Rudimentos 2: Lógica Matemática
Profesor Ricardo Santander Baeza

El capitulo Rudimentos sobre Lógica Matemática está destinado esencialmente a desarrollar técnicas, que permitan validar o refutar fórmulas proposicionales a través de procesos concretos y abstractos. Para ello se generará un proceso de validación, con sustento en la definición de tablas de verdad y falsedad para las operaciones lógicas iniciales; conjunción, disyunción, implicación (inferencia) y doble implicación (equivalencia), para posteriormente dar origen a una base de datos que permita validar o negar proposiciones más complejas (proposiciones compuestas), y finalmente prescindir de la estructura de "tablas de verdad", para validar en forma abstracta las proposiciones lógicas.

1. Proposiciones Lógicas

Para demostrar que una situación es correcta o incorrecta, deben ocurrir algunas situaciones que aparentemente son tan naturales, que ni siquiera nos damos cuenta de su existencia.
En efecto

- Para demostrar la veracidad o falsedad de "algo", debe existir una situación, la cual debe ser decidida de acuerdo a ciertas claves enmarcadas en un sistema comprensible (lógico) para los que están involucrados en el suceso.

- Dicha situación para ser infalible en su decisión, debe poseer dos y sólo dos "opciones de verdad", es decir, verdadera o falsa (creíble o no creíble).

- La argumentación total debe estar compuesta de una sucesión de estas situaciones las cuales interactúan armoniosamente, ya sea para obtener un valor de verdad verdadero o un valor de verdad falso.

Definición 1.1. *Llamaremos proposición lógica a una oración declarativa que es verdadera o falsa, pero nunca ambas.*

Ejemplo 1.1.1. *p: Álgebra es una asignatura anual de Ingeniería Civil en la Universidad de Santiago de Chile*

Ejemplo 1.1.2. *q:* $2^3 = 6$

Ejemplo 1.1.3. *r: Colo Colo es el mejor equipo de fútbol de Chile*

Con toda seguridad, p y q son proposiciones lógicas, porque existen formas bien definidas que permiten corroborar el valor de verdad de las mismas, y aunque pese, r en las actuales condiciones, no es una proposición lógica, pues no existe un proceso válido que permita decir que efectivamente ella es verdadera o falsa.

Ejemplo 1.1.4. *Si llamamos* $p(x) = x - 1 \in \mathbb{R}[x]$ *entonces para* $a \in \mathbb{R}$ *fijo podemos definir el "conjunto"*

$$\mathbb{S}_a \quad = \quad \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = a\}$$

En este ejemplo, podemos "según nuestra experiencia" tratar de determinar para ese $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\mathbb{S}_a$, es decir tratar de decir quienes son los elementos de $\mathbb{S}_a$, y por ende también decir quienes no son miembros de $\mathbb{S}_a$, para ello procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S}_a &\iff x \in \mathbb{R} \wedge p(x) = a & (1)\\ &\iff x \in \mathbb{R} \wedge x - 1 = a & (2)\\ &\iff x \in \mathbb{R} \wedge x = a + 1 & (3)\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\mathbb{S}_a = \{a+1\} \qquad (4)$$

Después del procedimiento observamos que:

[1] Para caracterizar los elementos de $\mathbb{S}_a$ es necesario, según (1), realizar dos operaciones: Una saber quienes son los elegibles o candidatos y la otra es verificar quienes de esos satisfacen el filtro, o hacen que la proposición lógica sea verdadera, decir $p(x) = a$.

[2] La etapa descrita en (2) es una operacionalización del filtro o proposición lógica, es decir plantea la ecuación $x - 1 = a$

[3] La etapa descrita en (3) reduce el problema de pertenecer o no al conjunto, resolviendo en $\mathbb{R}$ la ecuación $x = a + 1$

[4] Finalmente, (4) caracteriza, en este caso, al elemento del conjunto como $a + 1$, y por ejemplo para $a = 0$, tenemos que $\mathbb{S}_0 = \{1\}$ y en este caso:

$$\begin{array}{lll} 1 \in \mathbb{S}_0 & \text{pues es verdadero que} & p(1) = 0\\ 2 \notin \mathbb{S}_0 & \text{pues es falso que} & p(2) = 0 \end{array}$$

2. Generación de Proposiciones y Tablas de Verdad

Definición 2.1. *Si p es una proposición lógica entonces le asociaremos una "Tabla de verdad" de la forma:*

p
1
0

donde, 1 representa el valor de verdad verdadero(encendido)y 0 representa el valor de verdad falso (apagado).

