Rudimentos 12: Espacios Vectoriales
Profesor Ricardo Santander

Este capitulo esta destinado a buscar una representación natural y eficiente de la información, a través de "relaciones teóricas, lease combinaciones lineales" e "implementaciones prácticas, lease representación matricial y resolución de ecuaciones." Para ello será necesario: Construir un ambiente suficientemente amplio, donde se puedan modelar situaciones prácticas, desarrollar técnicas que permitan controlar rápida y eficientemente una gran cantidad de información y mostrar la equivalencia entre el ambiente teórico y práctico.

1. Definición de Espacios Vectorial

Demos una mirada a nuestra evolución al momento de manipular la información.

(1) Ya observamos que para cada ($n \in \mathbb{N}$), existen únicos números naturales $a_0, a_1, a_2, \dots, a_s$ tales que

$$n = a_s 10^s + a_{s-1}10^{s-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0; \quad (0 \leq j \leq s);\ (0 \leq a_j \leq 9)$$

Y estos números son los que identifican unívocamente al número n.

(2) Basándonos en esta idea definimos informalmente a los polinomios, es decir

$$p(x) \in \mathbb{R}[x] \iff p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_s x^s$$

Y en este caso son los coeficientes los que diferencian a un polinomio de otro.

(3) Si consideramos $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces sabemos que $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano y que

(a) $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$

(b) Y si además permitimos una ponderación externa que generalice el hecho

$$\left.\begin{array}{rcl} (x,y)+(x,y) & = & 2(x,y) \\ & \wedge & \\ (x,y)+(x,y) & = & (2x,2y) \end{array}\right\} \Longrightarrow 2(x,y) = (2x,2y)$$

entonces obtenemos que

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

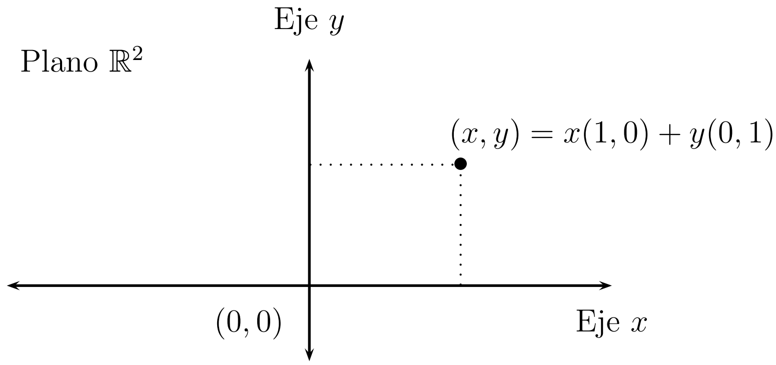


Figura 1 : Plano Cartesiano

(4) Otro caso que podemos representar con las licencias que da la heurística es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Intentando generalizar aún más el formato de nuestros números. Supongamos que necesitamos conectar dos lugares inaccesibles, como lo muestra la función.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \text{si } -\pi < x < 0 \\ \\ 1 & : \text{si } \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Cuyo gráfico es de la forma:

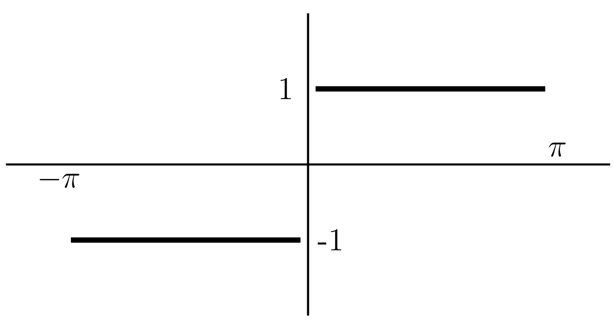
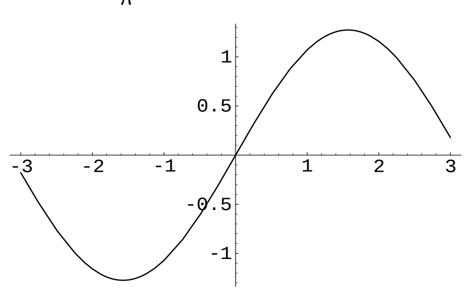


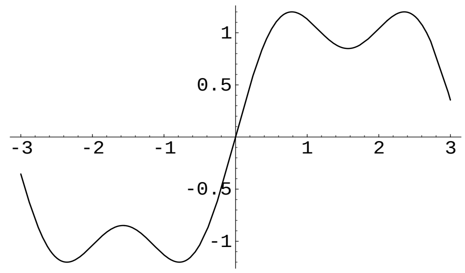
Figura 2 $\quad y = f(x)$

La idea es usar como soporte, ideas trigonométricas. para conectar esos lugares inaccesibles:

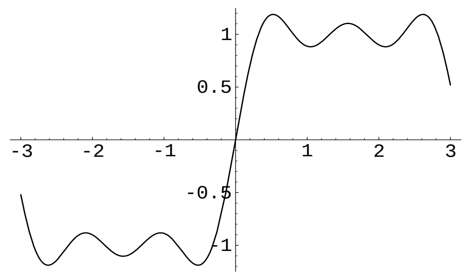
(a) Partamos graficando la función $y = \dfrac{4}{\pi}$ sen x para $(-\pi < x < \pi)$



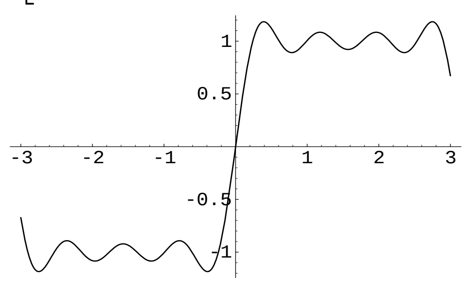
(b) Graficamos la función $y = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \frac{\text{sen } 3x}{3}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



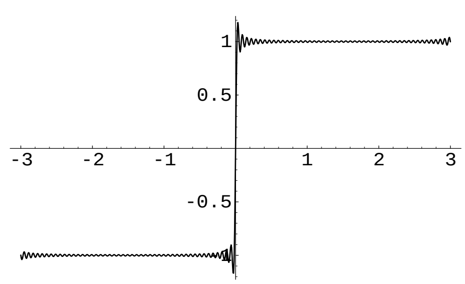
(c) Graficamos la función $y = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(d) Graficamos la función $y = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5} + \frac{\text{sen } 7x}{7}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(e) En fin, graficamos, la función $y = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5} + \frac{\text{sen } 7x}{7} + \cdots + \frac{\text{sen } 99x}{99}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(f) Si llamamos $g_s = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{\text{sen } (2i-1)x}{2i-1}$, para $(s \in \mathbb{N})$ entonces podemos observar lo siguiente:

(i) A medida que s crece en $\mathbb{N}$, el gráfico de g_s, más se parece (copia), a la función f

(ii) Sin embargo, debemos tener cuidado con la comparación de las expresiones analíticas de las funciones involucradas; porque por ejemplo,

- $f(0) \notin \mathbb{R}$ y $g_s(0) = 0$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}$

Sin embrago, observen lo siguiente:

$$\begin{aligned}
g_s\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)\frac{\pi}{2}}{2i-1} \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \\
&= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{2s-1}\right)
\end{aligned}$$

Así por ejemplo,

$$\begin{aligned}
g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi} = 1.273 \\
g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 0.848 \\
g_3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = 1.013 \\
g_4\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = 0.921 \\
g_5\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right) = 1.063 \\
g_6\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right) = 0.947
\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{s\to\infty} g_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{s\to\infty}\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} = 1$$

(iii) Será necesario entonces ser cuidadoso al referirnos al término aproximación de dos funciones, ya sea en su gráfico o en sus valores, con estos cuidados podemos escribir,

$$f(x) \approx \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{2i-1}\operatorname{sen}(2i-1)x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\operatorname{sen}(2i-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

Bien, las ideas expuestas encima nos inducen a definir un objeto abstracto que le de sentido a casi todos los ejemplos revisados y otros que analizaremos más adelante.

Definición 1.1. *Un conjunto* $\mathbb{V}$ *será llamado un* $\mathbb{K}$ *- Espacio Vectorial si*

(1) $\mathbb{V} \neq \phi$

(2) $\mathbb{V}$ *admite una operación interna, " + "; definida por*

$$\begin{array}{cccc} + & : & \mathbb{V}\times\mathbb{V} & \longmapsto & \mathbb{V} \\ & & (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}$$

tal que $(\mathbb{V},+)$ *es un grupo abeliano, es decir satisface las propiedades:*

- $u+(v+w)=(u+v)+w \quad (\forall u; u\in\mathbb{V}); (\forall v; v\in\mathbb{V}); (\forall w; w\in\mathbb{V})$
- *Existe* $0_{\mathbb{V}}\in\mathbb{V}$ *tal que* $u+0_{\mathbb{V}}=0_{\mathbb{V}}+u=u \quad (\forall u; u\in\mathbb{V})$
- *Para cada* u, $u+(-u)=-u+u=0_{\mathbb{V}}$
- $u+v=v+u \quad (\forall u; u\in\mathbb{V}); (\forall v; v\in\mathbb{V}$

(3) $\mathbb{V}$ *admite una operación externa, "·"; definida por*

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & \mathbb{K}\times\mathbb{V} & \longmapsto & \mathbb{V} \\ & & (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda\cdot v \end{array}$$

con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ *y satisface las propiedades:*

- $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v \quad (\forall\lambda; \lambda\in\mathbb{K}); (\forall u; u\in\mathbb{V}); (\forall v; v\in\mathbb{V})$
- $(\lambda+\beta)\cdot u=\lambda\cdot u+\beta\cdot u \quad (\forall\lambda; \lambda\in\mathbb{K}); (\forall\beta; \beta\in\mathbb{K}); (\forall u; u\in\mathbb{V})$
- $(\lambda\cdot\beta)\cdot u=\lambda\cdot(\beta\cdot u) \quad (\forall\lambda; \lambda\in\mathbb{K}); (\forall\beta; \beta\in\mathbb{K}); (\forall u; u\in\mathbb{V})$
- $\lambda\cdot u=0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow \lambda=0_{\mathbb{K}}\vee u=0_{\mathbb{V}} \quad (\forall\lambda; \lambda\in\mathbb{K}); (\forall u; u\in\mathbb{V})$

Los elementos de $\mathbb{V}$ *se denominarán vectores, los elementos de* $\mathbb{K}$ *se llamarán escalares, y para designar a un espacio vectorial lo notaremos como,* $(\mathbb{V},+,\cdot,\mathbb{K})$, *donde* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Ejemplo 1.1.1. *El espacio vectorial de las* n *- uplas* $(\mathbb{K}^n,+,\cdot,\mathbb{K})$ *para cada* $n\in\mathbb{N}$, *donde,*

$$\mathbb{K}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}; 1\leq i\leq n\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)+(y_1,y_2,y_3,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,\dots,x_n+y_n)$

(2) $\lambda\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n) \qquad (\lambda\in\mathbb{K})$

Ejemplo 1.1.2. *El espacio vectorial de las Matrices* $(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times m), +, \cdot, \mathbb{K})$; $n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{N}$ *donde,*

$$\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times m) = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \wedge (1 \leq i \leq n)(1 \leq j \leq m)\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $((a_{ij}) + (b_{ij})) = (a_{ij} + b_{ij})$

(2) $\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

Ejemplo 1.1.3. *El espacio vectorial de los polinomios* $(\mathbb{K}[x], +, \cdot, \mathbb{K})$ *con coeficientes en el cuerpo* $\mathbb{K}$ *donde,*

$$\mathbb{K}[x] \quad = \quad \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{s} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K}, s \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n) \right\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{s} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{s} (a_i + b_i) x^i$

(2) $\displaystyle\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i$

Ejemplo 1.1.4. *El espacio vectorial de los Polinomios de grado menor o igual que* n *con coeficientes en* $\mathbb{K}$*,* $(\mathbb{K}_n[x], +, \cdot, \mathbb{K})$ *es decir;*

$$\mathbb{K}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \rho(p(x)) \leq n\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$

(2) $\displaystyle\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i$

Ejemplo 1.1.5. *El espacio vectorial de las funciones Reales definidas en* $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$*, para* $\mathbb{U} \neq \emptyset$*;* $(F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$*, donde*

$$F_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}) \quad = \quad \{f : U \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función}\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Ejemplo 1.1.6. *El espacio vectorial de las funciones Reales continuas definidas en $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, para $\mathbb{U} \neq \emptyset$; $(C_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{K})$, donde*

$$C_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}) \;=\; \{f \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}) \mid f \text{ es una función continua}\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Ejemplo 1.1.7. *El espacio vectorial de las funciones reales derivables definidas en $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, para $\mathbb{U} \neq \emptyset$; $(D_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}))$, donde*

$$D_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \;=\; \{f \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{U}, \mathbb{R}); \mid f \text{ es una función derivable en } U\}$$

Y las operaciones interna y externa son definidas respectivamente por,

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

2. Subespacios

Si consideramos un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$ entonces por definición $\mathbb{V} \neq \emptyset$. Así que

$$u \in \mathbb{V} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{V}, \text{ para cada } \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \mathbb{V} = \{0_{\mathbb{V}}\} \;\vee\; \mathbb{V} \text{ tiene infinitos elementos}$$

Esta observación hace difícil pensar en una forma de caracterizar a un espacio vectorial no nulo. No obstante remirando nuestros ejemplos podemos encontrar espacios vectoriales incluidos en otros espacios vectoriales.

En efecto

(1) $\mathbb{K}_n[x] \subset \mathbb{K}[x] \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$. Pues

- $\partial(p(x) + q(x)) \leq max\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\}$ y
- $\partial(\lambda p(x)) = \partial(p(x))$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $D_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \subset C_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \subset F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R})$. Pues;

- La adición de funciones continuas es una función continua,y el producto de un escalar por una función continua es función continua
- Análogamente, acontece con las funciones derivables.

Dado que necesitamos representar datos, parece razonable considerar la observación anterior para hacer la siguiente definición.

Definición 2.1. *Sea* $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. $\mathbb{W}$ *será llamado un Subespacio vectorial de* V *si*

- $W \neq \emptyset$
- W *es un* K*-espacio vectorial con las mismas operaciones que* $\mathbb{V}$

Usaremos la notación: $\mathbb{U} \leq \mathbb{V}$

Ejemplo 2.1.1. $\{0_{\mathbb{V}}\} \leq \mathbb{V}$ *y* $\mathbb{V} \leq \mathbb{V}$ *son conocidos como subespacios triviales.*

Ejemplo 2.1.2. $\mathbb{K}_n[x] \leq \mathbb{K}[x] \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

Ejemplo 2.1.3. $C_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \leq F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R})$

Ejemplo 2.1.4. $D_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \leq C_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \wedge D_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}) \leq F_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R})$

Sin embargo, el avance en términos de la representación de datos "eficiente" es nula, no obstante, podemos observar lo siguiente:

Observación 2.1.5. *Si* $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *entonces por definición* $(\mathbb{W}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *es un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial. Así que verifica naturalmente las propiedades:*

(1) $u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W}$

(2) $u \in \mathbb{W} \wedge \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W}$

Luego, podemos resumir lo anterior en la siguiente

$$\mathbb{W} \leq \mathbb{V} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} & \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W} \\ & \wedge \\ u \in \mathbb{W} \wedge \lambda \in \mathbb{K} & \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W} \end{cases} \tag{1}$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathbb{W}$ *satisface las condiciones:*

(1) $u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W}$

(2) $u \in \mathbb{W} \wedge \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W}$ *entonces*

   (a) $W \neq \emptyset$ *es supuesto inicial*

   (b) *De las propiedades asumidas, sigue que existen operaciones* $+$ *y* $\cdot$ *en* W, *y además como* V *es un espacio vectorial entonces a fortiori* $(W, +, \cdot, K)$ *es un* K*-espacio vectorial, y por ende un subespacio del espacio* $\mathbb{V}$.

De la observación concluimos una caracterización que nos permite verificar en forma más eficiente, si un subconjunto de un espacio vectorial es o no es un subespacio vectorial, por su importancia le daremos el rango de teorema.

Teorema 2.2. Caracterización estructural de subespacio vectorial

Consideremos un espacio vectorial $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *y* $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$

$$\boxed{\mathbb{W} \leq \mathbb{V} \iff \begin{cases} (i) & \mathbb{W} \neq \emptyset \\ (ii) & u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u+v) \in \mathbb{W} \\ (iii) & u \in \mathbb{W} \wedge \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W} \end{cases}}$$

Ejemplo 2.2.1. *Usemos el* **Teorema 2.2** *para mostrar que* $\mathbb{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$

En efecto, siguiendo la guía de nuestro teorema podemos generar la siguiente estrategia:

Etapa 1. Debemos verificar que $\mathbb{W} \neq \emptyset$

$(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ *y* $0+0-0=0$. *Así que* $(0,0,0) \in \mathbb{W}$

Etapa 2. Mostremos que si $u \in \mathbb{W}$ *y* $v \in \mathbb{W}$ *entonces* $(u+v) \in \mathbb{W}$*:*

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge u_1+u_2-u_3 = 0 \quad (\star) \\ v \in W &\iff v = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge v_1+v_2-v_3 = 0 \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u+v &= (u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3) && [\ \textit{ver } (\star)\ y\ (\star\star)] \\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) && (\ \textit{Suma en } \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

Luego,

$$u+v \in \mathbb{R}^3 \tag{2}$$

De (2)*,concluimos que* $(u+v)$ *es un buen candidato para pertenecer a* W*, pero falta verificar si satisface la condición que caracteriza* $\mathbb{W}$*.*

Para ver esto, debemos operar como sigue:

$$\begin{aligned} (u_1+v_1)+(u_2+v_2)-(u_3+v_3) &= u_1+v_1+u_2+v_2-u_3-v_3 \\ &= (u_1+u_2-u_3)+(v_1+v_2-v_3) \\ &= 0+0 \qquad (\ \textit{ver } (\star)\ y\ (\star\star)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusión, $(u+v) \in \mathbb{W}$

Etapa 3. Debemos verificar que si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{W}$ entonces $\lambda u \in \mathbb{W}$:

$$\lambda u = \lambda(u_1, u_2, u_3) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) \in \mathbb{R}^3$$

Por otra parte,

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 - \lambda u_3 \;=\; \lambda(u_1 + u_2 - u_3) = \lambda 0 = 0$$

Conclusión, $\lambda u \in \mathbb{W}$, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3$

Ejemplo 2.2.2. *Usemos el* **Teorema 2.2** *para mostrar que*

$$\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A + A^t = (0)\} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

En efecto, siguiendo la guía de nuestro teorema podemos generar la siguiente estrategia:

Etapa 1. Debemos verificar que $\mathbb{W} \neq \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$$

Etapa 2. Debemos mostrar que:

$$u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u + v) \in \mathbb{W}$$

Si $u \in \mathbb{W}$ y $v \in \mathbb{W}$ entonces

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{W} \iff & u \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge u + u^t = (0) \\
\iff & u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff & u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff & u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} 2u_{11} & u_{12} + u_{21} \\ u_{21} + u_{12} & 2u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
v \in \mathbb{W} \iff & v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge v + v^t = (0) \\
\iff & v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff & v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff & v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} 2v_{11} & v_{12} + v_{21} \\ v_{21} + v_{12} & 2v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\star\star)
\end{aligned}$$

entonces por una parte,

$$u + v = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

Y por otra,

$$\begin{aligned}
u+v+(u+v)^t &= \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{21}+v_{21} \\ u_{12}+v_{12} & u_{22}+v_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(u_{11}+v_{11}) & (u_{12}+v_{12})+(u_{21}+v_{21}) \\ (u_{21}+v_{21})+(u_{12}+v_{12}) & 2(u_{22}+v_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2u_{11}+2v_{11} & (u_{12}+u_{21})+(v_{12}+v_{21}) \\ (u_{21}+u_{21})+(v_{12}+v_{12}) & 2u_{22}+2v_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2u_{11} & (u_{12}+u_{21}) \\ (u_{21}+u_{21}) & 2u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v_{11} & (v_{12}+v_{21}) \\ (v_{12}+v_{12}) & 2v_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (De\ (\star)\ y\ (\star\star)) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que, $(u+v) \in \mathbb{W}$

Etapa 3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\lambda u + (\lambda u)^t &= \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda u_{11} & \lambda u_{21} \\ \lambda u_{12} & \lambda u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\lambda u_{11} & \lambda u_{12}+\lambda u_{21} \\ \lambda u_{21}+\lambda u_{12} & 2\lambda u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\lambda u_{11} & \lambda(u_{12}+u_{21}) \\ \lambda(u_{21}+u_{12}) & 2\lambda u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 2u_{11} & (u_{12}+u_{21}) \\ (u_{21}+u_{12}) & 2u_{22} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que $\lambda u \in \mathbb{W},\ y\ \mathbb{W} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Ejemplo 2.2.3. *Si* $\mathbb{W} = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x] \mid \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \right\}$ *entonces* $W \leq \mathbb{R}_n[x]$

En efecto

Etapa 1. $p(x) = 0 \in \mathbb{W}$, *pues* $\sum_{i=0}^{n} i \cdot 0 = 0$

Etapa 2. Si $p(x) \in \mathbb{W}$ $q(x) \in \mathbb{W}$ *entonces*

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \wedge \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \\ q(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \wedge \sum_{i=0}^{n} i b_i = 0 \end{aligned}$$

Ahora, por una parte;

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \in \mathbb{R}_n[x]$$

Y por otra parte;

$$\sum_{i=0}^{n} i(a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} (i a_i + i b_i) = \sum_{i=0}^{n} i a_i + \sum_{i=0}^{n} i b_i = 0 + 0 = 0$$

Conclusión $(p(x) + q(x)) \in \mathbb{W}$

Etapa 3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces por una parte;*

$$\lambda p(x) = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i \in \mathbb{R}_n[x]$$

Y por otra parte;

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda i a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} i a_i = \lambda 0 = 0$$

Así que, $\lambda p(x) \in \mathbb{W}$ *y* $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_n[x]$

Ejemplo 2.2.4. *Si* $\mathbb{V}$ *es un* $\mathbb{K}$- *espacio vectorial entonces* $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W}$.

