot x^{-54}$. Determine el valor de a

[8] Determine el término independiente de x (si existe) en el desarrollo binomial $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{30}$

[9] Determine el valor de a en el desarrollo binomial $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{x}\right)^{20}$, de tal forma que el término independiente de x sea igual al coeficiente de x^2

[10] En el desarrollo binomial $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ el coeficiente binomial del $3^{\underline{\text{er}}}$ término es mayor que el coeficiente binomial del $2^{\underline{\text{do}}}$ término en 44 unidades. Determine, si existe, el término independiente de x.

[11] Muestre que el coeficiente del término central del desarrollo binomial $(1 + x)^{2n}$, es igual a la suma de los coeficientes de los dos términos centrales del desarrollo binomial $(1 + x)^{2n-1}$

[12] Dados los desarrollos binomiales $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n$, y $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$. Determine el conjunto

$$T \;=\; \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ Los terceros términos de los binomios sean iguales}\}$$

[13] Si en el desarrollo binomial $(1 + x)^{43}$, los coeficientes de la posición $(2m + 1)$ y $(m + 2)$ son iguales. Determine, si es posible, el valor de m

[14] Determine el coeficiente de x^n en el desarrollo binomial $(1 - x + x^2)(1 + x)^{2n+1}$

[15] En el desarrollo binomial $\left(\dfrac{x}{a} - y^2\right)^{15}$, el término que contiene a y^{22} presenta el coeficiente numérico $-\dfrac{455}{27}$. Determine el valor de a

[16] Demuestre que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

[17] Considere los reales positivos p y q tales que, $p+q=1$. Demuestre que

$$r_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n) \implies \sum_{k=0}^{n} (k \cdot r_k) = n \cdot p.$$

4. Situaciones de Desempeño: Binomio de Newton

4.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante ”Situaciones Problemáticas” que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y ”en lo posible haber aprehendido” de los tópicos analizados.

4.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es ”incognita”, o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar ”sinónimos matemáticos”, que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

4.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

[1] En el desarrollo binomial, $B = \left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ para $(n \in \mathbb{N})$. Demuestre que si existe un término de la forma x^{-4m} entonces n debe ser un múltiplo de 4.

[2] Determine, (si existe) el término independiente de x en el desarrollo binomial

$$(2x+1)\left(1 + \frac{2}{x}\right)^n$$

[3] Demuestre usando el teorema del binomio que

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} = 0$$

[4] Si ($n \in \mathbb{N}$), y $A = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n$ y $B = \left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$, son dos desarrollos binomiales tales que $t_k(A)$ es el k- ésimo término de A y $t_k(B)$ es el k- ésimo término de B, ($k \geq 1$) entonces demuestre que

$$t_k(A) = t_k(B) \Longrightarrow n \text{ es un número par}$$

[5] Si en el desarrollo binomial $\left(\sqrt[3]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$, la relación entre entre el término séptimo contado desde el principio, y el término séptimo contado desde el final es $\dfrac{1}{6}$ entonces determine n.

[6] En el desarrollo binomial $(2x + b)^5$. Determine b, para que el coeficiente del término que contiene a x^4, sea ocho veces el coeficiente del término que contiene a x^3.

[7] Calcule usando el desarrollo del Binomio de Newton

$$S = (\sqrt{2} + 1)^5 - (\sqrt{2} - 1)^5$$

[8] Del desarrollo binomial de $(3x + 1)^{2n} + (3x - 1)^{2n}$ deduzca que

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} 9^{n-m} = \frac{1}{2}(4^{2n} + 2^{2n})$$

[9] Si en el desarrollo binomial $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, el coeficiente de T_4 y T_{13} son iguales entonces determine el término independiente de x.

[10] Si en el desarrollo de $\left(z^{-\frac{3}{2}} - z^{\frac{1}{3}}\right)^n$, la razón entre el coeficiente binomial del término t_3 y el del término t_5, es $\dfrac{2}{7}$ entonces determine el término que tiene a $z^{-\frac{5}{2}}$

[11] Determine, si es que existen, en el desarrollo del binomio $(3x + 2)^{19}$, dos términos consecutivos tales que sus coeficientes sean iguales.