Definición 2.2. *Si p es una proposición lógica entonces $\sim p$ representará la proposición negación de p, y le asociaremos una "Tabla de verdad" de la forma:*

p	$\sim p$
1	0
0	1

(5)

Definición 2.3. *Una proposición lógica se dirá compuesta si es formada por más de una proposición lógica. Para las proposiciones p y q, las siguientes proposiciones compuestas por ellas serán consideradas básicas*

Definición 2.3.1. *Llamaremos Conjunción o Producto lógico de p y q a $p \wedge q$, y le asignaremos la "Tabla de verdad"*

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Sintetiza el concepto de intersección en el sentido que: $p \wedge q$ será verdadera sólo si p y q lo son simultáneamente

Definición 2.3.2. *Llamaremos Disyunción o Suma lógica de p y q a $p \vee q$, y le asignaremos la "Tabla de verdad"*

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Sintetiza el concepto de unión en el sentido que: Para que $p \vee q$ sea verdadera basta que una de ellas lo sea

Definición 2.3.3. *Llamaremos Implicación lógica de p y q a $p \implies q$, y le asignaremos la Tabla de verdad*

p	q	$p \Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Sintetiza el concepto de relación causal, en el sentido que $p \Longrightarrow q$ será falsa sólo cuando la hipótesis p es verdadera y la conclusión q es falsa. Caso contrario la nueva proposición es verdadera.

Definición 2.3.4. *Llamaremos Bicondicional lógico de p y q, ó equivalencia lógica, a la proposición $p \Longleftrightarrow q$, o $(p \equiv q)$ y le asignaremos la "Tabla de verdad"*

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Sintetiza el concepto de equivalencia, concepto central en el proceso de clasificación, $p \Longleftrightarrow q$ será verdadera sólo cuando ambas tengan el mismo valor de verdad.

Definición 2.4. *Una proposición compuesta se llama una Tautología si su valor de verdad es siempre verdadero, independiente del valor de verdad de las proposiciones que la componen*

Ejemplo 2.4.1. *Si p es una proposición lógica entonces $\sim (\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología*

En efecto

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$\Longleftrightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

T

Definición 2.5. *Una proposición compuesta se llama una Contradicción si su valor de verdad es siempre falso, independiente del valor de verdad de las proposiciones que la componen*

Ejemplo 2.5.1. *Si p es una proposición lógica entonces $p \wedge \sim p$ es una contradicción*

En efecto

p	$\sim p$	p	$\wedge$	$\sim p$
1	0	1	0	0
0	1	0	0	1

C

3. Ejercicios Resueltos de Lógica

3.1. Ejercicios Resueltos Usando Tablas de Verdad.

[1] Si p, q y r son proposiciones lógicas entonces son equivalentes $p \wedge (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \wedge r$, es decir la proposición

$$p \wedge (q \wedge r) \quad \Longleftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$$

es una tautología conocida como: **Asociatividad de la conjunción**

En efecto

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$\Longleftrightarrow$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0

[2] Si p, q y r son proposiciones lógicas entonces son equivalentes $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, es decir la proposición

$$p \wedge (q \vee r) \quad \Longleftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

es una tautología conocida como: **Distributividad de la conjunción**

En efecto

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$\Longleftrightarrow$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0

[3] Si p y q son proposiciones lógicas entonces son equivalentes $p\Longrightarrow q$ y $\sim p\vee q$, es decir la proposición

$$(p\Longrightarrow q)\quad\Longleftrightarrow\quad(\sim p\ \vee\ q)$$

es una tautología conocida como: **Transformación de la implicación o inferencia en disyunción**

En efecto

p	q	$\sim p$	$p\Longrightarrow q$	$\Longleftrightarrow$	$\sim p\ \vee\ q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

[4] Si p y q son proposiciones lógicas entonces son equivalentes $\sim(p\vee q)$ y $(\sim p\wedge\sim q)$es decir la proposición

$$\sim(p\vee q)\quad\Longleftrightarrow\quad(\sim p\wedge\sim q)\tag{6}$$

es una tautología conocida como: **Ley de De Morgan para la disyunción**

En efecto

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\Longleftrightarrow$	$\sim p\wedge\sim q$
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1

[5] Si p y q son proposiciones entonces

$$[p\wedge(p\Longrightarrow q)]\Longrightarrow q\tag{7}$$

es una tautología conocida como: **Modus Ponens o Método de Afirmación**

En efecto

p	q	$p \Longrightarrow q$	$p \wedge (p \Longrightarrow q)$	$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

[6] Si p, q y r son proposiciones entonces

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r) \tag{8}$$

es una tautología conocida como: **Implicación Lógica** o **Ley del Silogismo**

En efecto

p	q	r	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow r$	$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)$	$\Longrightarrow$	$p \Longrightarrow r$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

[7] Si p y q son proposiciones entonces

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$$

es una tautología conocida como: **Modus Tollens** o **Método de Negación**

En efecto

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\sim q$	$(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q$	$\Longrightarrow$	$\sim p$
1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

[8] Si p es una proposición y C una contradicción entonces

$$(\sim p \Longrightarrow C) \Longrightarrow p$$

es una tautología conocida como: **Método de Contradicción o Reducción al Absurdo**

En efecto

p	$\sim p$	C	$\sim p \Longrightarrow C$	$(\sim p \Longrightarrow C) \Longrightarrow p$
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1

3.2. Ejercicios Resueltos Usando Propiedades. [1]

[1] Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y q son proposiciones lógicas entonces

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Longrightarrow q] \equiv [(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \sim q) \Longrightarrow C]$$