En efecto

$$\begin{aligned} \mathbb{W} \leq \mathbb{V} &\Longrightarrow \lambda \cdot u \in \mathbb{W} \quad (\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{K}) \wedge (\forall u; u \in \mathbb{W}) \\ &\Longrightarrow 0 \cdot u \in \mathbb{W} \qquad (\textit{Pues, } 0 \in \mathbb{K}) \\ &\Longrightarrow 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.5. *Si* $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - 2z = \lambda\}$ *entonces determinemos el conjunto.*

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3\}$$

Solución

Debemos determinar los elementos del conjunto $\mathbb{S}$*, y entonces es necesario entrar al conjunto.*

Etapa 1. $\lambda \in \mathbb{S} \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3$

Etapa 2. $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3 \Longrightarrow (0, 0, 0) \in \mathbb{W}$*, esto sigue del ejemplo anterior.*

Etapa 3. $(0, 0, 0) \in \mathbb{W} \Longleftrightarrow (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \wedge 0 + 4 \cdot 0 \cdot 2 = \lambda \Longleftrightarrow (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \wedge \lambda = 0$

Luego, $0 \in \mathbb{S}$ *y* $\{0\} \subset \mathbb{S}$

Etapa 4. Si $[u \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W} \Longrightarrow (u + v) \in \mathbb{W}]$ *entonces en particular debe ocurrir lo siguiente:*

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x + 4y - 2z = \lambda \\ 2u \in \mathbb{W} &\iff 2u = (2x, 2y, 2z) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x + 8y - 4z = \lambda \\ &\Longrightarrow 2\lambda = \lambda \\ &\Longrightarrow \lambda = 0 \end{aligned}$$

Etapa 5. Como $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces para* $u = (x, y, z) \in \mathbb{W}$, $\lambda x + 4\lambda y - 2\lambda z = \lambda$*. Pero,*

$$\lambda x + 4\lambda y - 2\lambda z = \lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$$

Así que, $\mathbb{S} = \{0\}$ *y* $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - 2z = 0\}$

Conclusión 2.2.6. *El origen o elemento neutro del espacio pertenece a cada subespacio vectorial. Es decir una condición necesaria para ser subespacio es que el origen pertenezca a él.*

Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ *es nulo o tiene infinitos elementos.*

Ejemplo 2.2.7. *Si* $AX = B$ *es un sistema lineal de orden* $(n \times m)$ *y* $\mathbb{S} = \{U \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \mid AU = B\}$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C})$ *entonces*

$$\mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \iff B = (0)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) &\Longrightarrow (0) \in \mathbb{S} \\ &\Longrightarrow A \cdot (0) = B \\ &\Longrightarrow (0) = B \end{aligned}$$

Luego, hemos mostrado que: $\mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \Longrightarrow B = (0)$

Recíprocamente, si $B = (0)$ *entonces*

1. $A(0) = (0)$, *luego* $\mathbb{S} \neq \emptyset$

2. Si $U_1 \in \mathbb{S} \wedge U_2 \in \mathbb{S}$ *entonces* $A(U_1 + U_2) = A(U_1) + A(U_2) = (0) + (0) = (0)$. *Así que* $(U_1 + U_2) \in \mathbb{S}$

3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $U_1 \in \mathbb{S}$ *entonces* $A\lambda U_1 = \lambda A U_1 = \lambda(0) = (0)$. *Así que* $\lambda U_1 \in \mathbb{S}$

Luego, hemos mostrado que: $B = (0) \Longrightarrow \mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$. *Así que*

$$\mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \iff B = (0)$$

Conclusión 2.2.8. *Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de orden* $(n \times m)$, *constituyen un subespacio vectorial. Por ende un Sistema lineal homogéneo o tiene únicamente la solución nula o tiene infinitas soluciones*

Observación 2.2.9. *Desde un punto de vista estructural el teorema* 2.2, *es una herramienta poderosa para decidir si un conjunto es o no, un subespacio en un espacio vectorial dado, no obstante el tiene un problema que lamentablemente para nosotros es crucial; pues, " no nos dice quienes son los miembros del subespacio* $\mathbb{W}$*."*

2.3. Ejercicios Propuestos de Subespacios.

(1) Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$ descrito.

(a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0\}$

(b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 10x - 5y = 0\}$

(c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

(d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - z = 0\}$

(e) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - w = 0\}$

(f) $W = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x = \dfrac{y + 2z - w}{5}\right\}$

(2) Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ son subespacios para n y m adecuados.

(a) $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$, donde A^t significa la matriz traspuesta de la matriz A

(b) $W = \{(a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid tr(a_{ij}) = 0\}$. Donde $tr(a_{ij}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, y se llama la traza de la matriz (a_{ij})

(c) $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid \det(A) \neq 0\}$

(d) $W = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{ Si } j = n+1-i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases} \right\}$

(e) $W = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & : \text{ Si } j \leq i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases} \right\}$

(f) $W = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & : \text{ Si } j \geq i \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases} \right\}$

(3) Demuestre que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}_n[x]$ son subespacios para n adecuado.

(a) $W = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid p(-3) = 0\}$

(b) $W = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid p(\sqrt{2}) = 0\}$

(c) $W = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \mid \sum_{i=0}^{n} ja_i = 0; j \in [\mathbb{R} - \{0\}] \right\}$

(d) $W = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \mid \sum_{i=0}^{n} ia_i = 0 \right\}$

3. La Idea de Generador

En concordancia con la observación anterior no estamos cumpliendo nuestro objetivo: Que es determinar rápida y eficientemente los elementos del espacio vectorial, así que si queremos cumplir nuestro objetivo debemos cambiar el punto de vista. Como orientación debemos recordar que un espacio vectorial o tiene un elemento o tiene infinitos elementos. Por tanto, el punto es, generar un proceso que transforme en una "idea finita", lo que en realidad es en concreto no finito. Con esto en mente,

(1) Miremos en primer lugar, desde un punto de vista diferente al subespacio de $\mathbb{R}^3$. (Mirar desde otro punto de vista significa, interpretar de un nueva forma las operaciones permitidas en el espacio).

$$\mathbb{W}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - 2z = 0\} \tag{3}$$

Ingresemos directamente al conjunto, es decir:

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}_1 &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ x + 4y - 2z = 0 \\ &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ x = 2z - 4y \\ &\iff u = (2z - 4y, y, z); \ z \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \\ &\iff u = (2z, 0, z) + (-4y, y, 0); \ z \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \\ &\iff u = z(2, 0, 1) + y(-4, 1, 0); \ z \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{W}_1 \ = \ \{\lambda_1(2, 0, 1) + \lambda_2(-4, 1, 0) \mid (\lambda_1 \in \mathbb{R}) \ \wedge (\lambda_2 \in \mathbb{R})\}$$

La conclusión es la siguiente:

$$\boxed{u \in \mathbb{W}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Tiene solución en } \mathbb{K} \text{ la ecuación } u = \overbrace{a_1}^{\substack{\text{incognita}\\ \downarrow}} (2,0,1) + \overbrace{a_2}^{\substack{\text{incognita}\\ \downarrow}} (-4,1,0)}$$

(2) Intentemos la misma estrategia con el subespacio

$$\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \wedge z = 0\} \tag{4}$$

De nuevo, entremos al conjunto.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}_2 &\Longleftrightarrow u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ x = y \wedge z = 0 \\ &\Longleftrightarrow u = (x,x,0) \wedge x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow u = x(1,1,0) \wedge x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{W}_2 \ = \ \{\lambda(1,1,0) \mid \lambda \in R\}$$

La conclusión es la siguiente:

$$\boxed{u \in \mathbb{W}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Tiene solución en } \mathbb{K} \text{ la ecuación } u = \overbrace{a_1}^{\substack{\text{incognita}\\ \downarrow}} (2,0,1)}$$

(3) Ahora tratemos de aplicar lo aprendido en el conjunto,

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in \mathbb{W}_1 \wedge w_2 \in \mathbb{W}_2\}$$

(a) $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \neq \emptyset$

En efecto

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) = 0(2,0,1) + 0(-4,1,0) + 0(1,1,0) \Longrightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

Más aún, $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{W}_1$, pues $(0,0,0) = 0(2,0,1) + 0(-4,1,0)$ y $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{W}_2$, pues $(0,0,0) = 0(1,1,0)$. Así
que $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$

(b) Por otra parte,

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 &\Longleftrightarrow u \in \mathbb{W}_1 \wedge u \in \mathbb{W}_2 \\ &\Longleftrightarrow u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x + 4y - 2z = 0 \wedge x = y \wedge z = 0 \\ &\Longleftrightarrow u = (x,x,0) \in \mathbb{R}^3 \wedge x + 4x = 0 \\ &\Longleftrightarrow u = (x,x,0) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = 0 \\ &\Longleftrightarrow u = (0,0,0) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \;=\; \{(0,0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

(c) Ahora para $u \in \mathbb{R}^3$ arbitrario tratemos de resolver la ecuación

$$u \;=\; x_1(2,0,1) + x_2(-4,1,0) + x_3(1,1,0)$$

Si conseguimos ese resultado entonces se verificará que

(i) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

(ii) Tendremos una fórmula para expresar los elementos de $\mathbb{R}^3$ en términos de los vectores de $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$.

Vamos entonces a resolver el problema para $u = (x,y,z)$ arbitrario

$$\begin{aligned}(x,y,z) = x_1(2,0,1) + x_2(-4,1,0) + x_3(1,1,0) &\iff (x,y,z) = (2x_1 - 4x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1)\\ &\iff \left.\begin{array}{lcl} 2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & x\\ x_2 + x_3 & = & y\\ x_1 & = & z \end{array}\right| \quad (*)\end{aligned}$$

Ahora resolvemos $(*)$, usando nuestras técnicas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & x\\ 0 & 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \quad (l_1 \to l_1 - l_3) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & x-2z\\ 0 & 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \quad (l_1 \to l_1 + 4l_2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & x+4y-2z\\ 0 & 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \quad (l_1 \to \tfrac{1}{5}l_1) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{x+4y-2z}{5}\\ 0 & 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \quad (l_2 \to l_2 - l_1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{x+4y-2z}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-x+y+2z}{5}\\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\\ \dfrac{y-x+2z}{5}\\ \dfrac{x+4y-2z}{5} \end{pmatrix} \Longrightarrow (x,y,z) = z(2,0,1) + \frac{y-x+2z}{5}(-4,1,0) + \frac{x+4y-2z}{5}(1,1,0)$$

(d) Finalmente, si adoptamos las siguientes notaciones:

$$\alpha \;=\; \{(2,0,1), (-4,1,0), 5(1,1,0)\}$$

$$[(x,y,z]_\alpha = \begin{pmatrix} z \\ \dfrac{y-x+2z}{5} \\ \dfrac{x+4y-2z}{5} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (x,y,z) = \underbrace{z(2,0,1) + \frac{y-x+2z}{5}(-4,1,0)}_{\in \mathbb{W}_1} + \underbrace{\frac{x+4y-2z}{5}(1,1,0)}_{\in \mathbb{W}_2}$$

Hemos conseguido mostrar que

$$\mathbb{R}^3 \;=\; \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$$

Y además podemos ahora ejercitar el nuevo símbolo:

(i) Para $u = (2,0,1)$ tenemos

$$[2,0,1]_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{0-2+2}{5} \\ \dfrac{2+0-2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pues,

$$(2,0,1) \;=\; (2,0,1) + 0(-4,1,0) + 0(1,1,0)$$

(ii) para $u = (-4,1,0)$ tenemos

$$[(-4,1,0)]_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pues,

$$(-4,1,0) \;=\; 0(2,0,1) + 1(-4,1,0) + 0(1,1,0)$$

(iii) Para u=$(1,1,0)$ tenemos

$$[(1,1,0)]_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pues,

$$(1,1,0) \;=\; 0(2,0,1) + 0(-4,1,0) + 1(1,1,0)$$

(iv) Para $u = (1,1,1)$ tenemos

$$[1,1,1]_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Pues,

$$(1,1,1) \;=\; (2,0,1) + \frac{2}{5}(-4,1,0) + \frac{3}{5}(1,1,0)$$

(4) Para el caso $\alpha = \{(2,0,1),(-4,1,0),5(1,1,0)\}$ hemos encontrado que $\mathbb{R}^3$ se descompone en la suma del Plano $\mathbb{W}_1$ y la recta $\mathbb{W}_2$. Similar a lo que sucede con el plano $\mathbb{R}^2$ que se descompone como la suma del eje x y del eje y.

Definición 3.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y considere los subconjuntos $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ tal que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$. Diremos que $\mathbb{V}$ es suma directa de los subespacios $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ en símbolos $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Si*

(1) $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$

(2) $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$

Ejemplo 3.1.1. *Si $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+4y-2z=0\}$ y $\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \wedge z = 0\}$ entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 \\ &= \langle\{(2,0,1),(-4,1,0)\}\rangle \oplus \langle\{(1,1,0)\}\rangle \end{aligned}$$

Teorema 3.2. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ entonces*

$$\mathbb{W} = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \mid r_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n)\right\} \leq \mathbb{V}$$

En efecto

(1) *$0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ y $0_{\mathbb{V}} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$. Así que $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W}$, y $\mathbb{W} \neq \emptyset$*

(2) *Sean $u \in \mathbb{W}$, $w \in \mathbb{W}$ entonces*

$$\left.\begin{aligned} u \in W &\iff u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i \mid a_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n) \\ w \in W &\iff w = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot v_i \mid b_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow u + w = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \cdot v_i \in \mathbb{W}$$

(3) *Sean $u \in \mathbb{W}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces*

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot a_i) \cdot v_i \in \mathbb{W}$$

Así que $W \leq V$

Definición 3.2.1. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial entonces el conjunto*

(1) $\mathbb{W} = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \mid r_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n)\right\}$. *Se llamará subespacio generado por $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y cada v_i para $i = 1, 2, \dots, n$ se llamará un generador.*

(2) $u \in V$, *se llamará una combinación lineal de* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *si* $u \in \mathbb{W}$, *es decir existen* n *- escalares, digamos* $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *tal que*

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i$$

Es decir, los elementos de $\mathbb{W}$ *se llaman combinaciones lineales de* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

3.3. Ejercicios Propuestos de Generadores.

(1) Sea $\mathbb{W} = \langle\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

(a) Demuestre que $(2,2,2) \in \mathbb{W}$. Es decir, resuelva la ecuación vectorial

$$(2,2,2) = a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1)$$

(b) Demuestre que $(x,y,z) \in \mathbb{W}$, para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

(c) Concluya que $\mathbb{R}^3 = \langle\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}\rangle$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}\rangle$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $w_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} v_i$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ entonces demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(5) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ tal que $w_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} jv_i$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ entonces demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(6) Demuestre que

- $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\} \leq \mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$
- $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

En general, si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$ entonces V se dice “Suma directa de los subespacios $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ ”si

- $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$
- $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$

En tal caso, notamos $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \bigoplus \mathbb{W}_2$

(7) Demuestre que

$$\mathbb{R}^2 = \ \{\text{eje x}\} \ \oplus \ \{\text{eje y}\}$$

(8) Demuestre que

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) = \ \{ \text{ matrices simétricas}\} \oplus \ \{ \text{ matrices antisimétricas } \}$$

(9) Demuestre que

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_0[x] \oplus \langle \{x, x^2, \dots, x^n\} \rangle$$

4. Sistemas de Generadores

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial entonces $\mathbb{V} \leq \mathbb{V}$. Así que tiene sentido preguntar, ¿si existen o no generadores para el propio $\mathbb{V}$?. En general podemos hacer la siguiente

Definición 4.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$, α será llamado un sistema de generadores para $\mathbb{V}$ si*

$$\mathbb{V} \ = \ \langle \alpha \rangle = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle$$

Equivalentemente: α es un sistema de generadores si para cada $v \in V$ existen n - escalares, digamos $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

O en lenguaje más pragmático:

α es un sistema de generadores si para cada $v \in V$ la ecuación vectorial

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \tag{5}$$

tiene solución.

Ejemplo 4.1.1. *$c(n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, donde*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^n$, ya que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \tag{6}$$

Por la forma de (6), se acostumbra a llamar a "c(n) con el nombre de generadores canónicos. "

Ejemplo 4.1.2. *$m(n \times s) = \{E_{ij} \mid (1 \le i \le n) \wedge (1 \le j \le s)\}$, donde*

$$E_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{en la posición } ij \\ 0: & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Es un sistema de generadores, también conocido como sistema de generadores canónico de $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s)$

Así por ejemplo, para $n = s = 2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Ejemplo 4.1.3. *$p(n) = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ son los generadores canónicos de $\mathbb{R}_n[x]$,*

pues,

$$q(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_nx^n$$

Es decir,

$$\mathbb{R}_n[x] = \langle \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \rangle$$

4.2. Construcción de sistemas de generadores. Estudiemos algunas situaciones que nos permiten construir sistemas de generadores.

(1) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$ entonces

$$V = \langle \{v_1, v_2\} \rangle \Longrightarrow V = \langle \{v_1, v_1 + v_2\} \rangle$$

En efecto

(a) En este caso tenemos que demostrar que $V = \langle \{v_1, v_1 + v_2\} \rangle$, es decir debemos mostrar que la ecuación vectorial,

$$v = a_1v_1 + a_2(v_1 + v_2) \tag{7}$$

Tiene solución para cada $v \in V$.

(b) Analizamos los datos.

Como $V = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$ y $v \in V$ entonces tiene solución la ecuación vectorial

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 \tag{8}$$

Es decir, existen $b_1 \in \mathbb{K}$ y $b_2 \in \mathbb{K}$ tal que (8) es una identidad.

(c) Supongamos por un instante que la ecuación vectorial (7), tiene solución entonces

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2(v_1 + v_2) \\ &= a_1v_1 + a_2v_1 + a_2v_2 \\ &= (a_1 + a_2)v_1 + a_2v_2 \end{aligned}$$

Luego, basta que tomemos:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & + & a_2 & = & b_1 \\ & & a_2 & = & b_2 \end{array}$$

De donde sigue que, $a_1 = b_1 - b_2 \quad \wedge \quad a_2 = b_2$ y entonces hemos mostrado que

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 \implies v = (b_1 - b_2)v_1 + b_2(v_1 + v_2)$$

Y la conclusión es que $V = \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$

Una solución Alternativa para mostrar que $\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$

Observemos que

(i) $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_1 + v_2)$, luego $v_1 \in \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$
(ii) $v_2 = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot (v_1 + v_2)$, luego $v_2 \in \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle$
(iii) Así que,

$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle \tag{9}$$

Análogamente,

(i) $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$, luego $v_1 \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle$
(ii) $v_1 + v_2 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$, luego$v_1 + v_2 \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle$

(iii) Así que,

$$\langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2\}\rangle \tag{10}$$

Luego, de (9) y (10), sigue que

$$\langle\{v_1, v_1 + v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$$

(2) En general si V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$. entonces

$$V = \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \Longrightarrow V = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \quad \text{donde } w_k = \sum_{i=1}^{k} v_i; \text{ y } (1 \leq k \leq n)$$

En efecto

♦ En primer lugar, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ tenemos que:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k} v_i = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_n \Longrightarrow w_k \in \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \tag{11}$$

♦ En segundo lugar, por definición:

$$u \in \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \Longleftrightarrow u = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n \tag{12}$$

♦ Aplicando (11) en (12) tenemos que

$$\begin{aligned}
u \in \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle &\Longleftrightarrow u = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n\rangle \\
&\Longrightarrow u = a_1 \sum_{i=1}^{1} v_i + a_2 \sum_{i=1}^{2} v_i + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{n} v_i \\
&\Longrightarrow u = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)}_{c_1} v_1 + \underbrace{\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right)}_{c_2} v_2 + \cdots + \underbrace{\left(\sum_{i=n-1}^{n} a_i\right)}_{c_{n-1}} v_{n-1} + \underbrace{a_n}_{c_n} v_n \\
&\Longrightarrow u = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_{n-1}v_{n-1} + c_nv_n \\
&\Longrightarrow u \in \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle
\end{aligned}$$

♦ Conclusión:

$$\langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \tag{13}$$

♦ Recíprocamente, $v_1 = w_1$ y para $k = 2, 3 \dots, n$ $v_k = w_k - w_{k-1}$. Así que

$$\begin{aligned}
u \in \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle &\iff u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \\
&\implies u = a_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i (w_i - w_{i-1}) \\
&\implies u = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) w_i \\
&\implies u \in \langle\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}\rangle
\end{aligned}$$

♦ Conclusión:

$$\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle \subset \langle\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}\rangle \tag{14}$$

♦ Finalmente, de (13) y (14). Sigue que

$$\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}\rangle$$

(3) Si consideramos los conjuntos de polinomios

$\mathbb{U} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 - a_1 = 0 \wedge a_2 - a_3 = 0\}$ y
$\mathbb{W} = \{q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid b_0 + b_1 = 0 \wedge b_2 + b_3 = 0\}$ entonces

(a) $\mathbb{U} \leq \mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$

En efecto

Usaremos la técnica de los generadores para mostrar que tanto $\mathbb{U}$ como $\mathbb{W}$ son subespacios

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{U} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ \wedge \ a_0 - a_1 = 0 \wedge a_2 - a_3 = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ \wedge \ a_0 = a_1 \wedge a_2 = a_3 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_0x + a_2x^2 + a_2x^3 \ \wedge \ a_0 \in \mathbb{R} \ \wedge \ a_2 \in \mathbb{R} \\
&\iff p(x) = a_0(1+x) + a_2(x^2 + x^3) \ \wedge \ a_0 \in \mathbb{R} \ \wedge \ a_2 \in \mathbb{R} \\
&\iff p(x) \in \langle\{1+x, x^2 + x^3\}\rangle
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{U} \;=\; \langle\{1+x, x^2 + x^3\}\rangle \leq \mathbb{R}_3[x]$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ \wedge \ a_0 + a_1 = 0 \wedge a_2 + a_3 = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ \wedge \ -a_0 = a_1 \wedge -a_2 = a_3 \\ &\iff p(x) = a_0 - a_0x + a_2x^2 - a_2x^3 \ \wedge \ a_0 \in \mathbb{R} \ \wedge \ a_2 \in \mathbb{R} \\ &\iff p(x) = a_0(1-x) + a_2(x^2 - x^3) \ \wedge \ a_0 \in \mathbb{R} \ \wedge \ a_2 \in \mathbb{R} \\ &\iff p(x) \in \langle\{1-x, x^2 - x^3\}\rangle \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{W} \ = \ \langle\{1-x, x^2-x^3\}\rangle \leq \mathbb{R}_3[x]$$

(b) $\mathbb{R}_3[x] = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$

En efecto

Ahora para mostrar que $\mathbb{R}_3[x] = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$, **debemos resolver en primer lugar la ecuación**

$$\begin{aligned} p(x) &= w + u \quad (w \in \mathbb{W} \ \wedge \ u \in \mathbb{U}) \\ &= \underbrace{c_1(1-x) + c_2(x^2 - x^3)}_{\overset{\shortparallel}{w}} + \underbrace{c_3(1+x) + c_4(x^2 + x^3)}_{\overset{\shortparallel}{u}}, \quad (\text{Para } p(x) \in \mathbb{R}_3[x]) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= c_1(1-x) + c_2(x^2 - x^3) + c_3(1+x) + c_4(x^2 + x^3) \\ &= c_1 - c_1x + c_2x^2 - c_2x^3 + c_3 + c_3x + c_4x^2 + c_4x^3 \\ &= c_1 + c_3 + c_3x - c_1x + c_4x^2 + c_2x^2 - c_2x^3 + c_4x^3 \\ &= c_1 + c_3 + (c_3 - c_1)x + (c_2 + c_4)x^2 + (c_4 - c_2)x^3 \end{aligned}$$

Así que,

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 + c_3 &=& a_0 \\ -c_1 + c_3 &=& a_1 \\ c_2 + c_4 &=& a_2 \\ -c_2 + c_4 &=& a_3 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{rcl} c_1 &=& \dfrac{a_0 - a_1}{2} \\ c_3 &=& \dfrac{a_0 + a_1}{2} \\ c_2 &=& \dfrac{a_2 - a_3}{2} \\ c_4 &=& \dfrac{a_2 + a_3}{2} \end{array}$$

Luego,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \underbrace{\frac{a_0 - a_1}{2}(1-x) + \frac{a_2 - a_3}{2}(x^2 - x^3)}_{\in \mathbb{W}} + \underbrace{\frac{a_0 + a_1}{2}(1+x) + \frac{a_2 + a_3}{2}(x^2 + x^3)}_{\in \mathbb{U}}$$

Por tanto,

$$\mathbb{R}_3[x] \ = \ \mathbb{W} + \mathbb{U}$$

En segundo lugar, debemos mostrar que $\mathbb{W}\cap\mathbb{U}=\{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}$. Para ver esto hacemos

$$\begin{aligned}
p(x)\in\mathbb{W}\cap\mathbb{U} &\iff p(x)\in\mathbb{W}\wedge p(x)\in\mathbb{U}\\
&\iff p(x)=b_1(1-x)+b_2(x^2-x^3)\wedge p(x)=b_3(1+x)+b_4(x^2+x^3)\\
&\iff b_1-b_1x+b_2x^2-b_2x^3=b_3+b_3x+b_4x^2+b_4x^3\\
&\iff (b_1=b_3)\wedge(-b_1=b_3)\wedge(b_2=b_4)\wedge(-b_2=b_4)\\
&\iff b_1=b_3=0\wedge b_2=b_4=0\\
&\iff p(x)=0_{\mathbb{R}_3[x]}
\end{aligned}$$

De donde sigue lo pedido, $\mathbb{W}\cap\mathbb{U}=\{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}$

(c) A partir de $\mathbb{U}$ y $\mathbb{W}$, obtenemos un sistema de generadores para $\mathbb{R}_3[x]$, pues

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 = \underbrace{\frac{a_0-a_1}{2}(1-x)+\frac{a_2-a_3}{2}(x^2-x^3)}_{\in\mathbb{W}}+\underbrace{\frac{a_0+a_1}{2}(1+x)+\frac{a_2+a_3}{2}(x^2+x^3)}_{\in\mathbb{U}}$$

Y,

$$\mathbb{R}_3[x] = \langle\{1-x,x^2-x^3,1+x,x^2+x^3\}\rangle$$

En particular, en este sistema tenemos que.

$$\left[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right]_\alpha=\begin{pmatrix}\dfrac{a_0-a_1}{2}\\[2mm] \dfrac{a_2-a_3}{2}\\[2mm] \dfrac{a_0+a_1}{2}\\[2mm] \dfrac{a_2+a_3}{2}\end{pmatrix}$$

5. Dependencia e Independencia Lineal

Siempre con la idea de fondo de construir un procedimiento finito que determine rápida y eficientemente los elementos de un espacio vectorial, y considerando que ya tenemos una representación vía el concepto de Sistema de generadores, ahora queremos garantizar que esta representación "es segura."