5. Solución de Situaciones de Desempeño: Binomio de Newton

[1] En el desarrollo binomial, $B = \left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ para $(n \in \mathbb{N})$. Demostremos que si existe un término de la forma x^{-4m} entonces n debe ser un múltiplo de 4.

Solución

⧫ Debemos mostrar que $n = 4 \cdot r$

⧫ Gestión de la información

◇ t_{s+1} es el término pedido si y sólo si

$$\begin{aligned} t_{s+1} &= \binom{n}{s} x^{n-s} \left(\tfrac{-1}{x^3}\right)^s \\ &= \binom{n}{s} x^{n-s} \tfrac{(-1)^s}{x^{3s}} \\ &= \binom{n}{s} x^{n-4s}(-1)^s \end{aligned}$$

◇ x^{-4m} aparecerá en el término t_{s+1} si y sólo si

$$\begin{aligned} x^{-4m} = x^{n-4s} &\implies -4m = n - 4s \\ &\implies 4s - 4m = n \\ &\implies 4(s-m) = n \end{aligned}$$

⧫ Conclusión : " n es un múltiplo de 4."

[2] Determinemos, (si existe) el término independiente de x en el desarrollo binomial

$$(2x+1)\left(1 + \frac{2}{x}\right)^n$$

Solución

⧫ Debemos determinar el término independiente de x, es decir aquel en que aparece $x^0 = 1$.

⧫ Gestión de la información

◇ **Del Teorema del Binomio (2.1)** sigue que

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{(n-k)} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\, x^{-k}$$

◇ Multiplicando por $(2x+1)$ tenemos que

$$(2x+1)\left(1 + \frac{2}{x}\right)^n = (2x+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\, x^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1}\, x^{(-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\, x^{-k}$$

$\diamond$ Luego, existirá el término independiente de x si

$$-k+1=0 \wedge -k=0 \iff k=1 \wedge k=0$$

$\blacklozenge$ Así que el término pedido es $\binom{n}{1}\cdot 2^2+\binom{n}{0}\cdot 2^0=4n+1$

[3] Demostremos usando el teorema del binomio que

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}=0$$

Solución

$$\left[(1-1)^n=0 \ \wedge \ (1-1)^n \overset{\textbf{Teo(2.1)}}{=} \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(1)^{(n-s)}(-1)^s\right] \Longrightarrow 0=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(-1)^s$$

[4] Si ($n\in\mathbb{N}$), y $A=\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ y $B=\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, son dos desarrollos binomiales tales que $t_k(A)$ es el k- ésimo término de A y $t_k(B)$ es el k- ésimo término de B, ($k\geq 1$) entonces demostremos que

$$t_k(A)=t_k(B)\Longrightarrow n \text{ es un número par}$$

Solución

$\blacklozenge$ Debemos verificar que $n=2\cdot s$, para algún entero s.

$\blacklozenge$ Gestión de la información

$\diamond$ Para el binomio A tenemos que:

$$t_k(A) \ = \ \binom{n}{k-1}(x^2)^{n-(k-1)}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}=\binom{n}{k-1}(x)^{2n-3(k-1)}$$

$\diamond$ Para el binomio B tenemos que:

$$t_k(B) \ = \ \binom{n}{k-1}(x^3)^{n-(k-1)}\cdot\frac{1}{(x^2)^{k-1}}=\binom{n}{k-1}(x)^{3n-5(k-1)}$$

$\blacklozenge$ Finalmente comparando términos tenemos que n es par, pues,

$$\begin{aligned}
t_k(A)=t_k(B) &\iff \binom{n}{k-1}(x)^{2n-3(k-1)}=\binom{n}{k-1}(x)^{3n-5(k-1)}\\
&\iff (x)^{2n-3(k-1)}=(x)^{3n-5(k-1)}\\
&\iff 2n-3(k-1)=3n-5(k-1)\\
&\iff n=2\underbrace{(k-1)}_{s}
\end{aligned}$$

[5] Si en el desarrollo binomial $\left(\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$, la relación entre entre el término séptimo contado desde el principio, y el término séptimo contado desde el final es $\dfrac{1}{6}$ entonces determine n.