En efecto

Si hacemos $p = (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n)$ entonces

$$\begin{aligned} p \Longrightarrow q &\iff p \wedge \sim q \Longrightarrow q \wedge \sim q \\ &\iff p \wedge \sim q \Longrightarrow C \end{aligned}$$

[2] Si p, q, r y s son proposiciones lógicas entonces

$$[(p \Longrightarrow r) \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow s)] \Longrightarrow [(\sim r \Longrightarrow s)]$$

es una inferencia lógica, (implicación verdadera)

En efecto

$$\begin{aligned} (p \Longrightarrow r) \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow s) &\iff \underbrace{(\sim r \Longrightarrow \sim p)}_{\text{contrapositiva}} \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow s) \\ &\Longrightarrow \underbrace{(\sim r \Longrightarrow q)}_{\text{silogismo}} \wedge (q \Longrightarrow s) \\ &\Longrightarrow \underbrace{\sim r \Longrightarrow s}_{\text{silogismo}} \end{aligned}$$

[3] Si p, q, r y s son proposiciones lógicas entonces

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow (r \wedge s)) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) \wedge (p \wedge t)] \Longrightarrow u$$

es una inferencia lógica

[1] Observen que el término propiedades, aquí significa que podemos usar nuestra base de datos, ya probada con las Tablas de Verdad

En efecto

Si hacemos $w = [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow (r \wedge s)) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) \wedge (p \wedge t)]$ entonces

$$
\begin{array}{rcll}
w & \Longrightarrow & (p \Longrightarrow (r \wedge s)) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) \wedge (p \wedge t) & \text{silogismo} \\
& \Longrightarrow & (p \Longrightarrow r) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) \wedge p & [(a \wedge b) \Longrightarrow a]\text{tautología} \\
& \Longrightarrow & p \wedge (p \Longrightarrow r) \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) & \text{conmutatividad de } \wedge \\
& \Longrightarrow & r \wedge (\sim r \vee (\sim t \vee u)) & \text{Modus ponens} \\
& \Longrightarrow & r \wedge ((\sim r \vee \sim t) \vee u) & \text{Asociatividad de } \vee \\
& \Longrightarrow & r \wedge (\sim (r \wedge t) \vee u) & \text{De Morgan} \\
& \Longrightarrow & r \wedge (\sim r \vee u) & [(a \wedge b) \Longrightarrow a]\text{tautología} \\
& \Longrightarrow & (r \wedge \sim r) \vee (r \wedge u) & \text{distributividad de } \wedge \text{ en } \vee \\
& \Longrightarrow & C \vee (r \wedge u) & \text{ley del inverso} \\
& \Longrightarrow & r \wedge u & \text{ley del neutro} \\
& \Longrightarrow & u & [(a \wedge b) \Longrightarrow b]\text{tautología}
\end{array}
$$

4. Uso de Cuantificadores

Una forma natural de generar proposiciones es a través de fórmulas para hacer proposiciones, como por ejemplo:

[1] $p(x)$: x es un natural mayor que 3

En este caso

Si notamos por I el conjunto de naturales x para los cuales $p(x)$ es verdadera y por O el conjunto de naturales x para los cuales $p(x)$ es falsa entonces

$$
\begin{array}{rclcl}
I & = & \{x \in \mathbb{N} \mid p(x) \text{ verdadera}\} & = & \{4, 5, 6, \dots\} \\
O & = & \{x \in \mathbb{N} \mid p(x) \text{ falsa}\} & = & \{1, 2, 3\}
\end{array}
$$

[2] $q(x, y) : x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1$

En este caso, como veremos más tarde, I define un circulo con centro en $(0, 0)$ y radio 1 y O es el resto del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$

Definición 4.1. *$p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama una fórmula proposicional definida en un conjunto A si:*

- *Cada x_i para $1 = 1, 2, \dots, n$ son variables en A, es decir pueden tomar valores en el conjunto A*
- *Para cada sustitución de las variables en A la fórmula se transforma en una proposición lógica*

Ejemplo 4.1.1. *Ya observamos que ($p(x)$: x es un natural mayor que 3), es una fórmula proposicional, y en particular tenemos:*

- *$p(1)$ es falsa*
- *$p(2)$ es falsa*

- *$p(3)$ es falsa*

- *$p(x)$ es verdadera para cada $x \in \mathbb{N}$ y $x \geq 4$*

Así $p(x)$ es verdadera para algunos números naturales y también $p(x)$ es falsa para algunos números naturales.