Para ello iniciamos nuestro análisis considerando un sistema de generadores $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ de un espacio vectorial de $\mathbb{V}$, es decir,

$$\mathbb{V}=\langle\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\rangle$$

Equivalentemente, para cada $u\in\mathbb{V}$ existen $c_1,c_2,\dots,c_n$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

O en lenguaje más pragmático: Para cada $v \in V$ la ecuación vectorial

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

tiene al menos una solución en $\mathbb{K}^n$

Motivados por lo anterior construyamos "una relación entre la teoría y la práctica."

Definición 5.1. *Sea* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ *un sistema de generadores para* $\mathbb{V}$ *entonces definimos la relación* $[\ ]_\alpha : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$ *como sigue:*

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \Longleftrightarrow v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \in \mathbb{V}$$

Ejemplo 5.1.1. *Si* $\alpha = \{(1,1), (1,-1))\}$ *entonces* α *es un sistema de generadores para* $\mathbb{R}^2$*, pues*

$$(x,y) \quad = \quad \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$$

Así que,

$$[(x,y)]_\alpha \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.1.2. *Si* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ *un sistema de generadores para* $\mathbb{V}$ *entonces para,* $w \in \mathbb{V}$*,* $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$*, también genera* $\mathbb{V}$*, y*

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow w = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k + 0 \cdot w \qquad (\ \textit{Pues, } \alpha \textit{ genera } \mathbb{V})$$

Por otra parte, tenemos "una fuga de seguridad" ya que existe una representación diferente para w*, pues*

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow w = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot v_k + 1 \cdot w$$

Observación 5.1.3. *Para caracterizar esta ”fuga de seguridad”, supongamos que* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *es un sistema de generadores para* $\mathbb{V}$ *y que* $u \in \mathbb{V}$ *tiene dos representaciones diferentes en este sistema entonces debemos tener*

(1) $u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$ *y* $u = \sum_{k=1}^{n} b_k v_k$

(2) *Si estas representaciones son distintas entonces existe* $(i; 1 \leq i \leq n)$ *tal que* $a_i \neq b_i$

(3) *Luego, tenemos que*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k v_k = \sum_{k=1}^{n} b_k v_k \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) v_k = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow \quad (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + \underbrace{(a_i - b_i)}_{\neq 0} v_i + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0_{\mathbb{V}}\end{aligned}$$

Así que, el $0_{\mathbb{V}}$ *se escribe, al menos de dos formas diferentes*

$$\begin{aligned}0_{\mathbb{V}} &= 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ &= (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + \underbrace{(a_i - b_i)}_{\neq 0} v_i + \dots + (a_n - b_n)v_n\end{aligned}$$

Conclusión 5.1.4. *Si un vector* $u \in \mathbb{V}$ *se representa en más de una forma, como combinación lineal de los elementos de* α *entonces el vector nulo* $0_{\mathbb{V}}$ *se representa en más de una forma, como combinación lineal de los elementos de* α.
Luego, en virtud de nuestra lógica, podemos decir que: $0_{\mathbb{V}}$, *se escribe de una única forma como combinación lineal de los elementos de* α *entonces todo vector del espacio posee la misma propiedad.*

Definición 5.2. *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial, y* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. *Diremos que* α *es un conjunto linealmente independiente en* $\mathbb{V}$ *si* $0_{\mathbb{V}}$, *se escribe de una única forma como combinación lineal de los elementos de* α, *en símbolos Li. Caso contrario diremos que* α *es un conjunto linealmente dependiente, en símbolos Ld.*

Es decir, α *es Li en* $\mathbb{V}$ *Si*

$$a_i v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Ejemplo 5.2.1. *Si* $\alpha = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\} \subset \mathbb{K}_2[x]$ *entonces* α *es Li en* $\mathbb{K}_2[x]$.

En efecto

De acuerdo a la definición. Si suponemos que $a_1 \cdot 1 + a_2(1 + x) + a_3(1 + x + x^2) = 0_{\mathbb{K}_2[x]}$ *entonces debemos mostrar que* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. *Por tanto,*

$$\begin{aligned} a_1\cdot 1 + a_2(1+x) + a_3(1+x+x^2) = 0_{\mathbb{K}_2[x]} &\Longrightarrow a_1 + a_2 + a_2x + a_3 + a_3x + a_3x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ &\Longrightarrow (a_1+a_2+a_3) + (a_2+a_3)x + a_3x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ &\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2+a_3 &=& 0 \\ a_2+a_3 &=& 0 \\ a_3 &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_3 = a_2 = a_1 = 0 \end{aligned}$$

Luego, α es Li en $\mathbb{K}_2[x]$

Ejemplo 5.2.2. *Si $\beta = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1-x-2x^2\} \subset \mathbb{K}_2[x]$ entonces ¿ β es Li ó Ld en $\mathbb{K}_2[x]$?.*

Estudiemos el problema

Supongamos que $a_1\cdot 1 + a_2(1+x) + a_3(1+x+x^2) + a_4(1-x-2x^2) = 0_{\mathbb{K}_2[x]}$ entonces

$$\begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_2x + a_3 + a_3x + a_3x^2 + a_4 - a_4x - 2a_4x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \Longleftrightarrow \\ (a_1+a_2+a_3+a_4) + (a_2+a_3-a_4)x + (a_3-2a_4)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \Longleftrightarrow \\ \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2+a_3+a_4 &=& 0 \\ a_2+a_3-a_4 &=& 0 \\ a_3-2a_4 &=& 0 \end{array}\right| \qquad (*) \end{array}$$

Luego, β es Ld en $\mathbb{K}_2[x]$, pues, si A es la matriz de coeficientes del sistema $(*)$ entonces $\rho(A)$, puede ser como máximo 3, y el número de incógnitas es 4 de donde siguen que el sistema tiene infinitas soluciones.

Podemos determinar esas soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ (l_1 \to l_1 - l_2) \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ (l_2 \to l_2 - l_3) \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Las infinitas soluciones son de la forma: $a_1 = -2a_4$; $a_2 = -a_4$; $a_3 = 2a_4$ y su expresión es de la forma:

$$0 + 0x + 0x^2 \;=\; -2a_4 - a_4(1+x) + 2a_4(1+x+x^2) + a_4(1-x-2x^2) \quad (a_4 \in \mathbb{K})$$

6. Base y Dimensión

Ahora tenemos construidas y listas para usar, las piezas precisas para garantizar la existencia y unicidad de una representación como combinación lineal, para cada vector de un espacio vectorial. Partimos con la siguiente:

Definición 6.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Diremos que α es una base para el espacio vectorial $\mathbb{V}$ si*

(1) *α es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$*
(2) *α es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$*

Es decir, para cada $u \in \mathbb{V}$ existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ tal que

$$u \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Equivalentemente, la función

$$\begin{array}{cccc} [\ ]_\alpha & : & \mathbb{V} & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1 \\ & & u & \longmapsto & [u]_\alpha \end{array} \ ; \quad donde \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$$

Es una biyección

Ejemplo 6.1.1. *Si $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ entonces*

$$c(n) = \{e_2, e_2, \dots, e_n\}$$

La llamaremos la base canónica de $\mathbb{K}^n$, pues;

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \quad \Longleftrightarrow \quad [(x_1, x_2, \dots, x_n)]_{c(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.1.2. *Si $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s)$ entonces*

$$m(n \times s) = \{E_{ij} \mid (1 \leq i \leq n); (1 \leq j \leq s)\}$$

La llamaremos la base canónica de $(\mathbb{M})_{\mathbb{K}}(n \times s)$, pues por ejemplo para $n = s = 2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} &= x_{11} E_{11} + x_{12} E_{12} + x_{21} E_{21} + x_{22} E_{22} \\ &= x_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.1.3. *Si $\mathbb{V} = \mathbb{K}[x]$ entonces*

$$p(\infty) = \{1, x, x^2, \dots\}$$

La llamaremos la base canónica de los polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, pues genéricamente un polinomio se escribe como,

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_t x^t; \quad (t \in \mathbb{N})$$

En particular,

$$p(n) = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}; \quad (n \in \mathbb{N})$$

La llamaremos la base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$, el espacio vectorial de polinomios hasta de grado n.

Ejemplo 6.1.4. *En $\mathbb{K}^n$, sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base entonces*

- $c\alpha = \{c \cdot v_1, c \cdot v_2, \dots, c \cdot v_n\}$, *es una nueva base de* $\mathbb{K}^n$, *para cada* $c \in \mathbb{K} - \{0\}$
- $\alpha^+ = \{v_1, v_1 + v_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} v_i\}$, *es una nueva base de* $\mathbb{K}^n$
- *En general* $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, *donde* $w_j = \sum_{i=1}^{j} a_i v_i$, *para* $(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$ *fijo, es una base de* $\mathbb{K}^n$

Ejemplo 6.1.5. *Sea* $V = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid \text{ tal que } f \text{ continua } \}$. *Si definimos el subespacio de* V

$$W = \langle \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\} \rangle$$

entonces $\alpha = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}$, *es una base de* W, *para cada* $n \in \mathbb{N}$

Teorema 6.2. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial y* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$ *entonces cualquier subconjunto de* V *que posea más de n-elementos es linealmente dependiente*

En efecto

(1) *Sea* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *una base de* V, *y* $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_s\} \subset \mathbb{V}$, *donde* $n < s$

(2) *Supongamos que* $c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + \cdots + c_s w_s = 0_{\mathbb{V}}$

(3) *Como* α *es una base entonces en primer lugar, cada elemento de* $\mathbb{V}$ *tiene representación como combinación lineal de sus elementos (Es un sistema de generadores). Así que en particular para cada* w_i $(1 \leq i \leq s)$ *tenemos que*

$$\begin{array}{rcl} w_1 &=& a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ w_2 &=& a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ &\vdots& \\ w_i &=& a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n \\ &\vdots& \\ w_s &=& a_{s1}v_1 + a_{s2}v_2 + \cdots + a_{sn}v_n \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} c_1w_1 &=& c_1a_{11}v_1 + \cdots + c_1a_{1n}v_n \\ c_2w_2 &=& c_2a_{21}v_1 + \cdots + c_2a_{2n}v_n \\ &\vdots& \\ c_iw_i &=& c_ia_{i1}v_1 + \cdots + c_ia_{in}v_n \\ &\vdots& \\ c_sw_s &=& c_sa_{s1}v_1 + \cdots + c_sa_{sn}v_n \\ \hline 0_{\mathbb{V}} &=& \left(\sum_{i=1}^{s} c_ia_{i1}\right)v_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{s} c_ia_{in}\right)v_n \end{array} \qquad (+)$$

En segundo lugar, α es linealmente independiente en $\mathbb{V}$, así que, forzosamente debemos tener que

$$\left.\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{i=1}^{s} c_i a_{i1} & = & 0\\ & \vdots & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} c_i a_{in} & = & 0\end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{s1}c_s & = & 0\\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{s2}c_s & = & 0\\ & \vdots & \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{sn}c_s & = & 0\end{array}\right| \qquad (**)$$

Como $n < s$ entonces el sistema homogéneo $(**)$ tiene infinitas soluciones, es decir, el conjunto β es linealmente dependiente.

Corolario 6.2.1. *Todas las bases de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad, es decir el mismo número de vectores.*

En efecto

Supongamos que $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, v_m\}$ son dos bases del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Aplicando el contenido del teorema 6.2 tenemos dos casos simultáneos que analizar,

(1) *Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base entonces n es el número máximo de vectores linealmente independientes, así que si β es otra base entonces su número de vectores linealmente independientes m debe ser menor o igual que n*

(2) *Si $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es una base entonces m es el número máximo de vectores linealmente independientes, así que si α es otra base entonces su número de vectores linealmente independientes n debe ser menor o igual que m.*

(3) *Así que $n = m$, pues ambos son números naturales.*

Definición 6.3. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Llamaremos dimensión de $\mathbb{V}$ sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ a la cardinalidad de una base de $\mathbb{V}$, y la notaremos por* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$

Ejemplo 6.3.1. *Usando la información acrisolada en los ejemplos, y observaciones anteriores tenemos que:*

(1) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$; *pues* $card(c(n)) = n$

(2) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$; *pues* $card(c(n)) = n$

(3) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$;

(4) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$; *pues* $card(p(n)) = n + 1$

(5) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$; *pues* $card(p(\infty)) = \infty$

(6) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times s)) = n \cdot s$; *pues* $card(m(n \times s)) = n \cdot s$

Teorema 6.4. *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial tal que* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, *y* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ *entonces*

$$\alpha \text{ linealmente independiente} \Longleftrightarrow \alpha \text{ sistema de generadores}$$

En efecto

Etapa 1. ($\Longrightarrow$). *Por demostrar que [*α *Li entonces* α *genera* $\mathbb{V}$*].*

Del contenido del teorema 6.2 sugue que el conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u\}$ *es linealmente dependiente* $(\forall u; u \in \mathbb{V})$.

Luego, existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, *<u>no todos nulos</u> tales que* $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}u = 0_{\mathbb{V}}$.

- *Si* $a_{n+1} \neq 0$ *entonces*

  $$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}u = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = a_{n+1}u \\ &\Longrightarrow \frac{a_1}{a_{n+1}}\,v_1 + \frac{a_2}{a_{n+1}}\,v_2 + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}}\,v_n = u \end{aligned}$$

  Así que α *en este caso genera* $\mathbb{V}$

- *Si* $a_{n+1} = 0$ *entonces*

  $$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}u = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \quad (\alpha \text{ es Li}) \end{aligned}$$

  Pero entonces contrariamos el hecho de que existen escalares no todos nulos, así que este caso no es posible, para esta dimensión.

Etapa 2. ($\Longleftarrow$). *Por demostrar que [*α *genera* $\mathbb{V}$*] entonces* α *Li.*

En cualquier caso sólo existen dos posibilidades, que α *sea Linealmente independiente o linealmente dependiente.*

Pero, si α *linealmente dependiente entonces* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) < n$, *lo cual contradice nuestra hipótesis. Así que este caso no es posible.*

Teorema 6.5. *Sea* $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{K}^n$, *tal que* $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ *entonces* α *es linealmente independiente si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

En efecto

Supongamos que $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0_{\mathbb{V}}$ *entonces*

$$\begin{aligned}
c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0_{\mathbb{K}^n} &\implies c_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + c_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \cdots + \\
&\quad\; c_n(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) = 0_{\mathbb{K}^n} \\
&\implies \left.\begin{array}{rcl}
a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{n1}c_n & = & 0 \\
a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{n2}c_n & = & 0 \\
 & \vdots & \\
a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n & = & 0
\end{array}\right| \\
&\implies \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)
\end{aligned}$$

El sistema $(*)$ *tiene solución única,* $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ *si y sólo si la matriz de coeficientes del sistema homogéneo es invertible. Es decir*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^t \neq 0$$

Conclusión 6.6. *Frente a nuestro objetivo consistente en " determinar rápida y efectivamente a los elementos de un espacio vectorial", podemos decir lo siguiente:*

(1) *Un espacio vectorial hay que entenderlo respecto de una base* ($\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$), *o "sistema de referencia" o "reglas del juego".*

(2) *como* $[\ ]_\alpha$ *es un biyección entonces llamamos coordenadas de* $u \in \mathbb{V}$ *a* $[u]_\alpha \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1)$, *y a este último lo llamamos espacio coordenado.*

(3) *Así que un espacio vectorial puede ser de ahora en adelante, identificado como una estructura híbrida, formada por dos partes equivalentes, pero con funciones diferentes y muy precisas.*

En efecto

$$\mathbb{V} \leftrightarrow \begin{bmatrix} (\mathbb{V}, \alpha) \\ \\ \downarrow [\ ]_\alpha \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \textit{Teoría:Combinaciones lineales} \\ \\ \downarrow \\ \\ \textit{Práctica: Coordenadas} \end{bmatrix}$$

(4) *El problema que aparece, y por tanto hay que abordar más adelante es: ¿Cómo se relacionan dos triadas diferentes?. Es decir*

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{V},\alpha) \\ \\ \downarrow [\,]_\alpha \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{bmatrix} \stackrel{?}{\longmapsto} \begin{bmatrix} (\mathbb{V},\beta) \\ \\ \downarrow [\,]_\beta \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{bmatrix}$$

6.7. Ejercicios Propuestos de Base.

(1) Determine el conjunto

$$S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (-2,b,1) \in \langle\{(a,0,2),(4,a,-2),(-2a,-2,a)\}\rangle\}$$

(2) Determine si los siguientes conjuntos son subespacios en el espacio vectorial correspondiente. En caso afirmativo, determine una base para el subespacio.

(a) $\mathbb{W} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2-c^2-d^2 = 0\}$

(b) $\mathbb{W} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid [a = d \wedge b = 0 \wedge c = 2d]\right\}$

(c) $\mathbb{W} = \left\{B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid B\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot B\right\}$

(3) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. Demuestre que

$$\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \text{ tal que } w_i = av_1 + v_i \quad (i = 1,2,\dots n), (a \in \mathbb{K}) \text{ es una base de } \mathbb{V}$$

(4) Si $\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & a \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces determine el conjunto

$$\beta = \{a \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ No es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\}$$

(5) Si $\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

(a) Demuestre que α es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Determine $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_\alpha$

(6) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (*)$$

(a) Demuestre que $\mathbb{W} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ Tiene solución }\} \leq \mathbb{R}^3$

(b) A partir de una base del subespacio $\mathbb{W}$ obtenga una base de $\mathbb{R}^3$

7. Coordenadas y Matrices

El problema que abordaremos es exactamente, ¿Cómo se relacionan dos triadas diferentes?. Es decir ¿Qué relación existe entre los sistemas de gestión de la información determinados por las bases α y β?

En símbolos tenemos

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{V},\alpha) \\ \\ \downarrow [\,]_\alpha \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{bmatrix} \overset{?}{\longmapsto} \begin{bmatrix} (\mathbb{V},\beta) \\ \\ \downarrow [\,]_\beta \\ \\ \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{bmatrix}$$

Equivalentemente, si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, para cada $u \in \mathbb{V}$ tendremos que

$$\begin{array}{ccc} u = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i v_i \in \mathbb{V} & \longmapsto & u = \displaystyle\sum_{i=1}^n b_i w_i \in \mathbb{V} \\ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \\ [u]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) & \longmapsto & [u]_\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n\times 1) \end{array} \tag{15}$$

Luego (15), nos sugiere que debemos generar un proceso que transforme coordenadas en la base α en coordenadas en la base β.

7.1. Propuesta de Estrategia. Para analizar esta situación, verificaremos directamente el comportamiento de la función $[]_\gamma$, (donde γ es una base cualquiera del espacio), con respecto a las reglas básicas con que se generan los vectores. Es decir:

(1) Mostraremos que la función $[\,]_\gamma$, para cualquier base $\gamma = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ de $\mathbb{V}$, respeta las operaciones del espacio $\mathbb{V}$. Es decir que $(\forall u; u \in \mathbb{V})$, $(\forall v; v \in \mathbb{V})$ y $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{K})$, se verifican:

(a) $[u+v]_\gamma = [u]_\gamma + [v]_\gamma$
(b) $[\lambda u]_\gamma = \lambda\,[u]_\gamma$

En efecto

Si $u = \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i z_i$ y $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n d_i z_i$ entonces $u + v = \displaystyle\sum_{i=1}^n (c_i + d_i) z_i$. Así que

$$[u+v]_\gamma = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = [u]_\gamma + [v]_\gamma$$

Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $\lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda c_i) z_i$. Por tanto

$$[\lambda u]_\gamma = \begin{pmatrix} \lambda c_1 \\ \lambda c_2 \\ \vdots \\ \lambda c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda \, [u]_\gamma$$

(2) Siguiendo la idea propuesta por el diagrama (15). Apliquemos la función $[\,]_\beta$, a los elementos de la base α. Es decir

$$v_s = a_{1s}w_1 + a_{2s}w_2 + a_{3s}w_3 + \cdots + a_{ns}w_n = \sum_{i=1}^{n} a_{is}w_i \iff [v_s]_\beta = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \qquad (1 \leq s \leq n)$$

(3) Ahora usemos la información acopiada, en el caso general, es decir si $u \in \mathbb{V}$ y $u = \sum_{s=1}^{n} c_s v_s$ entonces

$$\begin{aligned} [u]_\beta &= \left[\sum_{s=1}^{n} c_s v_s\right]_\beta = \sum_{s=1}^{n} c_s \, [v_s]_\beta = \sum_{s=1}^{n} c_s \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1a_{11} + c_2a_{12} + \cdots + c_na_{1n} \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + \cdots + c_na_{2n} \\ \vdots \\ c_1a_{n1} + c_2a_{n2} + \cdots + c_na_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \underbrace{a_{n1}}_{[v_1]_\beta} & \underbrace{a_{n2}}_{[v_2]_\beta} & \cdots & \underbrace{a_{nn}}_{[v_n]_\beta} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{[u]_\alpha} \end{aligned}$$

(4) Ya henos encontrado la relación, como era de esperar una matriz, que traslada la información de una base a otra, así sólo resta que la denotemos formalmente, porque incluso ya sabemos como determinarla.

Definición 7.2. *La matriz de orden n,* $[I]_\alpha^\beta = ([v_1]_\beta \, [v_2]_\beta \ldots [v_n]_\beta)$*, se llamará la matriz cambio de base de* α *para* β

Equivalentemente,

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Además hemos mostrado el siguiente importante resultado

Teorema 7.3. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son dos bases entonces*

$$[I]_\alpha^\beta \, [u]_\alpha = [u]_\beta \qquad (\forall u; u \in \mathbb{V}) \tag{16}$$

Corolario 7.3.1. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son dos bases entonces $[I]_\alpha^\beta \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))$ e $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha$*

En efecto

En primer lugar, $(\forall u; u \in \mathbb{V})$ tenemos que:

$$\left([I]_\alpha^\beta \, [I]_\beta^\alpha\right) [u]_\beta = [I]_\alpha^\beta \left([I]_\beta^\alpha \, [u]_\beta\right) = [I]_\alpha^\beta \, [u]_\alpha = [u]_\beta$$

Y en segundo lugar,

$$\left([I]_\beta^\alpha \, [I]_\alpha^\beta\right) [u]_\alpha = [I]_\beta^\alpha \left([I]_\alpha^\beta \, [u]_\alpha\right) = [I]_\beta^\alpha \, [u]_\beta = [u]_\alpha$$

Así que, $[I]_\alpha^\beta \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))$ e $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha$

Conclusión 7.3.2. *Lo anterior puede ser sistematizado a través del siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
u = \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i v_i \in \arrow[d] & (\mathbb{V}, \alpha) \arrow[r, "1_{\mathbb{V}}"] \arrow[d, "{[\;]_\alpha}"] & (\mathbb{V}, \beta) \arrow[d, "{[\;]_{\beta)}}"] & \ni u = \displaystyle\sum_{i=1}^n d_i w_i \arrow[d] \\
{[u]_\alpha} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \arrow[r, "{[I]_\alpha^\beta}"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) & \ni \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = [u]_\beta
\end{tikzcd}$$

7.4. Ejercicios Propuestos de Coordenadas.

(1) Si $\alpha = \{x, 3 + x^2, x + 2x^2\} \subset \mathbb{R}_2 x$ y $\beta = \{x + 3, x - 2, x^2 + 1\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ entonces

(a) Demuestre que α y β son dos bases de $\mathbb{R}^3$

(b) Determine

(i) $[6 - 4x + 8x^2]_\alpha \ \wedge \ [6 - 4x + 8x^2]_\beta$

(ii) $[9 - x + 7x^2\ ]_\beta \ \wedge \ [9 - x + 7x^2]_\alpha$

(iii) $[I]_{\alpha}^{\beta}$ y $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(c) Muestre que

(i) $[I]_{\alpha}^{\beta}[6-4x+8x^2]_{\alpha} = [6-4x+8x^2]_{\beta}$

(ii) $[I]_{\beta}^{\alpha}[9-x+7x^2\ ]_{\beta} = [9-x+7x^2\ ]_{\alpha}$

(2) Sea $\beta = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine, si es posible, una base α del tal forma que $A = [I]_{\alpha}^{\beta}$. Si es posible exhiba una tal base α, si no justifique con precisión meridiana su respuesta.