Solución

(a) Sabemos que en est desarrollo binomial sus términos son de la forma

$$t_{k+1}=\binom{n}{k}2^{\left(\frac{n-k}{3}\right)}\,3^{-\left(\frac{k}{3}\right)}$$

(b) Como este desarrollo binomial tiene $n+1$ términos entonces aquellos cuya relación es $\frac{1}{6}$ son t_7 y t_{n-5}, por tanto tenemos que

$$6\binom{n}{6}2^{\frac{n-6}{3}}\,3^{-\frac{6}{3}}=\binom{n}{n-6}2^{\frac{n-n+6}{3}}\,3^{-\frac{n-6}{3}} \qquad (*)$$

Pero,

$$\binom{n}{n-6}=\frac{n!}{(n-(n-6))!\,(n-6)!}=\frac{n!}{6!(n-6)!}=\binom{n}{6}$$

Luego, aplicando este resultado en $(*)$ obtenemos

$$6\cdot 2^{\frac{n-6}{3}}\,3^{-2}=2^2\,3^{-\frac{n-6}{3}}\Longrightarrow 6^{\frac{n-6}{3}}=6\Longrightarrow n=9$$

[6] En el desarrollo binomial $(2x+b)^5$. Determine b, para que el coeficiente del término que contiene a x^4, sea ocho veces el coeficiente del término que contiene a x^3.

Solución

(a) El término de orden $k+1$ en este binomio es de la forma:

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \binom{5}{k}(2x)^{5-k}b^k \\ &= \binom{5}{k}2^{5-k}b^kx^{5-k} \end{aligned}$$

Luego, el coeficiente de t_{k+1} es

$$c_{k+1}=\binom{5}{k}2^{5-k}b^k$$

(b) Ahora, t_{k+1} es el término que contiene a x^s si y sólo si $s=5-k$ equivalentemente $k=5-s$, por tanto

$$\begin{aligned} t_1 &= \binom{5}{1}2^{5-1}b^1x^{5-1}\Longrightarrow c_1=\binom{5}{1}2^4b \\ t_2 &= \binom{5}{2}2^{5-2}b^2x^{5-2}\Longrightarrow c_2=\binom{5}{2}2^3b^2 \end{aligned}$$

(c) Finalmente,

$$\begin{aligned} c_2 = 8c_1 &\iff \binom{5}{1}2^4b = 8\binom{5}{2}2^3b^2 \\ &\iff 5\cdot 2^4 = 2^3\frac{5!}{3!2!}2^3b \\ &\iff b = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

[7] Calcule usando el desarrollo del Binomio de Newton

$$S = (\sqrt{2}+1)^5 - (\sqrt{2}-1)^5$$

Solución

(a) Aplicando directamente el Teorema del Binomio de Newton obtenemos,

$$(\sqrt{2}+1)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{\frac{5-k}{2}}(1)^k$$

$$(\sqrt{2}-1)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{\frac{5-k}{2}}(-1)^k$$

(b) Así que restando miembro a miembro tenemos,

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}+1)^5 - (\sqrt{2}-1)^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{\frac{5-k}{2}}(1)^k + \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{\frac{5-k}{2}}(-1)^{k+1} \\ &= 2\left[\binom{5}{1}2^2 + \binom{5}{3}2 + \binom{5}{5}\right] \\ &= 82 \end{aligned}$$

[8] Del desarrollo binomial de $(3x+1)^{2n} + (3x-1)^{2n}$ deduzca que

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{2n}{2m}9^{n-m} = \frac{1}{2}(4^{2n} + 2^{2n})$$

En efecto,

(a) Si desarrollamos directamente los binomios obtenemos que,

$$(3x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(3x)^{2n-k}(1)^k$$

$$(3x-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(3x)^{2n-k}(-1)^k$$

(b) Si sumamos los desarrollos binomiales anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
(3x+1)^{2n}+(3x-1)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(3x)^{2n-k}(1)^k+\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(3x)^{2n-k}(-1)^k\\
&= 1+\binom{2n}{1}(3x)^{2n-1}+\dots+\binom{2n}{2n}+1-\binom{2n}{1}(3x)^{2n-1}+\dots+\binom{2n}{2n}\\
&= \sum_{k=0}^{2n}2\left(\begin{array}{c}2n\\2k\end{array}\right)(3x)^{2n-2k}
\end{aligned}$$

(c) Si hacemos $x=1$ en los datos gestionados encima entonces se deduce que

$$4^{2n}+2^{2n}=\sum_{m=0}^{n}2\binom{2n}{2m}9^{n-m}$$

Equivalentemente

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{2n}{2m}9^{n-m}=\frac{1}{2}(4^{2n}+2^{2n})$$

.