Definición 4.2. *Si $p(x)$ es una fórmula proposicional entonces*

[1] *" Para algún x; $p(x)$" es una proposición y la notaremos por $[\exists x; p(x)]$.*

[2] *" Para un único x; $p(x)$" es una proposición y la notaremos por $[\exists!\, x; p(x)]$.*

[3] *" Para todo x; $p(x)$" es una proposición y la notaremos por $[\forall x; p(x)]$*

Ejemplo 4.2.1. *Definamos en $\mathbb{R}$ las proposiciones:*

- $\diamond$ $p(x) : x \geq 0$

- $\diamond$ $q(x) : x^2 \geq 0$

- $\diamond$ $r(x) : x^2 - 3x - 4 = 0$

- $\diamond$ $s(x) : x^2 - 3 > 0$

  entonces

  - $\exists x : (p(x) \wedge r(x))$ *es verdadera, pues existe $4 \in \mathbb{R}$ tal que $p(4)$ y $r(4)$ son verdaderas.*

  - $\forall x : (p(x) \Longrightarrow q(x))$ *es verdadera, pues para cualquier valor real a, $q(a)$ es verdadera.*

  - $\forall x : (q(x) \Longrightarrow s(x))$ *es falsa, pues por ejemplo $q(1)$ es verdadera y $s(1)$ es falsa.*

La siguiente tabla especifica el comportamiento de los cuantificadores ($\exists$) y ($\forall$)

Proposición	Verdadera	Falsa
$\exists x : p(x)$	Para al menos un a, $p(a)$ es verdadera	Para cada a, $p(a)$ es falsa
$\forall x : p(x)$	Para cada a, p(a) es verdadera	Existe a tal que $p(a)$ es falsa
$\exists x :\sim p(x)$	Existe a tal que $p(a)$ es falsa	Para cada a, $p(a)$ es verdadera
$\forall x :\sim p(x)$	Para cada a, $p(a)$ es falsa	Existe a tal que $p(a)$ es verdadera

5. Ejercicios Propuestos de Lógica

[1] Usando una tabla de verdad muestre que la proposición es una equivalencia

$$(p \Longrightarrow q) \quad \Longleftrightarrow \quad [(p \wedge \sim q) \Longrightarrow (r \wedge \sim r)]$$

[2] Usando una tabla de verdad muestre que la siguiente proposición es una equivalencia

$$(p \Longrightarrow [q \vee r]) \quad \Longleftrightarrow \quad (\sim [q \vee r] \Longrightarrow \sim p)$$

[3] Demuestre que la proposición siguiente es una tautología

$$[((\sim p \vee q) \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \Longrightarrow \sim t)] \Longrightarrow p$$

[4] Muestre usando propiedades que la siguiente proposición es una inferencia lógica

$$\sim (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\sim \ p \Longrightarrow \sim \ q)$$

[5] Si p, q, r y t son proposiciones que satisfacen:

- $(p \wedge q) \Longrightarrow \sim \ r$ es una proposición falsa
- $q \Longleftrightarrow \ t$ es una proposición falsa

entonces determine el valor de verdad de la proposición:

$$\{[\ t \ \wedge (p \vee \sim \ r)] \Longrightarrow \ q\} \Longleftrightarrow \{(\sim \ p \ \vee q) \wedge r\}$$

[6] Muestre justificando paso a paso, (usando propiedades, no tablas de verdad), que la siguiente proposición es una inferencia lógica:

$$\sim [\{(\sim q \Longrightarrow \sim p) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Longrightarrow [(p \wedge r)]$$

[7] Si para las proposiciones lógicas p y q, se define el conectivo lógico $*$ como sigue:

$$p * q \text{ es Falsa si y sólo si } p \text{ y } q \text{ son verdaderas, caso contrario } p * q \text{ es verdadera}$$

Demuestre usando propiedades, que la siguiente proposición es una tautología

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) * \sim q]$$

[8] Sean p y q dos proposiciones lógicas. Si definimos el nuevo conectivo lógico:

$$p\#q \equiv [(q \wedge p) \Longrightarrow \sim p] \wedge \sim q$$

Entonces demuestre que

$$\{q \wedge [p \Longrightarrow (p\#q)]\} \vee \sim p \equiv \sim p$$

[9] Sean p y q dos proposiciones lógicas. Si definimos los dos nuevos conectivos lógicos:

$$(p * q = \sim p \Longrightarrow \sim q) \qquad \wedge \qquad (p\#q = \sim p \wedge q)$$

Entonces demuestre que

$$(\sim p * q)\#(\sim q\#p) \equiv p \wedge q$$

[10] Demuestre usando propiedades que

$$\{[p \Longrightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \Longrightarrow r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \equiv p \wedge q$$

6. Las proposiciones lógicas y el casting conjuntista

Definición 6.1. Relación entre conjunto y proposición lógica
Si p es una proposición lógica entonces llamaremos $\mathbb{A}_p$ o $\mathbb{A}$, si no hay confusión al conjunto de elementos que filtra p, es decir

$$\mathbb{A}_p = \{x \mid p \text{ es verdadera para el caso o suceso } x\} := \{x \mid p(x)\}$$

Así que, tenemos una "correspondencia" entre conjuntos y proposiciones que podemos simbolizar como sigue:

$$p \text{ proposición lógica} \quad \longleftarrow\!\!\dashrightarrow \quad \mathbb{A}_p := \{x \mid p(x)\} \tag{9}$$

En la simbolización hecha en (9) *hemos "adoptado un orden" en el sentido que una proposición es interpretada como un filtro que permite, "conjuntar" elementos que son homogéneos respecto del valor de verdad o falsedad de la proposición p. Es decir tenemos que.*