8. Situaciones de Desempeño: Espacios Vectoriales

8.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

8.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

8.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

(1) Demuestre que $W = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x] \mid \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \right\} \leq \mathbb{R}_n[x]$

(2) Sea $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid p(1) = 0\}$. Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

(3) Sean $\mathbb{W}_1 = \{(x, y, z) \ / \ 2x - y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{W}_2 = \{(x, y, z) \ / \ x + 2y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

(a) Demuestre que $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{R}^3$ para $(i = 1, 2)$

(b) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$

(c) ¿ Es $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$?

(4) Sea $\mathbb{W}_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a_{11} + a_{22} = 0 \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(a) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Determine $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$

(b) Determine una base de $\mathbb{W}$

(6) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ tal que $w_k = \sum_{i=1}^{k} i v_i$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ entonces demuestre que

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(7) Sea $C[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ Derivable en el intervalo } [-\pi, \pi]\}$. Demuestre que $\alpha = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ es un conjunto linealmente independiente en $C[-\pi, \pi]$

Recuerde que $C[-\pi, \pi]$ es un espacio vectorial con las operaciones:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para $x \in C[-\pi, \pi]$,
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in C[-\pi, \pi]$

(8) Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Demuestre que

$$\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ tal que } u_s = \sum_{r=1}^{s} v_r \quad (\text{para } 1 \leq s \leq n) \text{ es un sistema de generadores de } \mathbb{V}$$

(9) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto Li en el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. ¿Es $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ un conjunto LI en $\mathbb{V}$?. Si $w_i = av_1 + v_i$, para $(i = 1, 2, \dots n)$ y $a \neq -1$ es un escalar fijo.

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \implies \beta = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \text{ es una base de } \mathbb{V}, \text{ donde } w_i = \sum_{j=1}^{i} v_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

(11) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del espacio vectorial real $\mathbb{V}$. Define el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_j = \sum_{i=1}^{j} 2v_i$, para $1 \leq j \leq n$. Demuestre que β es también una base de $\mathbb{V}$.

(12) Sea $\beta = \{1, 1 - x, 1 - x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$, y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine, si es posible, una base α de $\mathbb{R}_2[x]$ del tal forma que $A = [I]_{\alpha}^{\beta}$. (Si es posible exhiba una tal base α, si no justifique con precisión meridiana su respuesta)

(13) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. Considere $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ y $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $u_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} v_{s+1-i}$, para $s = 1, 2, \ldots n$.

(a) Demuestre que α base de $\mathbb{V} \Longrightarrow \beta$ base de $\mathbb{V}$

(b) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(14) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si $[I]_{c(3)}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ entonces determine la base α

(15) En $\mathbb{R}_2[x]$, considere las bases $\alpha = \{x, x^2 + 3, 2x^2 + x\}$ y $\beta = \{x + 3, x - 2, x^2 + 1\}$.

(a) Determine $[I]_{\alpha}^{\beta}$ y $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(b) Determine $[1 + x + x^2]_{\alpha}$ y $[1 + x + x^2]_{\beta}$

(16) Considere las bases $\alpha = \{(1, -2, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ y $\beta = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine $[I]_{\alpha}^{\beta}$ e $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(17) Si $P(2) = \{1, x, x^2\}$ y $\alpha = \{1 + x + x^2, -2 - x + x^2, -1 + x + x^2\}$ dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces determine $[I]_{\alpha}^{P(2)}$ e $[I]_{P(2)}^{\alpha}$

(18) Si α y $\beta = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ son dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz de cambio de la baseα para la base β entonces determine la base α.

(19) Si $\alpha = \{(2, 1, 2), (4, -1, 0), (1, 2, 2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y $u = (1, 2, 3)$ entonces determine $[u]_{\alpha}$

9. Solución de Situaciones de Desempeño: Espacios Vectoriales

(1) Demuestre que $\mathbb{W} = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x] \mid \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \right\} \leq \mathbb{R}_n[x]$.

Solución

$$\begin{aligned}
p(x) \in W \quad &\Longleftrightarrow \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x] \ \wedge \ \sum_{i=0}^{n} i a_i = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x] \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} i a_i = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{i=2}^{n} a_i x^i \ \wedge \ a_1 = -\sum_{i=2}^{n} i a_i \\
&\Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + \left(-\sum_{i=2}^{n} i a_i \right) x + \sum_{i=2}^{n} a_i x^i \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ahora, procedemos a estudiar la relación polinomial expresada en $*$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} a_i x^i + \left(-\sum_{i=2}^{n} i a_i \right) x &= (a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n) - (2a_2 x + 3a_3 x + \cdots + n a_n x) \\
&= a_2(x^2 - 2x) + a_3(x^3 - 3x) + a_4(x^4 - 4x) + \cdots + a_n(x^n - nx) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Retornamos a $(*)$ a la luz de lo obtenido en $(**)$ y nos resulta que

$$\begin{aligned}
p(x) \in W \quad &\Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_2(x^2 - 2x) + a_3(x^3 - 3x) + a_4(x^4 - 4x) + \cdots + a_n(x^n - nx) \\
&\Longleftrightarrow \quad p(x) \in \langle \{1, (x^2 - 2x), (x^3 - 3x), (x^4 - 4x), \dots, (x^n - nx) \rangle
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} \ = \ \langle \{1, (x^2 - 2x), (x^3 - 3x), (x^4 - 4x), \dots, (x^n - nx) \rangle \Longrightarrow \mathbb{W} \leq \mathbb{R}_n[x]$$

(2) Sea $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid p(1) = 0\}$. Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

Solución

Etapa 1. $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $p(1) = 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 = 0$.

Luego $(0) \in \mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \neq \emptyset$.

Etapa 2. Sean $p(x) \in \mathbb{W}$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbb{W}$ entonces

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} \quad &\Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \Longleftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(x) \in \mathbb{W} \quad &\Longleftrightarrow \quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge q(1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge b_0 + b_1 + b_2 = 0
\end{aligned}$$

entonces

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} p(1) + q(1) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot 1 + (a_2 + b_2) \cdot 1^2 \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $p(x) + q(x) \in \mathbb{W}$.

Etapa 3. Sean $p(x) \in \mathbb{W}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} \lambda p(1) &= \lambda a_0 + \lambda a_1 \cdot 1 + \lambda a_2 \cdot 1^2 \\ &= \lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2 \\ &= \lambda(a_0 + a_1 + a_2) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $\lambda p(x) \in \mathbb{W}$, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

(3) Sean $\mathbb{W}_1 = \{(x, y, z) \ / \ 2x - y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{W}_2 = \{(x, y, z) \ / \ x + 2y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{R}^3$ para $(i = 1, 2)$
Solución
Etapa 1. $\mathbb{W}_1 \neq \emptyset$, pues $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y $2 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$. Así que $(0, 0, 0) \in \mathbb{W}_1$

Etapa 2. Sea $u \in \mathbb{W}_1$ y $v \in \mathbb{W}_1$ entonces

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}_1 &\iff u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ v \in \mathbb{W}_1 &\iff v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x_2 - y_2 - z_2 = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) &= 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 - z_1 - z_2 \\ &= (2x_1 - y_1 - z_1) + (2x_2 - y_2 - z_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $u + v \in \mathbb{W}_1$

Etapa 3. Sea $u \in \mathbb{W}_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \lambda u &= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\lambda x_1 - \lambda y_1 - \lambda z_1) &= \lambda(2x_1 - y_1 - z_1) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $\lambda u \in \mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{R}^3$

Análogamente, para $\mathbb{W}_2$ tenemos que

Etapa 1. $\mathbb{W}_2 \neq \emptyset$, pues $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ y $2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$. Así que $(0,0,0) \in \mathbb{W}_2$

Etapa 2. Sea $u \in \mathbb{W}_2$ y $v \in \mathbb{W}_2$ entonces

$$u \in \mathbb{W}_2 \iff u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 0$$

$$v \in \mathbb{W}_2 \iff v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0$$

entonces

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) &= x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 + 3z_1 + 3z_2 \\ &= (x_1 + 2y_1 + 3z_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $u + v \in \mathbb{W}_2$

Etapa 3. Sea $u \in \mathbb{W}_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1) &= \lambda(x_1 + 2y_1 + 3z_1) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $\lambda u \in \mathbb{W}_2$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$

(b) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$

Solución

Etapa 1. $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \neq \emptyset$, pues del ejercicio anterior, $(0,0,0) \in \mathbb{W}_1$ y $(0,0,0) \in \mathbb{W}_2$

Etapa 2. Sea $u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ y $v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ entonces

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 &\iff u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge u \in \mathbb{W}_1 \wedge u \in \mathbb{W}_2 \\ &\iff u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \wedge x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 &\iff v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge v \in \mathbb{W}_1 \wedge v \in \mathbb{W}_2 \\ &\iff u = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \wedge 2x_2 - y_2 - z_2 = 0 \wedge x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$

Como $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$ entonces $u + v \in \mathbb{W}_1$ y $u + v \in \mathbb{W}_2$. Así que $u + v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$
Etapa 3. De la misma forma si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ entonces $\lambda u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, y $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$

(c) ¿ Es $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{R}^3$?

Solución

Observen que $u = (1, 2, 0) \in \mathbb{W}_1$ y $v = (-1, -1, 1) \in \mathbb{W}_2$, pero $u + v = (0, 1, 1) \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$. Así que $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \not\leq \mathbb{R}^3$

(4) Sea $\mathbb{W}_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a_{11} + a_{22} = 0 \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

(a) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Solución

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{W}_1 &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{11} + a_{22} = 0 \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{22} = -a_{11} \\ &\iff A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W}_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Determine $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$

Solución

Etapa 1. Sea $\mathbb{W}_2$ el subespacio de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ pedido.

Etapa 2. $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}_1) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}_2)$

Luego, $4 = 3 + \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}_2)$, y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}_2) = 1$

Etapa 3. Basta escoger $\mathbb{W}_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, pues:

$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$

Solución

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathbb{W} & \Longleftrightarrow & u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + 2y - 3z = 0 \\ & \Longleftrightarrow & u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x = -2y + 3z = 0 \\ & \Longleftrightarrow & u = (-2y + 3z, y, z, t) \ \wedge \ (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \\ & \Longleftrightarrow & u = y(-2, 1, 0, 0) + z(3, 01, 0) + t(0, 0, 0, 1) \end{array}$$

Luego $\mathbb{W} = \langle \{(-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \rangle \leq \mathbb{R}^4$

(b) Determine una base de $\mathbb{W}$

Solución

Si $\alpha = \{(-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ entonces α genera $\mathbb{W}$ y para ver que es Li hacemos lo siguiente,

$$\begin{array}{rcl} a_1(-2, 1, 0, 0) + a_2(3, 01, 0) + a_3(0, 0, 0, 1) & = & (0, 0, 0, 0) \\ & \Downarrow & \\ (-2a_1 + 3a_2, a_1, a_2, a_3) & = & (0, 0, 0, 0) \\ & \Downarrow & \\ a_1 = a_2 & = & a_3 = 0 \end{array}$$

Así que α es una base $\mathbb{W}$

(6) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ tal que $w_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i v_i$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ entonces demuestre que

$$\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \rangle$$

Solución

Etapa1. Debemos demostrar que $\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$. Es decir debemos mostrar que $\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \subset \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$ y $\langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) En primer lugar, sabemos que

$$\begin{aligned} u \in \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle &\iff u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad (a_i \in \mathbb{K} : 1 \leq i \leq n) \\ v \in \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle &\iff v = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \quad (b_i \in \mathbb{K} : 1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

(b) En segundo lugar,

$$w_k = \sum_{i=1}^{k} i v_i; \; (k = 1, 2, \dots, n) \implies \begin{array}{rcl} w_1 & = & v_1 \\ w_2 & = & v_1 + 2v_2 \\ w_3 & = & v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ & \vdots & \\ w_n & = & v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + nv_n \end{array}$$

Luego,

$$\langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle$$

(c) En tercer y último lugar,

$$\left.\begin{array}{rcl} w_1 & = & v_1 \\ w_2 & = & v_1 + 2v_2 \\ w_3 & = & v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ & \vdots & \\ w_n & = & v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + nv_n \end{array}\right\} \implies \begin{array}{rcl} v_1 & = & w_1 \\ v_2 & = & \dfrac{w_2 - w_1}{2} \\ v_3 & = & \dfrac{w_3 - w_2}{3} \\ & \vdots & \\ v_n & = & \dfrac{w_n - w_{n-1}}{n} \end{array}$$

Luego

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle \subset \langle\{w_1, w_2, \dots, w_n\}\rangle$$

(7) Sea $C[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f$ Derivable en el intervalo $[-\pi, \pi]\}$. Demuestre que $\alpha = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ es un conjunto linealmente independiente en $C[-\pi, \pi]$
Recuerde que $C[-\pi, \pi]$ es un espacio vectorial con las operaciones:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para $x \in C[-\pi, \pi]$,
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in C[-\pi, \pi]$.

Solución

Supongamos que tenemos la combinación lineal nula. $a_1\cdot 1+a_2\text{sen }x+a_3\cos x=0$ entonces derivando respecto de x obtenemos el sistema lineal en las variables $1, \text{sen }x, \cos x$.

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1\cdot 1+a_2\text{sen }x+a_3\cos x &=& 0\\ 0\cdot 1+a_2\cos x-a_3\text{sen }x &=& 0\\ 0\cdot 1-a_2\text{sen }x-a_3\cos x &=& 0\end{array}\right| \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & -a_3 & a_2\\ 0 & -a_2 & -a_3\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}1\\ \text{sen }x\\ \cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

entonces escalonando tenemos que:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & -a_3 & a_2\\ 0 & -a_2 & -a_3\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & -a_3 & a_2\\ 0 & -a_2 & -a_3\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & a_3\\ 0 & -a_3 & a_2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2a_3 & a_3^2\\ 0 & -a_3a_2 & a_2^2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2a_3 & a_3^2\\ 0 & 0 & a_2^2+a_3^2\end{pmatrix} \Longrightarrow a_1=a_2=a_3=0$$

Caso contrario el sistema homogéneo tiene rango máximo y entonces solución única, es decir $1=0$, $\text{sen }x=0$ y $\cos x=0$ $(\forall x)$, lo cual es imposible. Por tanto α es Linealmente independiente.

(8) Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})=n$ y $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Demuestre que

$$\beta=\{u_1,u_2,\dots,u_n\} \text{ tal que } u_s=\sum_{r=1}^{s} v_r \quad (\text{para } 1\le s\le n) \text{ es un sistema de generadores de } \mathbb{V}.$$

Solución

Sea $w\in\mathbb{V}$ entonces como α es una base de $\mathbb{V}$ existen únicos escalares $a_1,a_2,\dots,a_n$ tales que

$$w = a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n \qquad (*)$$

Pero,

$$\begin{array}{rcl} u_1=v_1 & \Longleftrightarrow & v_1=u_1\\ u_2=v_1+v_2 & \Longleftrightarrow & v_2=u_2-u_1\\ u_3=v_1+v_2+v_3 & \Longleftrightarrow & v_3=u_3-u_2\\ \dots & \dots & \dots\end{array}$$

Sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned} w &= a_1u_1+a_2(u_2-u_1)+a_3(u_3-u_2)+\cdots+a_n(u_n-u_{n-1})\\ &= (a_1-a_2)u_1+(a_2-a_3)u_2+\cdots+a_nu_n\end{aligned}$$

Luego β genera $\mathbb{V}$.

(9) Sea $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ un conjunto Li en el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. ¿Es $\beta=\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$ un conjunto LI en $\mathbb{V}$?. Si $w_i=av_1+v_i$, para $(i=1,2,\dots n)$ y $a\neq -1$ es un escalar fijo.

Solución

Sabemos que, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto Li en el $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$, lo que operacionalmente se traduce en que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0_{\mathbb{V}} \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

En este orden de razonamiento, para verificar la calidad de dependencia o independencia lineal de β debemos mostrar que

$$c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n = 0_{\mathbb{V}} \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

En efecto, como $w_i = av_1 + v_i$, para $(i = 1, 2, \dots n)$ y a es un escalar fijo entonces

$$\begin{aligned}
c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n = 0_{\mathbb{V}} &\implies c_1(av_1 + v_1) + c_2(av_1 + v_2) + c_3(av_1 + v_3) + \cdots + c_n(av_1 + v_n) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\implies [a(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) + c_1]v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0_{\mathbb{V}} \\
&\implies \left.\begin{array}{rcl}
a(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) + c_1 &=& 0 \\
c_2 &=& 0 \\
c_3 &=& 0 \\
\vdots &=& \vdots \\
c_n &=& 0
\end{array}\right| \\
&\implies ac_1 + c_1 = 0 \quad \wedge \quad c_2 = \cdots = c_n = 0 \\
&\implies (a+1)c_1 = 0 \quad \wedge \quad c_2 = \cdots = c_n = 0 \\
&\implies (a+1) = 0 \vee c_1 = 0 \quad \wedge \quad c_2 = \cdots = c_n = 0 \\
&\implies c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \quad (a \neq -1)
\end{aligned}$$

Así β es Linealmente independiente en $\mathbb{V}$

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \implies \beta = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \text{ es una base de } \mathbb{V}, \text{ donde } w_i = \sum_{j=1}^{i} v_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

Solución

- Sea $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es una base de $\mathbb{V}$ existen únicos escalares, $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \tag{17}$$

- Ahora por la forma de los elementos de β tenemos que $v_1 = w_1$ y para $i = 2, 3, \dots, n$ tenemos que

$$w_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} v_j \wedge w_i = \sum_{j=1}^{i} v_j \implies w_i - w_{i-1} = v_i \tag{18}$$

- Sustituyendo (18) en (17) tenemos que

$$\begin{aligned}
u &= a_1w_1 + a_2(w_2 - w_1) + a_3(w_3 - w_2) + \cdots + a_n(w_n - w_{n-1}) \\
&= (a_1 - a_2)w_1 + (a_2 - a_3)w_2 + (a_3 - a_4)w_3 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)w_{n-1} + a_nw_n
\end{aligned}$$

Luego, β genera $\mathbb{V}$

- Supongamos que $\sum_{j=1}^{n} c_j w_j = 0_{\mathbb{V}}$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} c_s w_s = 0_{\mathbb{V}} \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{s=1}^{n} c_s \left(\sum_{j=1}^{s} v_j\right) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow \quad c_1 \left(\sum_{j=1}^{1} v_j\right) + c_2 \left(\sum_{j=1}^{2} v_j\right) + \cdots + c_n \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow \quad (c_1 + c_2 + \cdots c_n)v_1 + (c_2 + \cdots c_n)v_2 + \cdots + (c_{n-1} + c_n)v_{n-1} + c_n v_n = 0_{\mathbb{V}}
\end{aligned}$$

$$\overset{\alpha \text{ es Li}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + \cdots c_n & = & 0 \\ c_2 + \cdots c_n & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ c_{n-1} + c_n & = & 0 \\ c_n & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Así que β es linealmente independiente y por tanto es una base.

(11) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial real $\mathbb{V}$. Define el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ tal que $w_j = \sum_{i=1}^{j} 2v_i$, para $1 \leq j \leq n$. Demuestre que β es también una base de $\mathbb{V}$.

Solución

$$a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = 0_{\mathbb{V}} \quad \Longrightarrow \quad 2(a_1 + \cdots + a_n)v_1 + 2(a_2 + \cdots + a_n)v_2 + \cdots + a_n v_n = 0_{\mathbb{V}}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\ a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + a_n & = & 0 \\ a_n & = & 0 \end{array}\right| \qquad (\text{ Pues } \alpha \text{ es Li}) \\
&\Longrightarrow \quad a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0 \quad \text{y entonces } \beta \text{ es Li}
\end{aligned}$$

Para mostrar que es un sistema de generadores, hacemos lo siguiente:

Si $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es base existen únicos escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \tag{19}$$

Ahora β genera el espacio $\mathbb{V}$ si tiene solución la ecuación: $u = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i$. Pero,

$$
\begin{aligned}
u=\sum_{j=1}^{n} b_j w_j \quad &\Longrightarrow \quad u=\sum_{j=1}^{n} b_j\left(\sum_{i=1}^{j} 2v_i\right)\\
&\Longrightarrow \quad u=\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)v_1+\left(\sum_{j=2}^{n} b_j\right)v_2+\cdots+\left(\sum_{j=n-1}^{n} b_j\right)v_{n-1}+\left(\sum_{j=n}^{n} b_j\right)v_n
\end{aligned}
$$

Como la representación (19) es única para u entonces debe suceder que:

$$
\begin{array}{rcl|}
b_1+b_2+\cdots+b_n &=& a_1\\
b_2+\cdots+b_n &=& a_2\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
b_{n-1}+b_n &=& a_{n-1}\\
b_n &=& a_n\\ \hline
\end{array}
\quad \text{y luego,} \quad
\begin{array}{lcl}
b_1 &=& a_1-a_2\\
b_2 &=& a_2-a_3\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
b_{n-1} &=& a_{n-1}-a_n\\
b_n &=& a_n
\end{array}
$$

Así que

$$u=\underbrace{(a_1-a_2)}_{b_1}w_1+\underbrace{(a_2-a_3)}_{b_2}w_2+\cdots+\underbrace{(a_{n-1}-a_n)}_{b_{n-1}}w_{n-1}+\underbrace{a_n}_{b_n}w_n$$

Por tanto genera $\mathbb{V}$, y entonces es una base.

(12) Sea $\beta=\{1,1-x,1-x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$, y $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\2&-2&4\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine, si es posible, una base α de $\mathbb{R}_2[x]$ del tal forma que $A=[I]_{\alpha}^{\beta}$. Si es posible exhiba una tal base α, si no justifique con precisión meridiana su respuesta.
Solución

Supongamos que $\alpha=\{p_1(x),p_2(x),_3(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, que satisface las condiciones propuestas en el problema encima entonces por definición

$$[I]_{\alpha}^{\beta}=\left([p_1(x)]_\beta \quad [p_2(x)]_\beta \quad [p_3(x)]_\beta\right)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$[p_1(x)]_\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad p_1(x)=1+3(1-x)+2(1-x^2)=6-3x-2x^2$$

$$[p_2(x)]_\beta=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad p_2(x)=-1+0(1-x)-2(1-x^2)=-3+2x^2$$

$$[p_3(x)]_\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad p_3(x)=2+1(1-x)+4(1-x^2)=7-x-4x^2$$

Entonces

$$\alpha \;=\; \{6-3x-2x^2, -3+2x^2, 7-x-4x^2\}$$

Pero se debe observar que α no es base, pues es linealmente dependiente por un cálculo directo, o porque

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

. Luego, A no puede ser una matriz cambio de base

(13) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, Considere los conjuntos $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ y $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $u_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} v_{s+1-i}$, para $s = 1, 2, \dots n$.