[9] Si en el desarrollo binomial $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$, el coeficiente de T_4 y T_{13} son iguales entonces determine el término independiente de x.

Solución

(a) Como el término general de este desarrollo binomial es de la forma,

$$t_{k+1}=\binom{n}{k}x^{(2n-2k)}x^{-k}=\binom{n}{k}x^{2n-3k}$$

entonces el coeficiente de este término es de la forma

$$c_{k+1}=\binom{n}{k}$$

(b) Ahora, comparando los coeficientes tenemos que

$$\begin{aligned}
c_4=c_{13} &\iff \binom{n}{3}=\binom{n}{12}\\
&\Longrightarrow 12=n-3\Rightarrow n=15\\
&\Longrightarrow n=15
\end{aligned}$$

(c) Del resultado obtenido sigue que el término general del desarrollo binomial es:

$$t_{k+1}=\binom{15}{k}x^{30-3k}$$

(d) Finalmente concluimos que el termino independiente de x se produce cuando $30-3k=0$, es decir cuando k=10 y entonces el término pedido es

$$t_{11}=\binom{15}{10}$$

[10] Si en el desarrollo de $\left(z^{-\frac{3}{2}} - z^{\frac{1}{3}}\right)^n$, la razón entre el coeficiente binomial del término t_3 y el del término t_5, es $\dfrac{2}{7}$ entonces determine el término que tiene a $z^{-\frac{5}{2}}$

Solución

(a) El término general del desarrollo binomial es en este caso,

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} z^{\frac{11k-9n}{6}} (-1)^k$$

Por lo tanto el coeficiente del término general es:

$$c_{k+1} = \binom{n}{k} (-1)^k$$

(b) Esto nos permite la siguiente deducción,

$$\begin{aligned}
\frac{C_3}{C_5} = \frac{2}{7} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\binom{n}{2}(-1)^2}{\binom{n}{4}(-1)^4} = \frac{2}{7} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{12}{(n-2)(n-3)} = \frac{2}{7} \\
&\Longleftrightarrow \quad n^2 - 5n - 36 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad n = 9 \vee n = -4 \\
&\Longleftrightarrow \quad n = 9
\end{aligned}$$

(c) Así el término general del desarrollo binomial es:

$$t_{k+1} = \binom{9}{k} z^{\frac{11k-81}{6}} (-1)^k$$

(d) Finalmente en el desarrollo binomial existe un término que contiene a $z^{-\frac{5}{2}}$, si y solamente si existe $k \in \{0, 1, ..., 9\}$ tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{11k-81}{6} = -\frac{5}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad 11k - 81 = -15 \\
&\Longleftrightarrow \quad k = 6
\end{aligned}$$

Y, el término buscado es,

$$t_7 = \binom{9}{6} z^{-\frac{5}{2}}$$

[11] Determine, si es que existen, en el desarrollo del binomio $(3x+2)^{19}$, dos términos consecutivos tales que sus coeficientes sean iguales.

Solución

(a) Como

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \binom{19}{k}(3x)^{(19-k)}\ 2^k \\ &= \binom{19}{k}3^{(19-k)}\ 2^k\ x^{19-k} \end{aligned}$$

entonces

$$c_{k+1} = \binom{19}{k}3^{(19-k)}\ 2^k$$

(b) Conforme a lo anterior en el desarrollo binomial existen dos términos consecutivos que tengan el mismo coeficiente si se verifica la relación,

$$\begin{aligned} c_{k+1} = c_{k+2} &\iff \binom{19}{k}(3)^{(19-k)}2^k = \binom{19}{k+1}(3)^{(19-k-1)}2^{(k+1)} \\ &\iff \binom{19}{k} = \frac{2}{3}\binom{19}{k+1} \\ &\iff k = 7 \end{aligned}$$

(c) Finalmente, los términos pedidos son t_8 y t_9

Indice Alfabético

Contenidos