Si x es un elemento de $\mathbb{A}_p$ entonces "x es un elemento elegible" y x verifica la condición descrita por p, y recíprocamente si "x es un elemento elegible" y x verifica la condición descrita por p entonces x es un elemento de $\mathbb{A}_p$ en símbolos notaremos

$$x \in \mathbb{A}_p \iff x \text{ es elegible } \wedge p(x) \text{ es verdadera} \tag{10}$$

Ejemplo 6.1.1. *Si u es la proposición lógica que filtra el hecho de aparecer o no aparecer en la base de datos de alumnos de la Universidad de Santiago entonces*

$$\mathbb{A}_u = \{\text{Alumnos que aparecen en la base de datos de la Universidad de Santiago}\} \tag{11}$$

Definición 6.2. Conjunto Complemento
Si p es una proposición lógica entonces como $\sim p$ es una proposición lógica

$$\mathbb{A}_{\sim p} = \{x \mid \ \sim p(x)\}$$

Se llama el conjunto complementario o complemento respecto de los elegibles que satisfacen al filtro p, y lo notaremos $(\mathbb{A}_{\sim p})^c$ o $\mathbb{A}^c$ si no hay confusión.

Lema 6.2.1. *Si p es una proposición lógica tal que $\mathbb{A} = \{x \mid p(x)\}$ entonces*

$$\mathbb{A}^c = \{x \mid x \notin \mathbb{A}\} \tag{12}$$

En efecto

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{A}^c &\Longleftrightarrow x \text{ es elegible} \wedge \sim p(x) \\ &\Longleftrightarrow x \text{ es elegible } \wedge p(x) \text{ es falsa} \qquad (\text{ ver } (5)) \\ &\Longleftrightarrow x \notin \mathbb{A} \end{aligned}$$

Definición 6.3. Unión de Conjuntos
Si p y q son dos proposiciones lógicas entonces llamaremos conjunto unión de los conjuntos $\mathbb{A}_p$ y $\mathbb{A}_q$ a:

$$\mathbb{A}_p \cup \mathbb{A}_q = \{x \mid p(x) \vee q(x)\} \tag{13}$$

Lema 6.3.1. *Operacionalmente la definición dada en* (13) *significa que*

$$x \in (\mathbb{A}_p \cup \mathbb{A}_q) \Longleftrightarrow x \in \mathbb{A}_p \vee x \in \mathbb{A}_q \tag{14}$$

En efecto

$$\begin{aligned} x \in (\mathbb{A}_p \cup \mathbb{A}_q) &\Longleftrightarrow x \text{ es elegible } \wedge (p(x) \vee q(x)) \\ &\Longleftrightarrow (x \text{ es elegible } \wedge p(x)) \vee (x \text{ es elegible } \wedge q(x)) \\ &\Longleftrightarrow x \in \mathbb{A}_p \vee x \in \mathbb{A}_q \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.2. *Si definimos la proposición lógica p como los alumnos de la Universidad de Santiago que son alumnos regulares, es decir cumplen los requisitos establecidos por la institución, para ser considerados alumnos con todas las franquicias y deberes que establece el regimen de estudio vigente entonces*

$$\mathbb{A}_u = \mathbb{A}_p \cup \mathbb{A}_{\sim p}$$

donde $\mathbb{A}_u$ es definido en (11). *Pues*

[1] $\mathbb{A}_p = \{x \in \mathbb{A}_u \mid p(x)\}$

[2] $\mathbb{A}_{\sim p} = \{x \in \mathbb{A}_u \mid \sim p(x)\}$

Definición 6.4. Intersección de Conjuntos
Si p y q son dos proposiciones lógicas entonces llamaremos conjunto intersección de los conjuntos $\mathbb{A}_p$ y $\mathbb{A}_q$ a:

$$\mathbb{A}_p \cap \mathbb{A}_q = \{x \mid p(x) \wedge q(x)\} \tag{15}$$

Lema 6.4.1. *Operacionalmente la definición dada en* (13) *significa que*

$$x \in (\mathbb{A}_p \cap \mathbb{A}_q) \Longleftrightarrow x \in \mathbb{A}_p \wedge x \in \mathbb{A}_q \tag{16}$$

En efecto

$$\begin{aligned} x \in (\mathbb{A}_p \cap \mathbb{A}_q) &\Longleftrightarrow x \text{ es elegible } \wedge (p(x) \wedge q(x)) \\ &\Longleftrightarrow (x \text{ es elegible } \wedge p(x)) \wedge (x \text{ es elegible } \wedge q(x)) \\ &\Longleftrightarrow x \in \mathbb{A}_p \wedge x \in \mathbb{A}_q \end{aligned}$$

Definición 6.5. *Si A y B son dos conjuntos entonces llamaremos "Diferencia entre A y B" al conjunto $A-B$ definido por:*

$$A-B = A\cap B^c = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\} \tag{17}$$