(a) Demuestre que α base de $\mathbb{V} \Longrightarrow \beta$ base de $\mathbb{V}$

Solución

En primer lugar observamos que los elementos de la base β son de la forma:

$$\begin{array}{rclcl@{\quad}c@{\quad}rcl}
u_1 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{1} v_{1+1-i} & = & v_1 & \Longleftrightarrow & v_1 & = & u_1 \\
u_2 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{2} v_{2+1-i} & = & v_2 + v_1 & \Longleftrightarrow & v_2 & = & u_2 - u_1 \\
u_3 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_{3+1-i} & = & v_3 + v_2 + v_1 & \Longleftrightarrow & v_3 & = & u_3 - u_2 \\
& \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
u_j & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{j} v_{j+1-i} & = & v_j + v_{j-1} + \cdots + v_1 & \Longleftrightarrow & v_j & = & u_j - u_{j-1} \\
& \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
u_n & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_{n+1-i} & = & v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1 & \Longleftrightarrow & v_n & = & u_n - u_{n-1}
\end{array} \tag{20}$$

En segundo lugar, mostramos que β linealmente independiente.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j u_j = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad a_1v_1 + a_2(v_2 + v_1) + \cdots + a_n(v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)v_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)v_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)v_{n-1} + a_nv_n = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\ a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n-1} + a_n & = & 0 \\ a_n & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0
\end{aligned}$$

Así que β es linealmente independiente.

En tercer lugar, mostramos que β es un sistema de generadores.

Si $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es una base entonces existen únicos escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tales que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, pero de acuerdo con (20) tenemos que

$$\begin{aligned} u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n & \Rightarrow & u = a_1u_1 + a_2(u_2 - u_1) + \cdots + a_n(u_n - u_{n-1}) \\ & \Rightarrow & u = (a_1 - a_2)u_1 + (a_2 - a_3)u_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)a_{n-1} + a_nu_n \end{aligned}$$

Luego β genera $\mathbb{V}$, y por ende es una base de β.

(b) Determine $[I]_\beta^\alpha$

Solución

$$\begin{aligned} [I]_\beta^\alpha &= ([u_1]_\alpha\, [u_2]_\alpha\, [u_2]_\alpha \cdots [u_n]_\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(14) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si $[I]_{c(3)}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ entonces determine la base α

Solución

$$[I]_{c(3)}^\alpha = ([(1,0,0)]_\alpha\, [(0,1,0)]_\alpha\, [(0,0,1)]_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que

$$[(1,0,0)]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (1,0,0) = v_1 + v_2$$

$$[(0,1,0)]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \iff (0,1,0) = v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

$$[(0,0,1)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \iff (0,0,1) = 4v_2 + v_3$$

Por tanto, tenemos un sistema que resuelve el problema.

$$\left.\begin{array}{lcl} v_1+v_2 & = & (1,0,0)\\ v_1+3v_2+4v_3 & = & (0,1,0)\\ 4v_2+v_3 & = & (0,0,1)\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} 2v_2+4v_3 & = & (-1,1,0)\\ 4v_2+v_3 & = & (0,0,1)\end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} 4v_2+8v_3 & = & (-2,2,0)\\ 4v_2+v_3 & = & (0,0,1)\end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow v_3=\left(-\frac{2}{7},\frac{2}{7},-\frac{1}{7}\right)\wedge v_2=\left(\frac{1}{14},-\frac{1}{14},-\frac{4}{14}\right)\wedge$$
$$v_1=\left(\frac{13}{14},\frac{1}{14},-\frac{4}{14}\right)$$

(15) En $\mathbb{R}_2[x]$, considere las bases $\alpha=\{x,x^2+3,2x^2+x\}$ y $\beta=\{x+3,x-2,x^2+1\}$.

(a) Determine $[I]_\alpha^\beta$ y $[I]_\beta^\alpha$

Solución

Etapa 1. Por definición la matriz $[I]_\alpha^\beta$ se construye como: $[I]_\alpha^\beta=([x]_\beta\ [x^2+3]_\beta\ [2x^2+x]_\beta)$

Etapa 2. Luego, una buena estrategia es calcular en general: $[a_0+a_1x+a_2x^2]_\beta$. Así que

$$[a_0+a_1x+a_2x^2]_\beta=\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ b_2\end{pmatrix} \iff a_0+a_1x+a_2x^2=b_0(x+3)+b_1(x-2)+b_2(x^2+1)$$

$$\iff a_0+a_1x+a_2x^2=(3b_0-2b_1+b_2)+(b_0+b_1)x+b_2x^2$$

$$\iff \left.\begin{array}{lcl} 3b_0-2b_1+b_2 & = & a_0\\ b_0+b_1 & = & a_1\\ b_2 & = & a_2\end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} 3b_0-2b_1 & = & a_0-a_2\\ b_0+b_1 & = & a_1\\ b_2 & = & a_2\end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow b_2=a_2;\quad b_0=\frac{a_0+2a_1-a_2}{5};\quad b_1=\frac{3a_1-a_0+a_2}{5}$$

Luego,

$$[a_0+a_1x+a_2x^2]_\beta = \begin{pmatrix} \dfrac{a_0+2a_1-a_2}{5}\\ \dfrac{3a_1-a_0+a_2}{5}\\ a_2\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Etapa 3. Sustituyendo en la fórmula $(*)$, tenemos que:

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & 0 \\ \\ \dfrac{3}{5} & -\dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Análogamente para $[I]_\beta^\alpha$, tenemos el mismo proceso. (o bien recordar que esta es la inversa de $[I]_\alpha^\beta$)

Etapa 1.
Por definición la matriz $[I]_\beta^\alpha$ se construye como: $[I]_\beta^\alpha = ([x+3]_\alpha \; [x-2]_\alpha \; [x^2+1]_\alpha)$

Etapa 2.
Luego, una buena estrategia es calcular en general: $[a_0 + a_1x + a_2x^2]_\alpha$. Así que

$$\begin{aligned} [a_0 + a_1x + a_2x^2]_\alpha = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} & \iff a_0 + a_1x + a_2x^2 = b_0x + b_1(x^2+3) + b_2(2x^2+x) \\ & \iff a_0 + a_1x + a_2x^2 = 3b_1 + (b_0+b_2)x + (b_1+2b_2)x^2 \\ & \iff \left. \begin{array}{lcl} 3b_1 & = & a_0 \\ b_0 + b_2 & = & a_1 \\ b_1 + 2b_2 & = & a_2 \end{array} \right| \\ & \implies b_0 = \frac{6a_1 - 3a_2 - a_0}{6}; \quad b_1 = \frac{a_0}{3}; \quad b_2 = \frac{3a_2 - a_0}{6} \end{aligned}$$

luego,

$$[a_0 + a_1x + a_2x^2]_\alpha \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{6a_1 - 3a_2 + a_0}{6} \\ \\ \dfrac{a_0}{3} \\ \\ \dfrac{3a_2 - a_0}{6} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Etapa 3. Sustituyendo en la fórmula $(**)$, tenemos que:

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \\ 1 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Determine $[1+x+x^2]_\alpha$ y $[1+x+x^2]_\beta$ Solución

Etapa 1. Determinamos $[1+x+x^2]_\alpha$ usando la fórmula $(**)$

$$[1+x+x^2]_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Etapa 2. Determinamos $[1+x+x^2]_\alpha$ usando la fórmula $(*)$.

$$[1+x+x^2]_\beta \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{3}{5} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

(16) Considere las bases $\alpha = \{(1,-2,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ y $\beta = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine $[I]_\alpha^\beta$ e $[I]_\beta^\alpha$

Solución

$$[I]_\alpha^\beta \;=\; ([(1,-2,0)]_\beta\ [(0,1,0)]_\beta\ [(1,0,1)]_\beta) \in \mathbb{M}_\mathbb{R}(3) \qquad (*)$$

Luego, debemos resolver la ecuación, $(x,y,z) = a_1(1,1,1)+a_2(0,1,1)+a_3(0,0,1)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. e.e.

$$\begin{array}{rcl}
(x,y,z) & = & a_1(1,1,1)+a_2(0,1,1)+a_3(0,0,1) \\
 & \Updownarrow & \\
(x,y,z) & = & (a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3) \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_1 & = & x \\ a_1+a_2 & = & y \\ a_1+a_2+a_3 & = & z \end{array}\right| \Longrightarrow a_1 = x \wedge a_2 = y-x \wedge a_3 = z-y \\
 & \Downarrow & \\
[(x,y,z)]_\beta & = & \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix} \qquad (**)
\end{array}$$

Aplicando $(**)$ en $(*)$ tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Análogamente, para

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = ([(1,1,1)]_{\alpha}\ [(0,1,1)]_{\alpha}\ [(0,0,1)]_{\alpha}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \qquad (*)$$

Debemos resolver la ecuación, $(x,y,z) = a_1(1,-2,0)+a_2(0,1,0)+a_3(1,0,1)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Es decir

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a_1(1,-2,0)+a_2(0,1,0)+a_3(1,0,1) \\ &\Updownarrow \\ (x,y,z) &= (a_1+a_3, -2a_1+a_2, a_3) \Longleftrightarrow \begin{array}{lcl|} a_1+a_3 & = & x \\ -2a_1+a_2 & = & y \\ \hline a_3 & = & z \end{array} \Longrightarrow a_1 = x-z \wedge a_2 = y+2x-2z \wedge a_3 = z \\ &\Downarrow \\ [(x,y,z)]_{\alpha} &= \begin{pmatrix} x-z \\ y+2x-2z \\ z \end{pmatrix} \qquad (**) \end{aligned}$$

Aplicando $(**)$ en $(*)$ tenemos que

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Finalmente podemos comprobar la calidad de nuestro trabajo!!!

$$\begin{aligned} [I]_{\alpha}^{\beta}[I]_{\beta}^{\alpha} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(17) Si $P(2) = \{1, x, x^2\}$ y $\alpha = \{1+x+x^2, -2-x+x^2, -1+x+x^2\}$ dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces determine $[I]_{\alpha}^{P(2)}$ e $[I]_{P(2)}^{\alpha}$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar las matrices $[I]_{\alpha}^{P(2)}$ e $[I]_{P(2)}^{\alpha}$

Etapa 2. Por definición la matriz cambio de base es dada por

$$[I]_{\alpha}^{P(2)} = \big([1+x+x^2]_{P(2)}\ [-2-x+x^2]_{P(2)}\ [-1+x+x^2]_{P(2)}\big)$$

Por definición la función coordenada $[\ ]_{P(2)}$ se construye como sigue:

$$\begin{aligned} 1+x+x^2 = 1\cdot 1+1\cdot x+1\cdot x^2 &\iff [1+x+x^2]_{P(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -2-x+x^2 = (-1)\cdot 1+(-1)\cdot x+1\cdot x^2 &\iff [-2-x+x^2]_{P(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -1+x+x^2 = (-1)\cdot 1+1\cdot x+1\cdot x^2 &\iff [-1+x+x^2]_{P(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente sustituyendo los datos encontrados tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{P(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Análogamente, para$[I]_{P(2)}^{\alpha}$ tenemos que

Por definición la matriz cambio de base es dada por

$$[I]_{P(2)}^{\alpha} = \big([1]_{\alpha}\ [x]_{\alpha}\ [x^2]_{\alpha}\big)$$

Por definición la función coordenada $[\ ]_{P(2)}$ se construye como sigue:

$$\begin{aligned} 1+0x+0x^2 &= a_1(1+x+x^2)+a_2(-2-x+x^2)+a_3(-1+x+x^2) \\ &= (a_1-2a_2-a_3)+(a_1-a_2+a_3)x+(a_1+a_2+a_3)x^2 \end{aligned}$$

Así que debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1-2a_2-a_3 &=& 1 \\ a_1-a_2+a_3 &=& 0 \\ a_1+a_2+a_3 &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_2 = 0 \wedge a_1 = \frac{1}{2} \wedge a_3 = -\frac{1}{2}$$

Es decir

$$1 = \frac{1}{2}(1+x+x^2)+0(-2-x+x^2)-\frac{1}{2}(-1+x+x^2)$$

Para las otras coordenadas tenemos cálculos similares:

$$\begin{aligned} 0 + 1 \cdot x + 0x^2 &= a_1(1 + x + x^2) + a_2(-2 - x + x^2) + a_3(-1 + x + x^2) \\ &= (a_1 - 2a_2 - a_3) + (a_1 - a_2 + a_3)x + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 \end{aligned}$$

Así que debemos resolver primeramente el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 - 2a_2 - a_3 &=& 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &=& 1 \\ a_1 + a_2 + a_3 &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_2 = -\frac{1}{2} \wedge a_1 = -\frac{1}{4} \wedge a_3 = \frac{3}{4}$$

Es decir

$$x = -\frac{1}{4}(1 + x + x^2) - \frac{1}{2}(-2 - x + x^2) + \frac{3}{4}(-1 + x + x^2)$$

Y en segundo lugar,

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 - 2a_2 - a_3 &=& 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &=& 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &=& 1 \end{array}\right| \Longrightarrow a_2 = \frac{1}{2} \wedge a_1 = \frac{3}{4} \wedge a_3 = -\frac{1}{4}$$

Es decir

$$x^2 = \frac{3}{4}(1 + x + x^2) + \frac{1}{2}(-2 - x + x^2) - \frac{1}{4}(-1 + x + x^2)$$

Etapa 3. Finalmente sustituyendo los datos encontrados tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{P(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(18) Si α y $\beta = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ son dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz de cambio de la baseα para la base β entonces determine la base α.

Solución

Etapa 1. Supongamos que $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ es la base pedida

Etapa 2. Com la matriz de cambio de base es $[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces por construcción se debe verificar que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ([u_1]_\beta \ [u_2]_\beta \ [u_3]_\beta)$$

Así que

$$\begin{aligned}
[u_1]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff u_1 = 1(1,0,1) + 0(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (2,1,2) \\
[u_2]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff u_2 = -1(1,0,1) - 2(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (4,-1,0) \\
[u_3]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff u_3 = 1(1,0,1) + 1(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (1,2,2)
\end{aligned}$$

Por tanto la base buscada es $\alpha = \{(2,1,2),(4,-1,0),(1,2,2)\}$

(19) Si $\alpha = \{(2,1,2),(4,-1,0),(1,2,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y $u = (1,2,3)$ entonces determine $[u]_\alpha$

Solución

Recordemos que por definición $[u]_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff (1,2,3) = a(2,1,2) + b(4,-1,0) + c(1,2,2)$

entonces

$$[u]_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl|} 2a + 4b + c & = & 1 \\ a - b + 2c & = & 2 \\ 2a + 2c & = & 3 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow a = \frac{3}{2} \ \wedge \ b = -\frac{1}{2} \ \wedge \ c = 0$$

$$\Longrightarrow \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ \\ -\dfrac{1}{2} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

CAPITULO 1

Producto Interno

1. Preliminares

Consideremos un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V entonces automáticamente pensamos en el meollo del Algebra Lineal, es decir que, para cada $v \in V$ existen únicos escalares que representan al vector v, en forma teórica o práctica respecto de esa base. En símbolos

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \Longleftrightarrow [v]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Más aún,

$$\begin{array}{rccc} [\;]_\alpha : & V & \longmapsto & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \\ & v & \longmapsto & [v]_\alpha \end{array}$$

Es una biyección de espacios vectoriales, y además podemos observar los siguientes puntos centrales:

(1) Dada la base y el vector v, la determinación de los escalares a_i, para $(i = 1, 2, \dots, n)$ se realiza a través de un sistema de ecuaciones.

(2) Lamentablemente la resolución del sistema de ecuaciones implica que la búsqueda es secuencial, esto es, para conocer a_i, por ejemplo debo conocer a_{i-1}. ¿Y qué tiene de malo una búsqueda secuencial?. Una respuesta es depende de ¿quién? y ¿qué se ejecuta?.

Por ejemplo

(i) De grano en grano un zorzal se comió una viña, en este caso para el zorzal no hay problema, probablemente se encuentre " feliz ".

(ii) Suponga que desea pedir un préstamo en el Banco U, en esta empresa usted es lo siguiente para su Ejecutivo de Cuentas:

$$Usted = \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix}$$

¿Cuál cree Ud. qué es la casilla favorita del ejecutivo?.
Acertó en pleno, imagina que el tuviese que leer todas las casillas (posiciones) anteriores a los pocos miles para pensar en su préstamo, si así fuese, lo más probable es que se quedará sin comprar su netbook favorito.

(iii) ¿Cómo cree que el ejecutivo accedió a la casilla correcta.?

Probablemente el procedió de la siguiente forma:

- Generó una matriz adecuada, con ceros en la posición que no le interesa, es decir construyó

$$Ejecutivo = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Procedió a multiplicar por cero, como antaño, para eliminar lo indeseable, es decir

$$\begin{aligned}
\langle Ejecutivo, Usted \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \text{fulano de tal} \\ \text{5204401-4} \\ \text{casado} \\ \text{empleado} \\ \vdots \\ \text{pocos miles} \\ \text{morro 2} \\ \text{latino} \end{bmatrix} \\
&= \text{pocos miles}
\end{aligned}$$

- Conclusión: No califica

(3) No obstante el resultado de la gestión, hemos obtenido la siguiente moraleja o enseñanza, la cual modelaremos técnicamente como sigue.

Como $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V entonces dados los vectores u y v de V existen únicos escalares tales que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \iff [v]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

y

$$u = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \iff [u]_\alpha = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

entonces definimos, siguiendo al ejecutivo

$$\langle u, v\rangle_\alpha = \left\langle \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^t \overline{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{a}_i$$

(4) Tenemos por ejemplo:

(a) Si $V = \mathbb{R}^2$ y $\alpha = c(2) = \{(1,0), (0,1)\}$ entonces $[(x,y]_{c(2)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Luego,

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = (x_1 \quad y_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

(b) Si $V = \mathbb{R}^2$ y $\alpha = \{(1,1), (1,-1)\}$ entonces $[(x,y)]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$, Pues;

$$(x, y) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) \iff a_1 = \frac{x+y}{2} \wedge a_2 = \frac{x-y}{2}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_1}{2} \\ \frac{x_1-y_1}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{x_2+y_2}{2} \\ \frac{x_2-y_2}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(x_1x_2 + y_1y_2) \end{aligned}$$

(5) Antes de concluir esta motivación, observamos que a causa de las propiedades del producto de matrices, el producto debe tener las siguientes propiedades:

(a) $\langle u,u\rangle \geq 0$

En efecto

$$\langle u,u\rangle = \langle [u]_\alpha,[u]_\alpha\rangle = [u]_\alpha^t\cdot\bar{[u]}_\alpha = \sum_{i=1}^n u_i\bar{u}_i = \sum_{i=1}^n |u_i|^2 \geq 0$$

(b) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

En efecto

$$\begin{aligned}\langle u+v,w\rangle &= \langle [u+v]_\alpha,[w]_\alpha\rangle = [u+v]_\alpha^t\cdot\bar{[w]}_\alpha = \sum_{i=1}^n (u_i+v_i)\bar{w}_i\\ &= \sum_{i=1}^n (u_i\bar{w}_i+v_i\bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n u_i\bar{w}_i + \sum_{i=1}^n v_i\bar{w}_i = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle\end{aligned}$$

(c) De la misma forma que encima verificamos que $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$

(d) $\langle \lambda\cdot u,w\rangle = \lambda\langle u,w\rangle$

En efecto

$$\langle \lambda\cdot u,w\rangle = [\lambda\cdot u]_\alpha^t\bar{[w]}_\alpha = \lambda[u]_\alpha^t\cdot\bar{[w]}_\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda\cdot u_i\bar{w}_i = \lambda\sum_{i=1}^n u_i\bar{w}_i = \lambda\langle u,w\rangle$$

(e) Análogamente verificamos que $\langle u,\lambda w\rangle = \bar{\lambda}\langle u,w\rangle$

(f) $\langle u,w\rangle = \overline{\langle w,u\rangle}$

En efecto

$$\langle u,w\rangle = [u]_\alpha^t,\bar{[w]}_\alpha = [u]_\alpha^t\cdot\bar{[w]}_\alpha = \sum_{i=1}^n u_i\bar{w}_i = \overline{\sum_{i=1}^n w_i\bar{u}_i} = \overline{\langle w,u\rangle}$$

Todo lo anterior nos motiva a hacer la siguiente definición.

Definición 1.1. *Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. V se dice un espacio con "Producto Interno" ó un espacio "Prehilbertiano" si y sólo si existe una función.*

$$\begin{aligned}\langle,\rangle \;:\; & V\times V \longmapsto \mathbb{K}\\ & (u,v)\longmapsto \langle u,v\rangle\end{aligned}$$

tal que satisface las condiciones:

(1) $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad (\forall v, v \in V) \wedge \langle v, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(2) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(3) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(4) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

(5) $\langle u, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle u, v\rangle$

(6) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

Ejemplo 1.1.1. *En $\mathbb{K}^n$ definimos:*

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j \tag{23}$$

El producto definido en (23) se llama producto interno canónico de $\mathbb{K}^n$, debe observarse que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces (23) se transforma en:

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{24}$$

Ejemplo 1.1.2. *En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ define*

$$\langle A, B\rangle \quad = \quad tr(B^t \cdot A) \tag{25}$$

El producto definido en (25) se llama producto interno canónico de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

Ejemplo 1.1.3. *En $C([a,b]) = \{f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$ define*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \tag{26}$$

El producto definido en (26) se llama producto interno canónico de $C([a,b])$

Ejemplo 1.1.4. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto*

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2) \tag{27}$$

entonces el producto definido en (48) *es un producto interno*

2. Bases Ortogonales y Ortonormales

Aunque nuestro astuto ejecutivo, encontró la forma de determinar la coordenada que a él le interesaba, no obstante hay todavía un pequeño problema.

Para determinar una coordenada hay que ser capaz de tener las coordenadas del vector, es decir primero debe tener un cliente, y más aún debe conocerlo perfectamente !!!

Esto quiere decir que el concepto de base sigue siendo imprescindible, y lo que pretendemos ahora es sólo perfeccionarlo.

Si V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, una $\mathbb{K}$ - base de V entonces para cada $v \in V$ existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \tag{28}$$

Equivalentemente

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \tag{29}$$

Así, lo expresado en (28) ó (29) es simplemente el " Objetivo fundamental " del algebra Lineal, es decir "Para conocer completamente un vector de V basta conocer sus " Coordenadas respecto del Sistema de Información α."

Entonces parece natural que debamos analizar el efecto del producto interno (si es que lo hay) en el proceso de búsqueda de coordenadas. Es inmediato de observar que la ventaja del producto es que, permite implementar la preconcebida máxima " multiplicate por cero " la cual sin duda para bien ó para mal reduce en cualquier caso el problema.

Análisis 2.1. *Sea $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una $\mathbb{R}$ - base de $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ entonces como α es base, para $v \in \mathbb{R}^2$ existen únicos a_1, a_2 en $\mathbb{K}$ tales que*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \tag{30}$$

Como $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ entonces podemos multiplicar (30) por v_1 para obtener;

$$\langle v, v_1\rangle = \langle a_1 v_1 + a_2 v_2, v_1\rangle = a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2\langle v_2, v_1\rangle = a_1\langle v_1, v_1\rangle$$

De donde sigue que, $a_1 = \dfrac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$, observe que $\langle v_1, v_1\rangle > 0$, pues es un vector no nulo.

De una forma absolutamente análoga a la anterior obtenemos que $a_2 = \dfrac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}$

Así que, si $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una $\mathbb{K}$ - base de $\mathbb{R}^2$ tal que$\langle v_1, v_2\rangle = 0$ entonces

$$\boxed{v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2}$$

Análisis 2.1.1. *Intentamos generalizar el análisis anterior. Supongamos que en un $\mathbb{V}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ existe una base $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ entonces como consecuencia del hecho que α es base sigue que,*

$$u \in \mathbb{V} \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

Ahora, como consecuencia de que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ sigue que

$$\begin{aligned} u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad &\Longrightarrow \quad \langle u, v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i, v_j\rangle \\ &\Longrightarrow \quad \langle u, v_j\rangle = a_j \langle v_j, v_j\rangle \\ &\Longrightarrow \quad a_j = \frac{\langle u, v_j\rangle}{\langle v_j, v_j\rangle} \quad (j = 1, 2, \dots n) \end{aligned}$$

Esto es extraordinario, pues en esta condiciones tenemos "casi el máximo de eficiencia," ya que,

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i \quad \Longleftrightarrow \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle u, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \\ \dfrac{\langle u, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle u, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} \end{pmatrix}}$$

Motivados por lo anterior, hacemos la definición formal de este objeto.

Definición 2.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno $\langle , \rangle$ y considera $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ entonces α será llamada una "Base Ortogonal" si*

(1) *α es una base de V*

(2) *Si $j \neq k$ entonces $\langle v_j, v_k\rangle = 0$*

(3) *La coordenada respecto de la base ortogonal α $a_i = \dfrac{\langle u, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$ se llamará el "$i-$ésimo coeficiente de Fourier del vector u."*

Ejemplo 2.2.1. *$c(n)$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$ con el producto interno canónico $\langle , \rangle$ es una base ortogonal, pues*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1: & i = j \\ 0: & i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2. *Sea* $V = \langle\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}\rangle$ *y define en* V *el producto interno:*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt \tag{31}$$

entonces $\alpha = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}$ *es una base ortogonal de* V*, respecto de (31)*
En efecto

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{sen} kt, \cos st\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kt \cos st\,dt \quad k \neq s \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(k+s)t + \operatorname{sen}(k-s)t]\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+s}\cos(k+s)t\,|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k-s}\cos(k-s)t\,|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Usando técnicas de transformación de ángulos análoga a la desarrollada encima obtenemos.

$$\langle \operatorname{sen} kt, \operatorname{sen} st\rangle = 0 \quad \wedge \quad \langle \cos kt, \cos st\rangle = 0 \quad (\textit{para } k \neq s)$$

Observación 2.2.3. *Observamos que la fortaleza de las bases ortogonales, a la hora de determinar las coordenadas de un vector, radica en el hecho que los productos entre elementos distintos es cero entonces cobra relevancia preguntar.*

(1) *¿Qué significa geométricamente el hecho* $\langle v_i, v_k\rangle = 0$*?, para* $i \neq k$*. Para responder a esto, consideremos la figura 3, y a partir de ese modelo, usemos el producto interno usual en* $\mathbb{R}^2$*,*

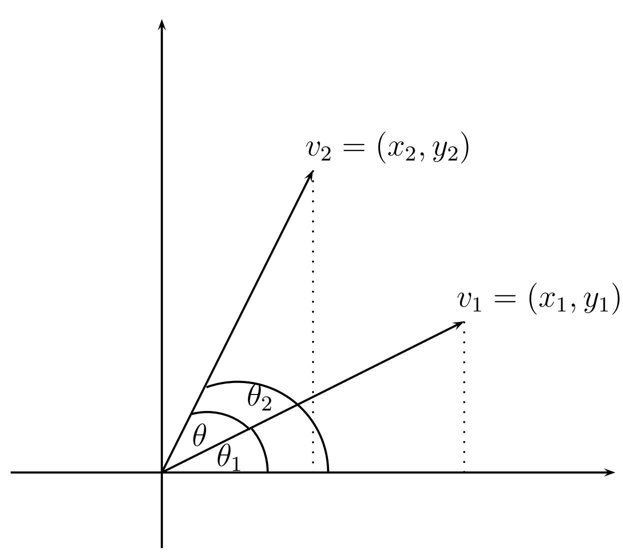


Figura 3

Entonces sucede que

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle = 0 &\iff x_1x_2 + y_1y_2 = 0\\ &\iff l(v_1)\cos\theta_1 l(v_2)\cos\theta_2 + l(v_1)\operatorname{sen}\theta_1 l(v_2)\operatorname{sen}\theta_2 = 0\\ &\iff l(v_1)l(v_2)\cos(\theta_2-\theta_1) = 0\\ &\iff l(v_1)l(v_2)\cos\theta = 0\\ &\iff \theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Así que la conclusión es que en el plano $\mathbb{R}^2$ la condición $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, significa que las rectas generadas por los vectores v_1 y v_2 son perpendiculares.

(2) *Las bases ortonormales (ortogonales), se muestran como insuperables en su trabajo, es decir en la misión de determinar las coordenadas (coeficientes de Fourier) de los elementos del espacio vectorial, salvo por un detalle, ¿existen en abundancia?, y si lo son ¿son fáciles de ubicar?.*

Para responder las preguntas planteadas encima, el análisis anterior nos permite imaginar un modelo genérico para el caso en que una base de $\mathbb{V}$ no cumpla esta propiedad. Es decir si $\alpha = \{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$.

O sea que podemos considerar la siguiente situación geométrica.

Si $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$ entonces de acuerdo a la figura 3, sabemos que v_1 no es perpendicular a v_2, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que los vectores son como en las Figuras de (32).

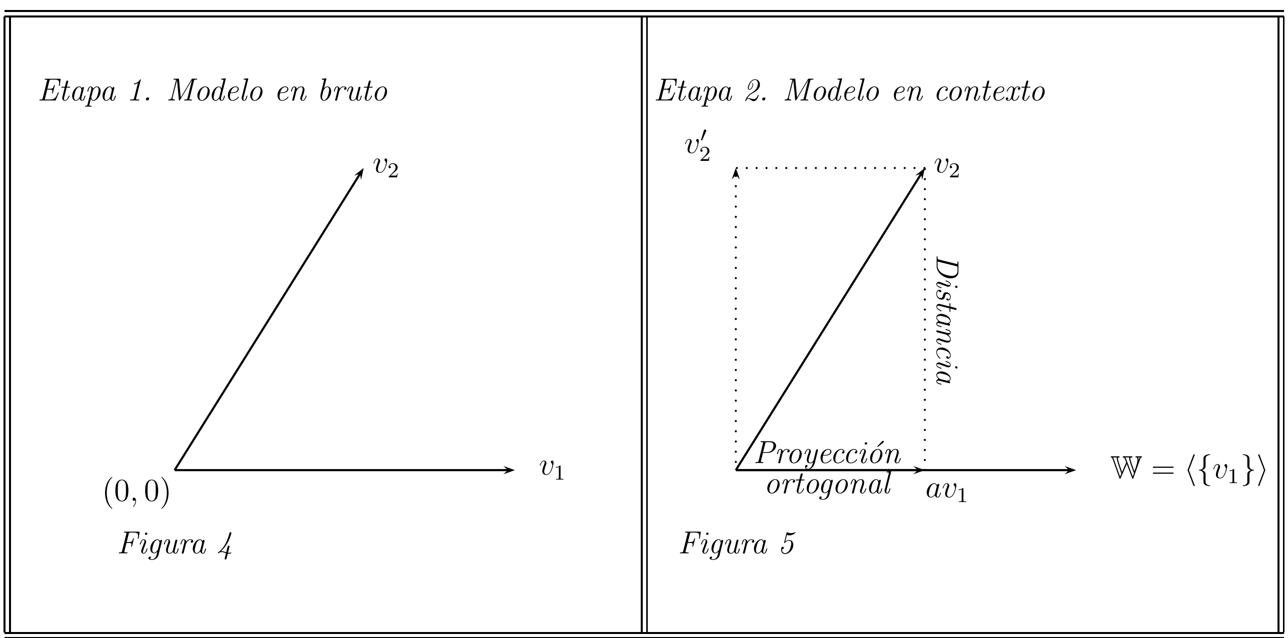


Figura 4 *Figura 5* (32)

Entonces,

$$v_2 = v_2' + av_1 \tag{33}$$

Lamentablemente, (33) es una ecuación que liga tres datos y sólo conocemos uno !!!, pero, no todo está perdido, pues, observen que en virtud de las propiedades del producto interno tenemos.

$$\begin{aligned} v_2 = v_2' + av_1 &\implies \langle v_2, v_1\rangle = \langle v_2', v_1\rangle + \langle av_1, v_1\rangle \\ &\implies \langle v_2, v_1\rangle = a\langle v_1, v_1\rangle \\ &\implies a = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la ecuación (33) obtenemos

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \tag{34}$$

Luego, tenemos lo siguiente:

$$\alpha = \{v_1, v_2\} \text{ base de V } \implies \alpha' = \{v_1, v_2'\} \text{ es una base ortogonal de V}$$

Lo puede ser generalizada en el siguiente.

Teorema 2.3. *(Ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base V entonces $\alpha' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ es una base ortogonal, donde los v_i' satisfacen la siguiente ecuación vectorial.*

$$\begin{cases} v_j' = v_j - \dfrac{\langle v_j, v_{j-1}'\rangle}{\langle v_{j-1}', v_{j-1}'\rangle} v_{j-1}' - \cdots - \dfrac{\langle v_j, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' : \quad (2 \leq j \leq n) \\ v_1' = v_1 \end{cases} \tag{35}$$

En efecto

De (34) sigue que el resultado vale para n=2

Supongamos que v_j' es construido para $(2 \leq j \leq n-1)$ satisfaciendo (35).

Es decir, $\{v_1', v_2', \dots, v_{n-1}'\}$ es un conjunto ortogonal.

Sea $v_n' = v_n - \dfrac{\langle v_n, v_{j-1}'\rangle}{\langle v_{j-1}', v_{j-1}'\rangle} v_{j-1}' - \cdots - \dfrac{\langle v_n, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1'$ *entonces*

$$\begin{aligned} \langle v_n', v_j'\rangle &= \left\langle v_n - \frac{\langle v_n, v_{j-1}'\rangle}{\langle v_{j-1}', v_{j-1}'\rangle} v_{j-1}' - \cdots - \frac{\langle v_n, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1', v_j' \right\rangle \\ &= \langle v_n, v_j'\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, v_{n-i}'\rangle}{\langle v_{n-i}', v_{n-i}'\rangle} \langle v_{n-i}', v_j'\rangle \\ &= \langle v_n, v_j'\rangle - \frac{\langle v_n, v_j'\rangle}{\langle v_j', v_j'\rangle} \langle v_j', v_j'\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lo que demuestra el teorema.

Ejemplo 2.3.1. *Consideremos el subespacio* $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ *entonces usando el producto interno usual de* $\mathbb{R}^4$*, determinemos una base ortogonal para* $\mathbb{W}$.

Etapa 1. Determinamos una base de $\mathbb{W}$

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + y + z + t = 0 \\ &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge t = -x - y - z \\ &\iff u = (x, y, z, -x - y - z);\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ &\iff u = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1);\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}\rangle$$

Y, si notamos $\alpha = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$ *entonces* α *es una base de* $\mathbb{W}$*, pues son claramente linealmente independientes.*

Etapa 2. Ahora, ortogonalizamos, usando el proceso de G. Schmidt descrito en el teorema (2.3).

$$\begin{aligned} v'_1 &= (1, 0, 0, -1) \\ v'_2 &= (0, 1, 0, -1) - \frac{\langle(0, 1, 0, -1), (1, 0, 0, -1)\rangle}{\langle(1, 0, 0, -1), (1, 0, 0, -1)\rangle}(1, 0, 0, -1) \\ &= (0, 1, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}\right) \quad \textit{tomaremos } v'_2 = (-1, 2, 0, -1) \\ v'_3 &= (0, 0, 1, -1) - \frac{\langle(0, 0, 1, -1), (-1, 2, 0, -1)\rangle}{\langle(-1, 2, 0, -1), (-1, 2, 0, -1)\rangle}(-1, 2, 0, -1) - \\ &\quad \frac{\langle(0, 0, 1, -1), (1, 0, 0, -1)\rangle}{\langle(1, 0, 0, -1), (1, 0, 0, -1)\rangle}(1, 0, 0, -1) \\ &= (0, 0, 1, -1) - \frac{1}{6}(-1, 2, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) \\ &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\alpha' = \{(1, 0, 0, -1), (-1, 2, 0, -1), (-1, -1, 3, -1)\} \quad \textit{es una base ortogonal de } \mathbb{W}$$

Observación 2.4. *Sea* $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *una base ortogonal entonces*

(1) *Para cada* $u \in \mathbb{V}$*, la representación única en términos de la base* α.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i$$

Pero, dando una nueva mirada, (interesante preguntarse ¿por qué no lo hicimos antes?), podemos observar en primer lugar el siguiente fenómeno.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} \cdot v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\langle v_i, v_i\rangle} \cdot \langle u, v_i\rangle \cdot v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \cdot \frac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle} \end{aligned}$$

Si llamamos $\beta = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$, donde $v'_i = \dfrac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}$ entonces tenemos el siguiente "mejoramiento técnico en la representación de los vectores."

Teorema 2.5. *Si llamamos $\beta = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$, donde $v'_i = \dfrac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ entonces*

(a) $\langle v'_i, v'_j\rangle = 0$ *si* $i \neq j$

(b) $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \cdot v'_i$

En efecto

Para dilucidar el primer punto, hacemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \langle v'_i, v'_j\rangle &= \left\langle \frac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}, \frac{v_j}{\langle v_j, v_j\rangle} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\langle v_i, v_i\rangle \cdot \overline{\overline{\langle v_i, v_j\rangle}}} \langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \textit{Si } i \neq j \textit{ pues } \alpha \textit{ es base ortogonal} \end{aligned}$$

Del punto anterior sigue que β es una base ortogonal y entonces cada $u \in \mathbb{V}$ se escribe de forma única como

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle \cdot v'_i$$

(2) *Nos queda pendiente dilucidar cuanto vale $\langle v'_i, v'_i\rangle$. En esta dirección si calculamos obtenemos lo siguiente*

$$\begin{aligned} \langle v'_i, v'_i\rangle &= \left\langle \frac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle}, \frac{v_i}{\langle v_i, v_i\rangle} \right\rangle = \frac{1}{\langle v_i, v_i\rangle \cdot \overline{\overline{\langle v_i, v_i\rangle}}} \langle v_i, v_i\rangle \\ &= \frac{1}{\langle v_i, v_i\rangle^2} \langle v_i, v_i\rangle \quad (\textit{Pues } \langle v_i, v_i\rangle \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Motivados por lo anterior, y aprovechando las propiedades del producto interno hacemos la siguiente definición

Definición 2.6. *Llamaremos normativa o norma inducida por el producto interno imperante en el espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *a la función*

$$\|\| : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \textit{tal que } \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Ejemplo 2.6.1. *En* $\mathbb{K}^n$ *tenemos que* $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. *En particular para* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y* $n = 2$ *la norma* $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ *corresponde al módulo del número complejo asociado, o la distancia desde el origen al punto* (x_1, x_2).

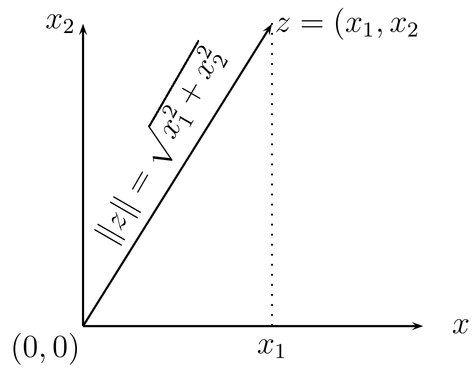


Figura 6

Lema 2.6.2. *Para cada* $u \in \mathbb{V}$ *y* $v \in \mathbb{V}$ *se satisface la relación (conocida como desigualdad de Cauchy-Schwarz)*

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\| \tag{36}$$

En efecto

En primer lugar escribiendo al complejo $\langle u, v\rangle$ *en su forma polar tenemos que,*

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= |\langle u, v\rangle|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = |\langle u, v\rangle| e^{i\alpha} && (37)\\ \langle v, u\rangle &= |\langle u, v\rangle|(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = |\langle u, v\rangle| e^{-i\alpha} && (38)\end{aligned}$$

A seguir, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \langle \lambda u + e^{i\alpha}v, \lambda u + e^{i\alpha}v\rangle \geq 0 &\implies \langle \lambda u, \lambda u\rangle + \langle \lambda u, e^{i\alpha}v\rangle + \langle e^{i\alpha}v, \lambda u\rangle + \langle e^{i\alpha}v, e^{i\alpha}v\rangle \geq 0\\ &\implies \lambda\overline{\lambda}\|u\|^2 + \lambda e^{-i\alpha}\langle u, v\rangle + e^{i\alpha}\overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \|v\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo lo obtenido en (37) *y* (38) *y considerando* $\lambda \in \mathbb{R}$ *en la desigualdad de encima obtenemos:*

$$\begin{aligned} \underbrace{\lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2}_{\textit{ecuación cuadrática en } \lambda} \geq 0 &\iff \underbrace{4|\langle u, v\rangle|^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2}_{\textit{discriminante de la ecuación}} \leq 0\\ &\implies \langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|\end{aligned}$$

Teorema 2.6.3. *Si* $\mathbb{V}$ *es un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial con producto interno* $\langle, \rangle$ *entonces la normativa definida en* **2.6** *satisface las siguientes propiedades*

(1) $\|u\| \geq 0 \quad (\forall u; u \in \mathbb{V})$ *y* $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

(2) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\| \quad (\forall u; u \in \mathbb{V})$ *y* $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{K})$

(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

En efecto

(1) *Por definición* $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, *y* $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle u, u\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

(2) $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} == \sqrt{|\lambda|^2\langle u, u\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle u, u\rangle} = |\lambda|\|u\|$

(3) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \|v\|^2$. *Además*

$$\langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} = 2Re(\langle u, v\rangle) \leq 2\|u\|\|v\| \quad (\textit{ Desigualdad de Cauchy Schwarz})$$

Así que

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Definición 2.7. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno $\langle , \rangle$ y considera $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subset V$ entonces β será llamada una "Base Ortonormal" si*

(1) *β es una base ortogonal de V*

(2) *$\|v_i\| = 1$, es decir $\langle v_i, v_i\rangle = 1$ para $i = 1, 2, \ldots n$*

Equivalentemente

$$\beta \text{ es una base ortonormal} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & : si\ i = j \\ 0 & : si\ i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo 2.7.1. *$\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$ es una base ortogonal respecto del producto interno usual de $\mathbb{R}^2$, pues $\langle (1, 1), (1, -1)\rangle = 1 - 1 = 0$.*

Pero como,

$$\begin{aligned} \|(1, 1\|) &= \langle (1, 1), (1, 1)\rangle = \sqrt{2} \\ \|(1, -1\|) &= \langle (1, -1), (1, -1)\rangle = \sqrt{2} \end{aligned}$$

entonces no es una base ortonormal.

Sin embargo, $\gamma = \left\{ \dfrac{(1, 1)}{\sqrt{2}}, \dfrac{(1, 1)}{\sqrt{2}} \right\}$ *es una base ortonormal.*

Unas consecuencias fabulosas de las bases ortonormales son las siguientes:

Teorema 2.8. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y α y β son dos bases ortonormales entonces*

$$([I]_{\alpha}^{\beta})^{-1} \quad = \quad ([I]_{\alpha}^{\beta})^{t}$$

En efecto

Por una parte, si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son dos bases ortonormales entonces por definición tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} \quad = \quad ([v_1]_{\beta} \quad [v_2]_{\beta} \cdots [v_n]_{\beta}) = \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1\rangle & \langle v_2, w_1\rangle & \cdots & \langle v_n, w_1\rangle \\ \langle v_1, w_2\rangle & \langle v_2, w_2\rangle & \cdots & \langle v_n, w_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle v_1, w_n\rangle & \langle v_2, w_n\rangle & \cdots & \langle v_n, w_n\rangle \end{pmatrix}$$

Por otra parte, y también por definición tenemos que

$$\begin{aligned} [I]_{\beta}^{\alpha} &= ([w_1]_{\alpha} \quad [w_2]_{\alpha} \cdots [w_n]_{\alpha}) \\ &= \begin{pmatrix} \langle w_1, v_1\rangle & \langle w_2, v_1\rangle & \cdots & \langle w_n, v_1\rangle \\ \langle w_1, v_2\rangle & \langle w_2, v_2\rangle & \cdots & \langle w_n, v_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle w_1, v_n\rangle & \langle w_2, v_n\rangle & \cdots & \langle w_n, v_n\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1\rangle & \langle v_1, w_2\rangle & \cdots & \langle v_1, w_n\rangle \\ \langle v_2, w_1\rangle & \langle v_2, w_2\rangle & \cdots & \langle v_2, w_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle v_n, w_1\rangle & \langle v_n, w_2\rangle & \cdots & \langle v_n, w_n\rangle \end{pmatrix} \\ &= ([I]_{\alpha}^{\beta})^{t} \end{aligned}$$

Luego,

$$([I]_{\alpha}^{\beta})^{t} = [I]_{\beta}^{\alpha} = ([I]_{\alpha}^{\beta})^{-1}$$

Teorema 2.9. *Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V entonces el producto interno se " canoniza ", en el siguiente sentido:*

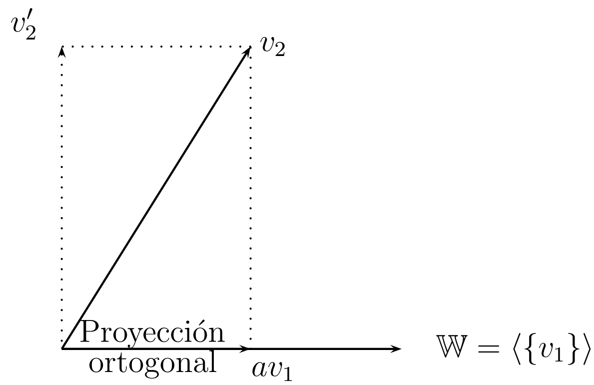
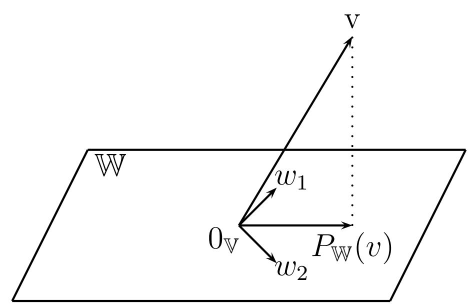
$$\langle v, u\rangle \quad = \quad [v]_{\alpha}^{t} \cdot \overline{[u]}_{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle \overline{\langle u, v_j\rangle}$$

En efecto
Sean $v \in V$ y $u \in V$ entonces

$$\begin{aligned} \langle v, u\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle v_j, \sum_{k=1}^{n} \langle u, v_k\rangle v_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_j\rangle \overline{\langle u, v_k\rangle} \langle v_j, v_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle \overline{\langle u, v_j\rangle} \end{aligned}$$

3. Proyección Ortogonal y Distancia a un Subespacio

Si remiramos el cuadro 32 entonces observamos que hemos resuelto uno de los tres problemas planteados en él, en efecto sólo construimos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt, que esencialmente "consiste en controlar la sombra que un vector proyecta en un subespacio del espacio, es decir un vector anula a otro si su proyección en el es nula."

Etapa 2. Modelo en contexto de ortogonalización	Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal
 Figura 7	 Figura8

(39)

Definición 3.1. *Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ y $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, s_s\}$, una base ortogonal de $\mathbb{W}$ entonces llamaremos Proyección ortogonal a la función $P_{\mathbb{W}}$ definida como sigue:*

$$P_{\mathbb{W}} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W} \quad \textit{tal que } P_{\mathbb{W}}(v) = \sum_{i=1}^{S} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \ w_i \tag{40}$$

Ejemplo 3.1.1. *Si $\mathbb{W} = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual determinemos $P_{\mathbb{W}}$*

(1) *En primer lugar, determinamos una base de $\mathbb{W}$.*

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ x + y - 3z = 0 \\ &\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ y = 3z - x \\ &\iff u = (x, 3z - x, t, z) \\ &\iff u = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 3, 0, 1) + t(0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W} = \langle\{(1, -1, 0, 0), (0, 3, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}\rangle$. Así que $\dim_{\mathbb{R}}(W) \leq 3$, por tanto debemos verificar que $\alpha = \{(1, -1, 0, 0), (0, 3, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ es una base de W, y para ello sólo falta ver que es linealmente independiente. Es decir, debemos mostrar que

$a_1(1,-1,0,0)+a_2(0,3,0,1)+a_3(0,0,1,0)=(0,0,0) \Longrightarrow a_1=a_2=a_3=0$ *entonces*

$$\begin{aligned} a_1(1,-1,0,0)+a_2(0,3,0,1)+a_3(0,0,1,0)=(0,0,0) &\Longrightarrow (a_1, 3a_2-a_1, a_3, a_2)=(0,0,0) \\ &\Longrightarrow a_1=a_2=a_3=0 \end{aligned}$$

Por tanto α es una base de $\mathbb{W}$.