En particular, obtenemos que

$$A-A = \emptyset$$

Definición 6.6. Inclusión de Conjuntos
Para p y q dos proposiciones lógicas diremos que el conjunto $\mathbb{A}_p$ es un subconjunto del conjunto $\mathbb{A}_q$, o está incluido en el conjunto $\mathbb{A}_q$ cuando los elementos de $\mathbb{A}_p$ son también elementos de $\mathbb{A}_q$. Si a una tal condición la notamos por $\mathbb{A}_p\subset\mathbb{A}_q$ entonces

$$\mathbb{A}_p\subset\mathbb{A}_q \iff \mathbb{A}_p = \{x\in\mathbb{A}_q \mid p(x)\} \tag{18}$$

Lema 6.6.1. *Operacionalmente la definición dada en* (18) *significa que*

$$\mathbb{A}_p\subset\mathbb{A}_q \iff (x\in\mathbb{A}_p\Longrightarrow x\in\mathbb{A}_q) \tag{19}$$

En efecto

$$\begin{aligned} x\in A_p\subset\mathbb{A}_q &\iff x\in\mathbb{A}_q\wedge p(x)\\ &\iff x \text{ es elegible } \wedge q(x)\wedge p(x)\\ &\iff x \text{ es elegible } \wedge p(x)\Longrightarrow x \text{ es elegible } \wedge q(x)\\ &\iff x\in\mathbb{A}_p\Longrightarrow x\in\mathbb{A}_q \end{aligned}$$

Definición 6.7. Igualdad de Conjuntos
Para p y q dos proposiciones lógicas diremos que el conjunto $\mathbb{A}_p$ es igual al conjunto $\mathbb{A}_q$ cuando los elementos de $\mathbb{A}_p$ son los mismos elementos de $\mathbb{A}_q$. Si a una tal condición la notamos por $\mathbb{A}_p=\mathbb{A}_q$ entonces

$$\mathbb{A}_p=\mathbb{A}_q \iff (\mathbb{A}_p\subset\mathbb{A}_q)\wedge(\mathbb{A}_q\subset\mathbb{A}_p) \tag{20}$$

Lema 6.7.1. *Operacionalmente la definición dada en* (20) *significa que*

$$\mathbb{A}_p=\mathbb{A}_q \iff x\in\mathbb{A}_p\iff x\in\mathbb{A}_q \tag{21}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_p=\mathbb{A}_q &\iff (\mathbb{A}_p\subset\mathbb{A}_q)\wedge(\mathbb{A}_q\subset\mathbb{A}_p)\\ &\iff (x\in\mathbb{A}_p\Longrightarrow x\in\mathbb{A}_q)\wedge(x\in\mathbb{A}_q\Longrightarrow x\in\mathbb{A}_p) \quad (\textit{ver } (19)) \end{aligned}$$

Observación 6.8. *Las asociaciones construidas en esta sección pueden ser pensadas, respecto de su utilidad como sigue:*

[1] *La unión de conjuntos es una acción cuantitativa o acumulativa, por ejemplo la acción "acumular archivos en un disco duro."*

[2] *La intersección de conjuntos es una acción que busca regularidades, situaciones discriminables, pero comunes por ejemplo la acción de "generar carpetas por periodos."*

[3] *La inclusión de conjuntos es una acción que busca dependencias o condiciones de refinamiento, por ejemplo "generación de subcarpetas en un periodo."*

[4] *La igualdad de conjuntos es una acción que busca clasificar, es decir busca la eficiencia por comparación respecto de un criterio dado, por ejemplo, es poco probable que busquemos imágenes en un directorio que contenga archivos con extensión que indique texto.*

7. Ejercicios Resueltos de Conjuntos

[1] Si A es un conjunto entonces

$$A \cup A = A$$

Esta propiedad se llama Idempotencia de la unión de conjuntos

Solución

Etapa 1. Si usamos el lenguaje definido incipientemente en la parte de lógica, es decir, conforme a la identificación definida en (9) hacemos $A = \{x \mid p(x)\}$ entonces el resultado sigue del hecho que $p \vee p \Longleftrightarrow p$ es una tautología.

Etapa 2. Con el lenguaje propio de los conjuntos obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cup A) & \Longleftrightarrow & x \text{ es elegible } \wedge (x \in A \vee x \in A) & (\text{ Ver } (14)) \\ & \Longleftrightarrow & x \text{ es elegible } \wedge p(x) \text{ es verdadera} & \\ & \Longleftrightarrow & x \in \{x \mid p(x)\} & (\text{ Ver } (9)) \\ & \Longleftrightarrow & x \in A & \end{array}$$

[2] $A \cap A = A$ (Idempotencia de la intersección de conjuntos)

Solución

Etapa 1. Si usamos el lenguaje definido incipientemente en la parte de lógica, es decir, conforme a la identificación definida en (9) hacemos $A = \{x \mid p(x)\}$ entonces el resultado sigue del hecho que $p \wedge p \Longleftrightarrow p$ es una tautología.