(2) *A seguir verificamos si α es un base ortogonal, respecto del producto interno usual.*

$$\begin{aligned} \langle (1,-1,0,0),(0,0,1,0)\rangle &= 0 \\ \langle (1,-1,0,0),(0,3,0,1)\rangle &= -3 \\ \langle (0,3,0,1),(0,0,1,0)\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Luego, α no es una base ortogonal, así que la ortogonalizamos vía G-S.

$$\begin{aligned} v_1' &= (1,-1,0,0) \\ v_2' &= (0,0,1,0) \\ v_3' &= (0,3,0,1)-\frac{\langle (0,3,0,1),(0,0,1,0)\rangle}{\langle (0,0,1,0),(0,0,1,0)\rangle}(0,0,1,0)-\frac{\langle (0,3,0,1),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0) \\ &= (0,3,0,1)+\frac{3}{2}(1,-1,0,0) \\ &= \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0,1\right) \end{aligned}$$

Así obtenemos la base ortogonal $\alpha'=\{(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(3,3,0,2)\}$.

(3) *Finalmente procedemos a calcular la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre W. Es decir $P_{\mathbb{W}}:\mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{W}$ tal que $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \longmapsto P_{\mathbb{W}}(a,b,c,d)\in\mathbb{W}$*

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}}(a,b,c,d) &= \frac{\langle (a,b,c,d),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0)+\frac{\langle (a,b,c,d),(0,0,1,0)\rangle}{\langle (0,0,1,0),(0,0,1,0)\rangle}(0,0,1,0)+ \\ &\quad \frac{\langle (a,b,c,d),(3,3,0,2)\rangle}{\langle (3,3,0,2),(3,3,0,2)\rangle}(3,3,0,2) \\ &= \left(\frac{a-b}{2}\right)(1,-1,0,0)+c(0,0,1,0)+\left(\frac{3a+3b+2d}{22}\right)(3,3,0,2) \\ &= \left(\frac{a-b}{2}+\frac{9a+9b+6d}{22},\frac{b-a}{2}+\frac{9a+9b+6d}{22},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right) \\ &= \left(\frac{11a-11b+9a+9b+6d}{22},\frac{11b-11a+9a+9b+6d}{22},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right) \\ &= \left(\frac{20a-2b+6d}{22},\frac{20b-2a+6d}{22},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right) \\ &= \left(\frac{10a-b+3d}{11},\frac{10b-a+3d}{11},c,\frac{3a+3b+2d}{11}\right) \end{aligned}$$

Observación 3.2. *Una técnica que nos ha dado buenos dividendos es que cada proceso que hacemos, dentro de lo posible, lo comprobamos a fin de asegurar la calidad y eficiencia del mismo, en este caso aún no tenemos mecanismos de control, pero procedamos a formalizarlos.*

Teorema 3.3. *Sean* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con producto interno,* $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *y* $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, s_s\}$*, una base ortogonal de* $\mathbb{W}$ *entonces*

$$P_{\mathbb{W}}(w) = w \Longleftrightarrow w \in \mathbb{W}$$

En efecto

(1) *En primer lugar,* $w = P_{\mathbb{W}}(w) \Longrightarrow w \in \mathbb{W}$*. Pues,* $Img(\mathbb{W}) \subset \mathbb{W}$

(2) *En segundo lugar,* $w \in \mathbb{W}$ *entonces como* $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$*, una base ortogonal de* $\mathbb{W}$ *sigue que*

$$w = \sum_{i=1}^{s} \frac{\langle w, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}\, w_i = P_{\mathbb{W}}(w)$$

En particular, $P_{\mathbb{W}}$ *es una función sobreyectiva.*

Corolario 3.3.1. *Sean* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con producto interno,* $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *y* $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, s_s\}$*, una base ortogonal de* $\mathbb{W}$ *entonces* $P_{\mathbb{W}} \circ P_{\mathbb{W}} = P_{\mathbb{W}}$*.*
En efecto

$$(P_{\mathbb{W}} \circ P_{\mathbb{W}})(v) = P_{\mathbb{W}}(P_{\mathbb{W}}(v)) = P_{\mathbb{W}}(v). \;\; \textit{Pues } P_{\mathbb{W}}(v) \in \mathbb{W} \quad (\forall v; v \in \mathbb{V}).$$

Por tanto, $P_{\mathbb{W}} \circ P_{\mathbb{W}} = P_{\mathbb{W}}$*.*

Ahora tenemos mecanismos de control para nuestro trabajo, y lo podemos probar en el **Ejemplo 3.1.1**. La proyección ortogonal que obtuvimos fue la siguiente:

$$P_{\mathbb{W}}(a, b, c, d) = \left(\frac{10a - b + 3d}{11}, \frac{10b - a + 3d}{11}, c, \frac{3a + 3b + 2d}{11} \right)$$

Si evaluamos entonces $P_{\mathbb{W}}$ en elementos de $\mathbb{W}$, este debe comportarse como la función identidad, es decir debe devolver el mismo elemento.

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(1, -1, 0, 0) &= \left(\frac{11}{11}, \frac{-11}{11}, 0, \frac{0}{11} \right) = (1, -1, 0, 0) \qquad \checkmark(\text{ OK}) \\
P_{\mathbb{W}}(0, 0, 1, 0) &= \left(\frac{0}{11}, \frac{0}{11}, 1, \frac{0}{11} \right) = (0, 0, 1, 0) \qquad \checkmark(\text{ OK}) \\
P_{\mathbb{W}}(3, 3, 0, 2) &= \left(\frac{33}{11}, \frac{33}{11}, 0, \frac{22}{11} \right) = (3, 3, 0, 2) \qquad \checkmark(\text{ OK})
\end{aligned}$$

Finalmente, Si volvemos a remirar el cuadro (32) entonces observamos que hemos resuelto dos de los tres problemas planteados en él, en efecto, construimos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt, que esencialmente "consiste en controlar la sombra que un vector proyecta en un subespacio del espacio, es decir un vector anula a otro si su proyección en el es nula," y ahora el de la proyección del espacio en uno de sus subespacios, pero aún falta desarrollar la idea de distancia de un vector a un subespacio,en realidad debemos generalizar la idea de distancia entre vectores.
Para ello, reformulemos el cuadro (39)

Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal	Etapa 3. Modelo recontextualizado para proyección ortogonal y distancia

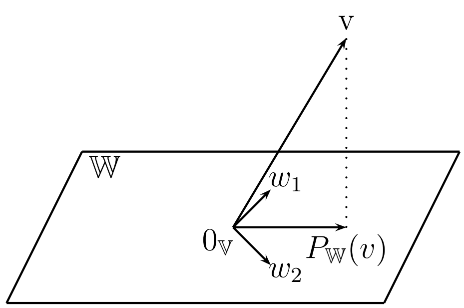
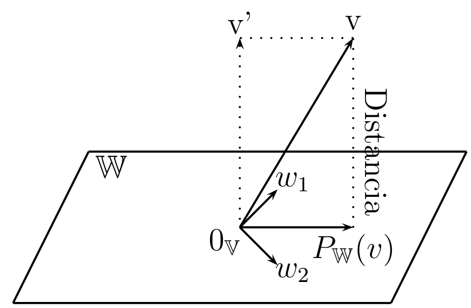

	

Figura9	Figura10

(41)

Entonces usando toda la información tenemos las etapas:

Etapa 1. Del proceso de Gram Schmidt sigue que

$$v = v' + P_{\mathbb{W}}(v) \quad \wedge \quad \langle v', P_{\mathbb{W}} \rangle = 0 \tag{42}$$

Etapa 2. Aplicamos el concepto de norma a la ecuación definida en (42), para iniciar la construcción natural de una distancia.

$$v' = v - P_{\mathbb{W}}(v) \Longrightarrow \|v'\| = \|v - P_{\mathbb{W}}(v)\|$$

Esto motiva hacer la siguiente definición

Definición 3.4. *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ entonces $\|v - P_{\mathbb{W}}(v)\|$ es la distancia del vector v al subespacio $\mathbb{W}$.*

Usaremos la notación: $d(v, \mathbb{W}) = \|v - P_{\mathbb{W}}(v)\|$

Ejemplo 3.4.1. *Si $\mathbb{W} = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual determinemos $d((x, y, z, t), \mathbb{W})$. Conocemos del Ejemplo 3.1.1 $P_{\mathbb{W}}$. Así que*

$$\begin{aligned}
\|(x,y,z,t)-P_{\mathbb{W}}(x,y,z,t)\| &= \left\|(x,y,z,t)-\left(\frac{10x-y+3t}{11},\frac{10y-x+3t}{11},z,\frac{3x+3y+2t}{11}\right)\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{11x-10x+y-3t}{11},\frac{11y-10y+x-3t}{11},0,\frac{11t-3x-3y-2t}{11}\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{x+y-3t}{11},\frac{y+x-3t}{11},0,\frac{9t-3x-3y}{11}\right\| \\
&= \left\|\frac{x+y-3t}{11},\frac{y+x-3t}{11},0,\frac{-3(x+y-3t)}{11}\right\|
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
d((x,y,z,t),W) &= \sqrt{\left(\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2+\left[\frac{y+x-3t}{11}\right]^2+\left[\frac{-3(x+y-3t)}{11}\right]^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2+\left[\frac{y+x-3t}{11}\right]^2+9\left[\frac{(x+y-3t)}{11}\right]^2\right)} \\
&= \sqrt{11\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2}
\end{aligned}$$

Podemos como antes, en base a nuestras propiedades, comprobar nuestro resultado:

$$d((1,-1,0,0),W) = \sqrt{11\left[\frac{1-1-0}{11}\right]^2}=0$$

Observación 3.5. *Con las propiedades obtenidas para la proyección ortogonal, la distancia obtenida hereda naturalmente las siguientes propiedades:*

(1) $d(v,\mathbb{W})\geq 0 \qquad \wedge \qquad d(v,\mathbb{W})=0 \Longleftrightarrow P_{\mathbb{W}}(v)=v$

(2) $P_{\mathbb{W}}(v)=v \Longleftrightarrow v\in\mathbb{W}$

(3) $d(v,\mathbb{W})=0 \Longleftrightarrow v\in\mathbb{W}$

4. Complemento Ortogonal

En esta sección estaremos interesados en emular el genial comportamiento del plano cartesiano, es decir queremos generalizar la idea

$$\mathbb{R}^2=\underbrace{\langle\{(1,0)\}\rangle}_{\text{Eje x}}\oplus\underbrace{\langle\{(0,1)\}\rangle}_{\text{Eje } y}$$

Definición 4.1. *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio con producto interno $\langle,\rangle$, y consideremos $u\in V$ y $v\in V$. u se dirá ortogonal a v si y sólo si $\langle u,v\rangle=0$.*

Una notación adecuada para este contexto es: $u\perp v \Longleftrightarrow \langle u,v\rangle=0$

Lema 4.1.1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio con producto interno $\langle , \rangle$, y $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ entonces*

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0\,(\forall w; w \in \mathbb{W})\}$$

es un subespacio de V.

En efecto

En primer lugar $\langle 0_{\mathbb{V}}, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in W)$. Así que, $0_v \in \mathbb{W}^{\perp}$

En segundo lugar, Si $u \in \mathbb{W}^{\perp} \wedge v \in \mathbb{W}^{\perp}$ entonces

$$\left.\begin{array}{lcl} u \in \mathbb{W}^{\perp} & \Longleftrightarrow & \langle u, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\ v \in \mathbb{W}^{\perp} & \Longleftrightarrow & \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle = 0(\forall w; w \in \mathbb{W})$$

Así que $u + v \in \mathbb{W}^{\perp}$

Finalmente,para $\lambda \in \mathbb{K} \wedge v \in \mathbb{W}^{\perp}: \quad \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = \lambda 0 = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W})$

Luego, $\lambda v \in \mathbb{W}^{\perp}$ y $\mathbb{W}^{\perp}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Definición 4.2. $\mathbb{W}^{\perp}$ *será llamado " Complemento Ortogonal " de $\mathbb{W}$ en $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$.*

Ejemplo 4.2.1. *Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z = 0\}$ y consideremos el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$ entonces*

$$\begin{aligned} w \in \mathbb{W} &\Longleftrightarrow w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x - y + z = 0 \\ &\Longleftrightarrow w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -x - y \\ &\Longleftrightarrow w = (x, y, -x-y) \wedge [x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}] \\ &\Longleftrightarrow w = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \wedge [x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}] \\ &\Longleftrightarrow w \in \langle\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}\rangle \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W} = \langle\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}\rangle$. Así que en consecuencia

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle v, (1, 0, -1)\rangle = 0 \wedge \langle v, (0, 1, -1)\rangle = 0\}$$

Y por tanto

$$\begin{aligned} v \in \mathbb{W}^{\perp} &\Longleftrightarrow v \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle v, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\ &\Longleftrightarrow v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge [\langle (x, y, z), (1, 0, -1)\rangle = 0 \wedge \\ &\qquad \langle (x, y, z), (0, 1, -1)\rangle = 0] \\ &\Longleftrightarrow v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge [x - z = 0 \wedge y - z = 0] \\ &\Longleftrightarrow v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = y = z \\ &\Longleftrightarrow v = (x, x, x) \wedge x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow v = x(1, 1, 1) \wedge x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow v \in \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle \end{aligned}$$

Así, $\mathbb{W}^{\perp} = \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle$

Lema 4.3. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset (\mathbb{V} - \{0_V\})$ entonces*

$$v_i \perp v_j \quad i \neq j \Longrightarrow \alpha \text{ es un conjunto linealmente independiente en } V$$

En efecto

Supongamos que $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0$ *para* $a_j \in \mathbb{K}; (1 \leq j \leq n)$ *entonces como ahora podemos multiplicar por* v_k, *y obtenemos:*

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j, v_k \rangle \quad (1 \leq k \leq n) = a_k \langle v_k, v_k \rangle, \qquad (\text{Pues, } v_i \perp v_j \quad i \neq j)$$

Finalmente, como $v_k \neq 0 \Longrightarrow \langle v_k, v_k \rangle \neq 0$ *Así, que* $a_k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$. *Lo que muestra que* α *es un conjunto linealmente independiente en* V.

Conclusión 4.4. *Antes de plantear algunos ejercicios, saludables para la comprensión de lo expuesto, quisiera concluir esta sección con algunas reflexiones según mi parecer de importancia capital.*

Reflexión 1

El modelamiento en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, es fácil de hacer y de entender. Pues su "arquitectura" consiste apenas de un par de ejes perpendiculares y todas las traslaciones son inducidas justamente de esa forma.

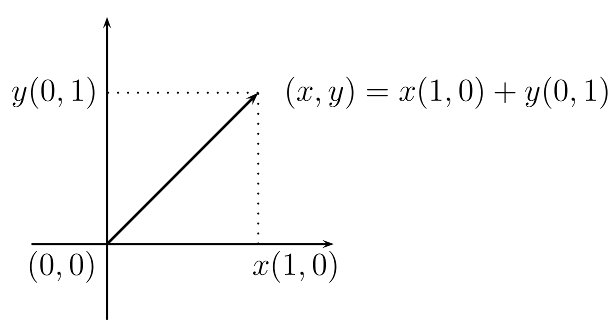


Figura11

En fin, todo el mundo entiende la expresión geométrica expuesta encima y por si fuera poco también la teórica:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \tag{43}$$

Reflexión 2

La simpleza de $\mathbb{R}^2$ radica en la posibilidad de construir la siguiente figura.

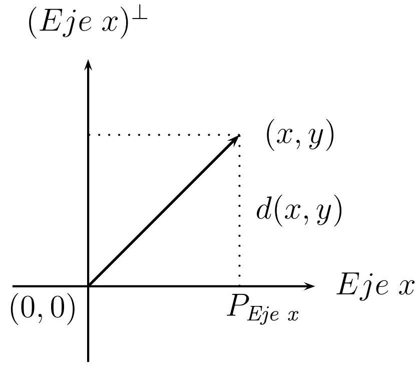


Figura 12

Así que quien simule esa ecuación geométrica es un $\mathbb{R}^2$ *en potencia.*

Reflexión 3

Sea $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial de dimensión* n*. Si* $\mathbb{V}$ *posee un producto interno entonces* $\mathbb{V}$ *"emula" el comportamiento de* $\mathbb{K}^2$

En efecto

El algoritmo de simulación es el siguiente:

Sea $\mathbb{W}$ *un subespacio de* $\mathbb{V}$ *y* $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ *una base ortogonal de* $\mathbb{W}$ *entonces calculamos* $\mathbb{W}^{\perp}$*, como sigue:*

- *Completamos* α *hasta obtener una base de* $\mathbb{V}$*, usando el teorema de completamiento de base o mejor, agregando vectores linealmente independientes a los* w_i *con* $i = 1, \dots, s$ *hasta llegar a la la dimensión* n *de* $\mathbb{V}$*; digamos*

$$\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$$

- *Usando el proceso de Gram Schmidt ortogonalizamos* β *y obtenemos*

$$\alpha' = \{w_1, w_2, \dots, w_s, w_{s+1}^{\perp}, \dots, w_n^{\perp}\} \tag{44}$$

De la propia construcción de α' *en* (44)*,sigue que vale la ecuación*

$$\langle w_i^{\perp}, w_j \rangle = 0 \ si \ \begin{cases} i = s+1, s+2, \dots, n \\ j = 1, 2 \dots, s \end{cases}$$

Así que, para cualquier $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\langle w, w_i \rangle}{||w_i||^2} w_i$ *tenemos que*

$$\langle w_j^{\perp}, w \rangle \ = \ \langle w_j^{\perp}, \sum_{i=1}^{s} \frac{\langle w, w_i \rangle}{||w_i||^2} w_i \rangle = \sum_{i=1}^{s} \frac{\overline{\langle w, w_i \rangle}}{||w_i||^2} \langle w_j^{\perp}, w_i \rangle = 0$$

Luego, $\{w_{s+1}^{\perp}, \dots, w_n^{\perp}\} \subset W^{\perp}$*, así que por construcción*

$$\langle \{w_{s+1}^{\perp}, \dots, w_n^{\perp}\} \rangle = \mathbb{W}^{\perp}$$

Finalmente

$$\mathbb{V} = \mathbb{W} \bigoplus \mathbb{W}^{\perp}$$

En realidad falta mostrar que $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^{\perp} = \{0_V\}$.

Pero eso es claro pues:

$$\begin{aligned} v \in \mathbb{W} \cap \mathbb{W}^{\perp} &\iff v \in \mathbb{W} \wedge v \in \mathbb{W}^{\perp} \\ &\iff v \in \mathbb{W} \wedge \langle v, w \rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\ &\iff v \in \mathbb{W} \wedge \langle v, v \rangle = 0 \\ &\iff v = 0_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

La visión geométrica de la emulación es:

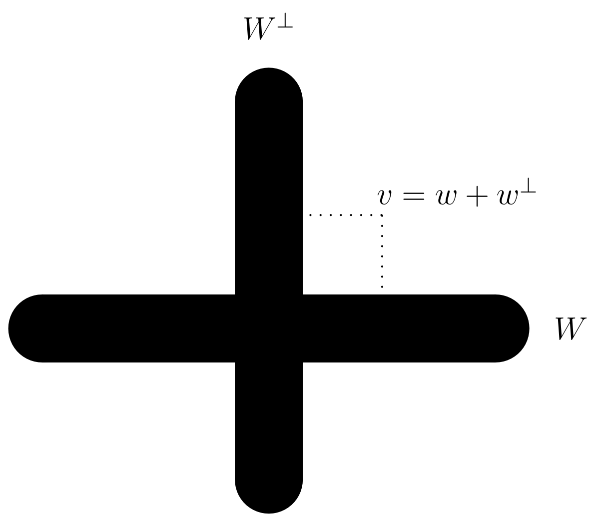


Figura 13: $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$

5. Ejercicios Propuestos Misceláneos de Producto Interno

(1) En $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, define la función:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \tag{45}$$

Demuestre que f es un producto interno.

(2) A partir de la base canónica $c(2) = \{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, determine una base ortogonal $c(2)'$, respecto del producto interno definido en (45)

(3) Si $\alpha = \{(1,2), (2,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ entonces

(a) Demuestre que α es una base de $\mathbb{R}^2$.
(b) A partir de la base α, determine una base ortogonal α', respecto del producto interno usual.
(c) A partir de la base α, determine una base ortogonal α', respecto del producto interno definido en (45)

(4) Determine una base ortogonal, respecto del producto interno usual,para el subespacio.

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

(5) Si $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual

(a) Determine $W^\perp$
(b) Calcule $d((1, 1, 1), W)$
(c) Demuestre que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$

(6) Si $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z - t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual

(a) Determine $W^\perp$
(b) Calcule $d((1, 1, 0, 0), W)$
(c) Demuestre que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$

(7) Si $W = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \wedge 2t + z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual

(a) Determine $W^\perp$
(b) Calcule $d((2, 2, 3, -6), W)$
(c) Demuestre que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$

(8) En el espacio de funciones $C[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$. Define el producto.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx \tag{46}$$

(a) Demuestre que (46), es un producto interno en $C[-\pi, \pi]$
(b) Demuestre que $f(n) = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \operatorname{sen} 3x, \cos 3x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}$ es un conjunto ortogonal en $C[-\pi, \pi]$.
(c) Si $W(n) = \langle\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \operatorname{sen} 3x, \cos 3x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}\rangle$ calcule:

(i) $P_W(f)$ si $f(x) = x\ pi < x < \pi$

(ii) $P_W(f)$ si $f(x) = \begin{cases} 1 & : \text{si } pi < x < 0 \\ -1 & : \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

(iii) $d(f, W)$, si $f(x) = x$

(9) En $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ define el producto.

$$\langle A, B\rangle = tr(B^t \cdot A) \tag{47}$$

(a) Demuestre que (47), es un producto interno en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

(b) Si $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$ entonces determine una base ortogonal de W, respecto del producto definido en (47)
(c) Determine P_W
(d) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces calcule $d(A, W)$

6. Situaciones de Desempeño: Producto Interno

6.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

6.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

6.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

(1) Si $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - 2t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$ entonces

(a) Determine, una base ortogonal respecto del producto usual para el subespacio $\mathbb{W}$
(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n.

(a) Demuestre que $\langle u, v\rangle = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall v, v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$
(b) Demuestre que $\langle u - v, w\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall w, w \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = v$

(3) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, determine $P_{\mathbb{W}}$.

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.
Demuestre que $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge z - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$

(a) Determine $\mathbb{W}^\perp$
(b) ¿ Es $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$?

(6) Considere en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ el producto interno. $\langle A, B\rangle = Tr(B^t A)$, y el subespacio $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{MR}(2) \mid A = A^t\}$. Determine una base ortonormal de $\mathbb{W}$.

(7) Si $(V, \langle , \rangle)$ es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial entonces demuestre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2]$$

(8) Si $\mathbb{W} = \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$ entonces usando el producto interno usual.

(a) Determine $\mathbb{W}^\perp$
(b) Es posible que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

(9) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2) \qquad (*)$$

(a) Sea $\alpha = \{1, 1 - x, 1 - x^2\}$ base de $\mathbb{R}^2[x]$. Determine una base ortogonal respecto del producto interno definido en $(*)$
(b) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 = 0\}$. Determine $\mathbb{W}^\perp$ respecto del producto interno definido en (48)
(c) Es posible que $\mathbb{R}_2[x] = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

(10) Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n, y $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset (\mathbb{V} - \{0_{\mathbb{V}}\})$. Demuestre que

$$\alpha \text{ conjunto ortogonal respecto de } \langle , \rangle \implies \alpha \text{ conjunto linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

(11) En $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios hasta grado 2, considere el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx \qquad (*)$$

(a) Determine una base ortonormal respecto del producto interno definido en $(*)$ a partir de la base canónica $pol(2) = \{1, x, x^2\}$
(b) Si $\mathbb{W} = \langle\{1\}\rangle$ entonces determine $\mathbb{W}^\perp$

(12) Sea $\mathbb{V}, \langle , \rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y sea $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\alpha' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ es una base ortogonal respecto del producto interno $\langle , \rangle$ obtenida de la base α. Demuestre que

$$\alpha \text{ Base ortogonal} \iff \alpha = \alpha'$$

(13) Sea $\mathbb{V}, \langle , \rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\mathbb{W} \le \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\mathbb{W}^\perp = \{0_{\mathbb{V}}\} \iff \mathbb{W} = \mathbb{V}$$

7. Solución de Situaciones de Desempeño: Producto Interno

(1) Si $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - 2t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$ entonces

(a) Determinemos en primer lugar, una base ortogonal respecto del producto usual para el subespacio $\mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x - 2y + z - 2t = 0 \\ &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x = 2y - z + 2t \\ &\iff u = (2y - z + 2t, y, z, t) \\ &\iff u = y(2, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(2, 0, 0, 1) \\ &\iff u \in \langle\{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}\rangle \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{W} = \langle\{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}\rangle$$

Por otra parte, $\alpha = \{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}$ es linealmente independiente, porque

$$\begin{aligned} a_1(2, 1, 0, 0) + a_2(-1, 0, 1, 0) + a_3(2, 0, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^4} &\implies (2a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 0) \\ &\implies a_1 = a_2 = a_3 = 0 \end{aligned}$$

Luego, α es linealmente independiente, y por ende, es una base de $\mathbb{W}$.