Etapa 2. Con el lenguaje propio de los conjuntos obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cap A) & \Longleftrightarrow & x \text{ es elegible } \wedge (x \in A \wedge x \in A) & (\text{ Ver } (16)) \\ & \Longleftrightarrow & x \text{ es elegible } \wedge p(x) \text{ es verdadera} & \\ & \Longleftrightarrow & x \in \{x \mid p(x)\} & (\text{ Ver } (9)) \\ & \Longleftrightarrow & x \in A & \end{array}$$

[3] $(A^c)^c = A$ (Idempotencia de la inclusión de conjuntos)

Solución

Etapa 1. Si usamos el lenguaje definido incipientemente en la parte de lógica, es decir, conforme a la identificación definida en (9) hacemos $A = \{x \mid p(x)\}$ entonces el resultado sigue del hecho que $\sim (\sim p) \Longleftrightarrow p$ es una tautología.

Etapa 2. Con el lenguaje propio de los conjuntos obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcll} x \in (A^c)^c & \Longleftrightarrow & x \text{ es elegible } \wedge (x \notin A^c) & (\text{ Ver } (12)) \\ & \Longleftrightarrow & x \text{ es elegible } \wedge p(x) \text{ es verdadera} & \\ & \Longleftrightarrow & x \in \{x \mid p(x)\} & (\text{ Ver } (9)) \\ & \Longleftrightarrow & x \in A & \end{array}$$

Estos ejercicios nos dicen que, después de la segunda aplicación no obtendremos nueva información, si se verifica ”la ley de Idempotencia.”

8. Ejercicios Propuestos de Conjunto

8.1. Para A y B conjuntos: Determine la veracidad o falsedad de las proposiciones.

[1] $A \subset (A \cup B)$

[2] $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

[3] $(A \cap B)^c \subset B^c$

[4] $(A \cup B)^c \subset (A \cap B)^c$

[5] $B \subset (A \cap B)$

[6] $(A \cup B)^c \subset A^c$

[7] $(A \cap B) \cup B = B$

8.2. Para A y B conjuntos: Simplifique las proposiciones.

[1] $(A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

[2] $(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B)$

[3] $A \cup B \cup A$

[4] $(A \cup \emptyset) \cup A)^c$

[5] $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A \cup B)$

8.3. Para A y B conjuntos: Demuestre que.

[1] $A \cup (A \cap B) = A$

[2] $A \cap [B - (A \cap B)] = \emptyset$

[3] $[(A \cap B^c)^c - (A \cup B^c)] \cup (A \cap B) = B$

9. Situaciones de Desempeño: Lógica y Conjuntos

9.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.
(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.
(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.
(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.
(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

9.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

(⋆) Lea cuidadosamente el problema.
(⋆) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.
(⋆) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.
(⋆) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

9.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

[1] Demuestre usando propiedades (algebra de proposiciones) que es una es Tautología la siguiente proposición.

$$[(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q] \quad \vee \quad [\sim p\,]$$

[2] Si definimos el conectivo lógico # como sigue:

$$q\#p = [p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim p)] \vee (q \vee p)$$

entonces demuestre que

$$(\sim p \Rightarrow q)\#[(p\wedge \sim q)\# \sim q)\# \sim q] \qquad (*)$$

Es una tautología

[3] Si definimos el conectivo lógico $*$

$p * q$ es Falsa sólo si p y q son verdaderas, caso contrario $p * q$ es Verdadera.

entonces determinemos el valor de verdad de la proposición

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p\wedge \sim q) * \sim q] \qquad (**)$$

[4] Si A y B son dos conjuntos entonces demuestre que

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ley de De Morgan)

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Ley de De Morgan)

[5] Si A, B y C son conjuntos entonces demuestre que

(a) $A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ (Transitividad de la Inclusión)

(b) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$

10. Solución Situaciones de Desempeño: Lógica y Conjuntos

[1] Demuestre usando propiedades (algebra de proposiciones) que es una es Tautología la siguiente proposición.

$$[(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q] \quad \vee \quad [\sim p\ ]$$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que $[(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q] \quad \vee \quad [\sim p\ ]$ es una tautología

Etapa 2. Gestión de la información: Aplicamos directamente propiedades y obtenemos.

$$\begin{aligned}
[(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q] \vee [\sim p] &\iff [\sim (p \Longrightarrow q) \vee q] \vee [\sim p]\\
&\iff [\sim (\sim p \vee q) \vee q] \vee [\sim p]\\
&\iff [(p \wedge \sim q) \vee q] \vee [\sim p]\\
&\iff [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)] \vee [\sim p]\\
&\iff [(p \vee q) \wedge (T)] \vee [\sim p] \quad (T \text{ significa tautología })\\
&\iff [(p \vee q)] \vee [\sim p]\\
&\iff [(p \vee [\sim p]) \vee q)]\\
&\iff [T\ \vee q]\\
&\iff T
\end{aligned}$$

[2] Si definimos el conectivo lógico # como sigue:

$$q\#p = [p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim p)] \vee (q \vee p)$$

entonces demuestre que

$$(\sim p \Rightarrow q)\#[(p\wedge \sim q)\# \sim q)\# \sim q] \qquad (*)$$

Es una tautología

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $(*)$ es una tautología, o sea que es una proposición siempre verdadera

Etapa 2. Gestión de la información

Observamos aplicando directamente la definición que

$$\begin{aligned}
[p \Rightarrow (\sim q\wedge \sim p)] \vee q \vee p &\iff [\sim p \vee (\sim q\wedge \sim p)] \vee (q \vee p)\\
&\iff [\sim p\vee \sim (q \vee p)] \vee (q \vee p)\\
&\iff \sim [p \wedge (q \vee p)] \vee (q \vee p)\\
&\iff \sim [q \vee p] \vee (q \vee p)
\end{aligned}$$

Luego, $q\#p$ es una tautología

Etapa 3. Articulación de la información

Así que,

$$(\sim p \Rightarrow q)\#[(p\wedge \sim q)\# \sim q)\# \sim q]$$

es una tautología.

[3] Si definimos el conectivo lógico $*$

$p * q$ es Falsa sólo si p y q son verdaderas, caso contrario $p * q$ es Verdadera.
entonces determinemos el valor de verdad de la proposición

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p\wedge \sim q)* \sim q] \qquad (**)$$

Solución

Etapa 1. Debemos estudiar el valor de verdad de la proposición $(**)$

Etapa 2. Gestión de la información

- Si usamos las tautologías:

  $$(p \Longrightarrow q) \vee q \quad \Longleftrightarrow \quad (\sim p \vee q) \vee q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$$

  entonces estudiar la proposición $(**)$ es equivalente a estudiar la proposición:

  $$(\sim p \vee q) \Longleftrightarrow [(p\wedge \sim q)* \sim q]$$

- Más aún, conforme a la ley de De Morgan

  $$\sim (p\wedge \sim q) \Longleftrightarrow \sim p \vee q$$

  De donde $(**)$ se transforma en

  $$(\sim p \vee q) \Longleftrightarrow \sim (\sim p \vee q)* \sim q$$

  Si hacemos $m = \sim p \vee q$ entonces $(**)$ finalmente se reduce a la proposición

  $$m \Longleftrightarrow \sim m* \sim q$$

Etapa 3. Conclusiones:

Caso 1. Si m es verdadera $\sim m$ es falsa y entonces por definición $\sim m* \sim q$ es verdadera, y

$$m \Leftrightarrow \sim m* \sim q$$

es verdadera

Caso 2. Si m es falsa entonces $\sim m$ es verdadera y tenemos dos subcasos:

(i) Si $\sim q$ es verdadera entonces $\sim m* \sim q$ es falsa, y se tiene que

$$m \Leftrightarrow \sim m* \sim q$$

es verdadera

(ii) Si $\sim q$ es falsa entonces q es verdadera y $m = \sim p \vee q$ es verdadera, lo cual contradice la hipótesis, por tanto este subcaso, no es posible

Luego, $(**)$ es una tautología

[4] Si A y B son dos conjuntos entonces demuestre que

(a) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$ (Ley de De Morgan)

Solución

$$\begin{aligned} x\in (A\cup B)^c &\iff x \text{ es elegible } \wedge x\notin (A\cup B)\\ &\iff x \text{ es elegible } \wedge (x\notin A\wedge x\notin B)\\ &\iff x \text{ es elegible } \wedge (x\in A^c\wedge x\in B^c)\\ &\iff x\in (A^c\cap B^c)\end{aligned}$$

(b) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$ (Ley de De Morgan)

$$\begin{aligned} x\in (A\cap B)^c &\iff x \text{ es elegible } \wedge x\notin (A\cap B)\\ &\iff x \text{ es elegible } \wedge (x\notin A\vee x\notin B)\\ &\iff x \text{ es elegible } \wedge (x\in A^c\vee x\in B^c)\\ &\iff x\in (A^c\cup B^c)\end{aligned}$$

[5] Si A, B y C son conjuntos entonces demuestre que

(a) $A\subset B\wedge B\subset C\Longrightarrow A\subset C$ (Transitividad de la Inclusión)

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $A\subset C$, es decir por demostrar que $x\in A\Longrightarrow x\in C$

Etapa 2. Gestión de la información

(i) $A\subset B\iff x\in A\Longrightarrow x\in B \qquad (*)$

(ii) $B\subset C\iff x\in B\Longrightarrow x\in C \qquad (**)$

Etapa 3. Articulación de la información

$$x\in A\overset{\text{De }(*)}{\Longrightarrow} x\in B\overset{\text{De }(**)}{\Longrightarrow} x\in C$$

(b) $(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B) = A\cup B\iff A\cap B=\emptyset$

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B) = A\cup B\iff A\cap B=\emptyset$

Etapa 2. Gestionando directamente la información obtenemos que

$$\begin{aligned} (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B) = A\cup B &\iff [(A\cap B^c)\cup A^c]\cap[(A\cap B^c)\cup B)] = A\cup B\\ &\iff [(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)]\cap[(A\cup B)\cap(B^c\cup B))] = A\cup B\\ &\iff (B^c\cup A^c)\cap(A\cup B) = A\cup B\\ &\iff (B\cap A)^c\cap(A\cup B) = A\cup B\\ &\iff (B\cap A)=\emptyset\end{aligned}$$

Contenidos