Ahora ortogonalizamos α utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned} v_1' &= (2, 1, 0, 0) \\ v_2' &= (-1, 0, 1, 0) - \frac{\langle(-1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0)\rangle}{\langle(2, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)\rangle}(2, 1, 0, 0) \\ &= (-1, 0, 1, 0) - \frac{-2}{5}(2, 1, 0, 0) \\ &= (-1, 0, 1, 0) + \frac{2}{5}(2, 1, 0, 0) \\ &= (\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0) \\ v_3' &= (2, 0, 0, 1) - \frac{\langle(2, 0, 0, 1), (\frac{-2}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0)\rangle}{\langle(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0), (\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0)\rangle}(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0) - \frac{\langle(2, 0, 0, 1), (2, 1, 0, 0)\rangle}{\langle(2, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)\rangle}(2, 1, 0, 0) \\ &= (2, 0, 0, 1) - \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{6}{5}}(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0) - \frac{\langle(2, 0, 0, 1), (2, 1, 0, 0)\rangle}{\langle(2, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)\rangle}(2, 1, 0, 0) \\ &= (2, 0, 0, 1) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0\right) - \frac{4}{5}(2, 1, 0, 0)..... \end{aligned}$$

Luego, $\alpha' = \{v_1', v_2', v_3'\}$, es una base ortogonal

Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

Solución

$$
\begin{aligned}
u \in \mathbb{W}^{\perp} &\iff u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \wedge \langle u,w\rangle = 0 \quad (\forall w; w\in\mathbb{W})\\
&\iff u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \wedge \langle (x,y,z,t),(2,0,0,1)\rangle = 0 \wedge \quad \langle (x,y,z,t),(-1,0,1,0)\rangle = 0 \wedge\\
&\qquad \langle (x,y,z,t),(2,1,0,0)\rangle = 0\\
&\iff u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \wedge 2x+t=0 \wedge \quad z-x=0\wedge 2x+y=0\\
&\iff u=(x,y,z,t)\wedge t=-2x\wedge z=x\wedge y=-2x\\
&\iff u=(x,-2x,x,-2x)\\
&\iff \mathbb{W}^{\perp}=\langle\{(1,-2,1,-2)\}\rangle
\end{aligned}
$$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle,\rangle$ de dimensión n.

(a) Demuestre que $\langle u,v\rangle = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall v, v\in\mathbb{V}) \Longrightarrow u=0_{\mathbb{V}}$

Solución

$$
\begin{aligned}
\langle u,v\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall v, v\in\mathbb{V}) &\Longrightarrow \langle u,u\rangle = 0_{\mathbb{V}}\\
&\Longrightarrow u=0_{\mathbb{V}}
\end{aligned}
$$

(b) Demuestre que $\langle u-v,w\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall w, w\in\mathbb{V}) \Longrightarrow u=v$

Solución

Por el item anterior. $u-v=0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow u=v$

(3) Considere el subespacio $\mathbb{W}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, determine $P_{\mathbb{W}}$.

Solución

Etapa 1. Determinamos una base ortogonal de $\mathbb{W}$

$$
\begin{aligned}
u\in\mathbb{W} &\iff u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\wedge x+y+z+t=0\\
&\iff u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\wedge t=-x-y-z\\
&\iff u=(x,y,z,-x-y-z);\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\
&\iff u=x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,-1);\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\mathbb{W} = \langle\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}\rangle
$$

Si $\alpha=\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ entonces α es una base de $\mathbb{W}$, pues son claramente Linealmente independientes.

Ahora, ortogonalizamos, porque α no es base ortogonal.

$$\begin{aligned}
v_1' &= (1,0,0,-1)\\
v_2' &= (0,1,0,-1)-\frac{\langle(0,1,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle(1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1)\\
&= (0,1,0,-1)-\frac{1}{2}(1,0,0,-1)\\
&= \left(-\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right) \quad \text{tomaremos } v_2'=(-1,2,0,-1)\\
v_3' &= (0,0,1,-1)-\frac{\langle(0,0,1,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}{\langle(-1,2,0,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}(-1,2,0,-1)-\\
&\quad \frac{\langle(0,0,1,-1),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle(1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1)\\
&= (0,0,1,-1)-\frac{1}{6}(-1,2,0,-1)-\frac{1}{2}(1,0,0,-1)\\
&= \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Luego

$$\alpha' = \{(1,0,0,-1),(-1,2,0,-1),(-1,-1,3,-1)\} \quad \text{es una base ortogonal de } \mathbb{W}$$

Ahora definimos la proyección ortogonal

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(x,y,z,t) &= \frac{\langle(x,y,z,t),(1,0,0,-1)\rangle}{\langle(1,0,0,-1),(1,0,0,-1)\rangle}(1,0,0,-1)+\frac{\langle(x,y,z,t),((-1,2,0,-1))\rangle}{\langle(-1,2,0,-1),(-1,2,0,-1)\rangle}(-1,2,0,-1)+\\
&\quad \frac{\langle(x,y,z,t),(-1,-1,3,-1)\rangle}{\langle(-1,-1,3,-1),(-1,-1,3,-1)\rangle}(-1,-1,3,-1)\\
&= \frac{(x-t)}{2}(1,0,0,-1)+\frac{(2y-x-t)}{6}(-1,2,0,-1)+\frac{(3z-x-y-t)}{12}(-1,-1,3,-1)
\end{aligned}$$

Podemos comprobar directamente que

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(1,0,0,-1) &= (1,0,0,-1)\\
P_{\mathbb{W}}(-1,2,0,1) &= (-1,2,0,1)\\
P_{\mathbb{W}}(-1,-1,3,1) &= (-1,-1,3,1)
\end{aligned}$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

Demuestre que $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

Solución

Sabemos que $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$, así que en particular $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$.

Recíprocamente, si $u \in \mathbb{V}$ entonces $P_{\mathbb{W}}(u) = w_0 \in \mathbb{W}$. Por otra parte, como $w_0 \in \mathbb{W}$ entonces $P_{\mathbb{W}}(w_0) = w_0$. Así que juntando la información obtenemos que

$$u \in \mathbb{V} \Longrightarrow P_{\mathbb{W}}(u) = w_0 \in \mathbb{W} \Longrightarrow P_{\mathbb{W}}(u) = P_{\mathbb{W}}(w_0) \Longrightarrow \quad u = w_0 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \mathbb{V} \subset \mathbb{W}$$

Por tanto $\mathbb{V} = \mathbb{W}$.

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge z - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$

(a) Determine $\mathbb{W}^\perp$

Solución

Etapa 1. Determinamos el conjunto $\mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} w \in \mathbb{W} &\iff w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge a - b = 0 \wedge c - 1 = 0 \\ &\iff w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge a = b \wedge c = 1 \\ &\iff w = (a, a, 1);\ a \in \mathbb{R} \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Así que $\mathbb{W} = \{(a, a, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Etapa 2. Ahora, determinamos el subespacio $\mathbb{W}^\perp$.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W}^\perp &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle u, w\rangle = 0 \quad (\forall w; w \in \mathbb{W}) \\ &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle (x, y, z), (b, b, 1)\rangle = 0 \quad (\forall b; b \in \mathbb{R}) \qquad \text{(Usando } (*)) \\ &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge bx + by + z = 0 \\ &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -bx - by \\ &\iff u = (x, y, -bx - by)(\forall b; b \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle (x, y, -bx - by), (a, a, 1)\rangle = 0 \quad (\forall a; a \in \mathbb{R}) &\iff ax + ay - bx - by = 0 \\ &\iff (a - b)(x + y) = 0 \\ &\iff (x + y) = 0 \\ &\iff y = -x \end{aligned}$$

Por tanto

$$u \in \mathbb{W}^\perp \iff u = x(1, -1, 0) \quad x \in \mathbb{R}$$

Así que $\mathbb{W}^\perp = \langle \{(1, -1, 0\}\rangle$

(b) ¿ Es $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$?

Solución

No es posible, pues $\mathbb{W}$ no es un subespacio.

(6) Considere en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ el producto interno. $\langle A, B\rangle = Tr(B^tA)$, y el subespacio $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{MR}(2) \mid A = A^t\}$. Determine una base ortonormal de $\mathbb{W}$.

Solución

Etapa 1. Determinamos una base de $\mathbb{W}$

$$
\begin{aligned}
A \in \mathbb{W} &\iff A \in \mathbb{MR}(2) \ \wedge \ A = A^t \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \wedge \ b = c \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}; (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\
&\iff A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Así que $\mathbb{W} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Ahora, si llamamos $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces α es una base de $\mathbb{W}$.

En efecto

$$
a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = b = d = 0
$$

Así que α, genera y es un conjunto linealmente independiente por tanto es una base.

Etapa 2. Verificamos si α es o no una base ortogonal

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, α es una base ortogonal

Etapa 3. Verificamos si α es una base ortonormal

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Como,

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \Longrightarrow \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2\end{aligned}$$

Como,

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \Longrightarrow \left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como,

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \Longrightarrow \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\| = 1$$

Finalmente, una base ortonormal es:

$$\alpha' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(7) Si $(V, \langle , \rangle)$ es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial entonces demuestre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2]$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2] &= \frac{1}{4}[\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle] \\ &= \frac{1}{4}[\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle - (\langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle)] \\ &= \frac{1}{4}[4\langle u,v\rangle] \\ &= \langle u,v\rangle \end{aligned}$$

(8) Si $\mathbb{W} = \{(1,1,1,1),(1,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ entonces usando el producto interno usual.

(a) Determine $\mathbb{W}^\perp$

Solución

$$
\begin{aligned}
u \in \mathbb{W}^{\perp} &\iff u \in \mathbb{R}^4 \wedge [\langle u, (1,1,1,1)\rangle = 0 \wedge \langle u, (1,0,0,1)\rangle = 0] \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge [\langle (x,y,z,t), (1,1,1,1)\rangle = 0 \wedge \langle (x,y,z,t), (1,0,0,1)\rangle = 0] \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge [x+y+z+t = 0 \wedge x+t = 0] \\
&\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge [z = -y \wedge t = -x] \\
&\iff u = (x,y,-y,-x) \wedge (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
&\iff u = x(1,0,0,-1) + y(0,1,-1,0) \wedge (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
&\iff u \in \langle \{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}\rangle
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\mathbb{W}^{\perp} = \langle \{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}\rangle$$

Como siempre, es necesario aplicar el proceso de control, que aquí significa comprobar nuestro resultado:

$$
\begin{aligned}
\langle (1,1,1,1),(1,0,0,-1)\rangle &= 0 \\
\langle (1,1,1,1),(0,1,-1,0)\rangle &= 0 \\
\langle (1,0,0,1),(1,0,0,-1)\rangle &= 0 \\
\langle (1,0,0,1),(0,1,-1,0)\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

(b) Es posible que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

Solución

No es posible pues $\mathbb{W}$ no es un subespacio, ya que es finito y no nulo.

(9) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2) \qquad (*)$$

(a) Sea $\alpha = \{1, 1-x, 1-x^2\}$ base de $\mathbb{R}^2[x]$. Determine una base ortogonal respecto del producto interno definido en (48)

Solución
En primer lugar verificamos la ortogonalidad de $\alpha = \{1, 1-x, 1-x^2\}$.

$$
\begin{aligned}
\langle 1, 1-x\rangle &= 1\cdot(1-0) + 1\cdot(1-1) + 1\cdot(1-2) = 1+0-1 = 0 \\
\langle 1, 1-x^2\rangle &= 1\cdot(1-0^2) + 1\cdot(1-1^2) + 1\cdot(1-2^2) = 1+0-3 = -2 \\
\langle 1-x, 1-x^2\rangle &= (1-0)\cdot(1-0^2) + (1-1)\cdot(1-1^2) + (1-2)\cdot(1-2^2) = 4
\end{aligned}
$$

Como α no es una base ortogonal entonces aplicamos Gram Schmidt para obtener α' una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$.

Sea entonces

$$\begin{aligned}
v_1' &= 1\\
v_2' &= 1-x\\
v_3' &= (1-x^2) - \frac{\langle (1-x^2),(1-x)\rangle}{\langle (1-x),(1-x)\rangle}\cdot(1-x) - \frac{\langle (1-x^2),1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1\\
&= (1-x^2) - \frac{4}{\langle (1-x),(1-x)\rangle}\cdot(1-x) - \frac{-2}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1\\
&= (1-x^2) - \frac{4}{2}\cdot(1-x) + \frac{2}{3}\cdot 1\\
&= 1-x^2-2+2x+\frac{2}{3}\\
&= -\frac{1}{3}+2x-x^2
\end{aligned}$$

Así que una base α' ortogonal es

$$\alpha' = \left\{1, 1-x, -\frac{1}{3}+2x-x^2\right\}$$

Para concluir, debemos aplicar el mecanismo de control

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1-x\rangle &= 0\\
\left\langle 1, -\frac{1}{3}+2x-x^2\right\rangle &= 1\cdot\left(-\frac{1}{3}+0-0^2\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{3}+2-1^2\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{3}+4-2^2\right)\\
&= -\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\\
&= 0\\
\left\langle (1-x), -\frac{1}{3}+2x-x^2\right\rangle &= 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+0+\frac{1}{3}\\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 = 0\}$. Determine $\mathbb{W}^\perp$ respecto del producto interno definido en (48)

Solución

$$\begin{aligned}
p(x)\in\mathbb{W} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 = 0\\
&\iff p(x) = a_1x + a_2x^2 \wedge (a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \langle x, x^2\rangle$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
q(x)\in\mathbb{W}^{\perp} &\iff q(x)\in\mathbb{R}_2[x]\wedge[\langle q(x),x\rangle=0\wedge\langle q(x),x^2\rangle=0]\\
&\iff q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge \begin{array}{|rcl|}\hline q(0)\cdot 0+q(1)\cdot 1+q(2)\cdot 2&=&0\\ q(0)\cdot 0^2+q(1)\cdot 1^2+q(2)\cdot 2^2&=&0\\\hline\end{array}\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge \begin{array}{|rcl|}\hline q(1)+2q(2)&=&0\\ q(1)+4q(2)&=&0\\\hline\end{array}\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge 2q(2)=0\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge q(2)=q(1)=0\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge b_0+b_1+b_2=0\wedge b_0+2b_1+4b_2=0\\
&\Longrightarrow q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]\wedge b_0=2b_2\wedge b_1=-3b_2\\
&\Longrightarrow q(x)=2b_2-3b_2x+b_2x^2\wedge b_2\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W}^{\perp} \ = \ \langle\{2-3x+x^2\}\rangle$$

Debemos comprobar:

$$\begin{aligned}
\langle 2-3x+x^2,x\rangle &= 0+(2-3+1)\cdot 1+(2-6+4)\cdot 2=0\\
\langle 2-3x+x^2,x^2\rangle &= 0+(2-3+1)\cdot 1^2+(2-6+4)\cdot 4=0
\end{aligned}$$

(c) Es posible que $\mathbb{R}_2[x]=\mathbb{W}\oplus\mathbb{W}^{\perp}$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

Solución

como $\alpha=\{x,x^2,2-3x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces cualquier polinomio $h(x)\in\mathbb{R}_2[x]$ se escribe únicamente como

$$h(x) \ = \ \underbrace{a_0x+a_1x^2}_{\in\mathbb{W}}+\underbrace{a_2(2-3x+x^2)}_{\in\mathbb{W}^{\perp}}$$

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ e. v. de dimensión n con producto interno $\langle,\rangle$, y sea $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subset(\mathbb{V}-\{0_{\mathbb{V}}\})$. Demuestre que

$$\alpha \text{ conjunto ortogonal respecto de } \langle,\rangle \ \Longrightarrow \ \alpha \text{ conjunto linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

Solución: Por demostrar que

$$\sum_{j=1}^{n}a_jv_j=0\Longrightarrow a_j=0 \quad (1\le j\le n)$$

En efecto

Supongamos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_jv_j=0 \quad a_j\in\mathbb{K};(1\le j\le n)$ entonces como ahora podemos multiplicar, lo hacemos e.e.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_k\rangle \quad (1 \leq k \leq n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j, v_k\rangle \quad (1 \leq k \leq n) \\ &= a_k\langle v_k, v_k\rangle \qquad (\text{recordar que } v_i \perp v_j \quad i \neq j) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$v_k \neq 0 \Longrightarrow \langle v_k, v_k\rangle \neq 0$$

Así, que $a_k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$. Lo que muestra que α es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$.

(11) En $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios hasta grado 2, considere el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)\, dx \qquad (*)$$

(a) Determine una base ortonormal respecto del producto interno definido en $(*)$ a partir de la base canónica $pol(2) = \{1, x, x^2\}$

Solución

En primer lugar, verificamos la ortogonalidad de $pol(2)$ respecto del producto definido en $(*)$

$$\begin{aligned} \langle 1, x\rangle &= \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} = 0 \\ \langle 1, x^2\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \\ \langle x, x^2\rangle &= \int_{-1}^{1} x^3\, dx = \frac{x^4}{4}|_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

Luego, $pol(2)$ no es una base ortogonal, así que aplicamos G-S. Sea

$$\begin{aligned} u_1' &= 1 \\ u_2' &= x \\ u_3' &= x^2 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot\ 1 = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}\cdot\ 1 = x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Luego,

$$pol(2)' = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$$

Es una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ pues,

$$\begin{aligned}
\langle 1, x\rangle &= \int_{-1}^{1} x\ dx = \frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} = 0\\
\left\langle 1, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2\ dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0\\
\left\langle x, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle &= \int_{-1}^{1} x^3\ dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x\ dx = 0
\end{aligned}$$

Finalmente, basta dividir por la norma para , obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$

(b) Si $\mathbb{W} = \langle\{1\}\rangle$ entonces determine $\mathbb{W}^\perp$

Solución

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W}^\perp &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \langle p(x), 1\rangle = 0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \langle a_0 + a_1x + a_2x^2, 1\rangle = 0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1x + a_2x^2)\ dx = 0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \left(a_0\int_{-1}^{1} dx + a_1\int_{-1}^{1} x\ dx = 0 + a_2\int_{-1}^{1} x^2\ dx\right) = 0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \left(2a_0 + \frac{2}{3}a_2\right) = 0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_2 = -3a_0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x - 3a_0x^2 \wedge (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2\\
&\iff p(x) = a_0(1 - 3x^2) + a_1x
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W}^\perp = \left\langle\{(1 - 3x^2), x\}\right\rangle$$

(12) Sea $\mathbb{V}, \langle, \rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y sea $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\alpha' = \{u_1', u_2', \dots, u_n'\}$ es una base ortogonal respecto del producto interno $\langle, \rangle$ obtenida de la base α. Demuestre que

$$\alpha \text{ Base ortogonal} \iff \alpha = \alpha'$$

Solución
Si α es una base ortogonal entonces sabemos que:

$$\alpha \text{ Base ortogonal} \iff \langle v_i, v_j\rangle = 0 \text{ si } i \neq j \wedge (1 \leq i \leq n)(1 \leq j \leq n)$$

Además si $v'_1 = v_1$ entonces

$$\begin{aligned} v'_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1\rangle}{\langle v'_1, v'_1\rangle} v'_1 = v_2 - 0\cdot v'_1 = v_2 \\ v'_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = v_3 - 0\cdot v_2 - o\cdot v_1 = v_3 \\ &\vdots \\ v'_n &= v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}\rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1}\rangle} v_{n-1} - \cdots - \frac{\langle v_n, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = v_n \end{aligned}$$

Así que $\alpha = \alpha'$

Reciprocamente, si $\alpha = \alpha'$ y como $^{o}alpha'$ es base ortogonal entonces α es base ortogonal

(13) Sea $\mathbb{V}, \langle , \rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\mathbb{W}^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\} \iff \mathbb{W} = \mathbb{V}$$

Solución

Sabemos que si $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ entonces $\mathbb{V} = W \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Así que si $\mathbb{W}^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\}$ entonces

$$\mathbb{V} = W \oplus \mathbb{W}^{\perp} = W \oplus \{0_{\mathbb{V}}\} = \mathbb{W}$$

Recíprocamente, si $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ entonces

$$\mathbb{V} = W \oplus \mathbb{W}^{\perp} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^{\perp} \Longrightarrow W^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\} = \mathbb{W}$$

Pues, $\langle w, v\rangle = 0 \quad (\forall v; v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow \langle w, w\rangle = 0 \Longrightarrow w = 0_{\mathbb{V}}$

8. Aplicación 1: Método de Aproximación de los Mínimos Cuadrados

8.1. Planteamiento del Problema. Si $y = f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, y conocemos sólo n valores de ella , $f(x_i) = y_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$, entonces
¿ Cómo conseguir, si es posible, una curva que pase por los puntos $P_i = (x_i, y_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$? y que cumpla con las particularidades de la función f, salvo probablemente cometiendo errores controlados.

8.2. Herramientas Básicas 1: Sistemas de Ecuaciones. Si consideramos un sistema lineal de orden $(n \times m)$

$$\begin{array}{ccccccccc|} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \\ \hline \end{array} \tag{48}$$

entonces sabemos que

1. El sistema (48) tiene una notación equivalente usando matrices en la forma $AX = B$, donde

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2. (48) tiene solución si el rango de la matriz de coeficientes A es el mismo de la matriz ampliada $(A|B)$, es decir $\rho(A) = \rho(A|B)$

Ejemplo 8.2.1. *Dado el sistema lineal*

$$\begin{array}{ccccccc|} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

Conforme a lo que hemos expuesto encima:

1. *En notación matricial tenemos que*

$$\begin{array}{ccccccc|} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ \hline \end{array} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. *Calculando el rango de la matriz ampliada* $(A|B)$

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) & (l_1 \leftrightarrow l_2) & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ & (l_2 \leftrightarrow l_2 - 2l_1) & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \\ & (l_2 \rightarrow \frac{1}{3}l_2) & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \\ & (l_1 \rightarrow l_1 + l_2) & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Verificamos que hay solución pues, $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$

3. *Como* $\rho(A) = \rho(A|B) = 2 < 3$ *entonces tenemos infinitas soluciones para el sistema del tipo*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.2.2. *Dado el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right| \tag{49}$$

Procedemos como en el ejemplo (8.2.1) *y,*

1. *En notación matricial tenemos que*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. *Calculando el rango de la matriz ampliada* $(A|B)$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & -2 & | & 3 \end{pmatrix} & (l_1 \leftrightarrow l_2) & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 4 & 2 & -2 & | & 3 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c}(l_2 \leftrightarrow l_2 - 2l_1) \\ (l_3 \leftrightarrow l_3 - 4l_1)\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & -3 & | & -3 \\ 0 & 6 & -6 & | & -5 \end{pmatrix} \\
 & (l_2 \to \frac{1}{3} l_2) & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 6 & -6 & | & -5 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c}(l_1 \to l_1 + l_2) \\ (l_3 \to l_3 - 6l_2)\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c}(l_1 \to l_1 - l_3) \\ (l_2 \to l_2 + l_3)\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

   Verificamos que no hay solución pues, $\rho(A) = 2$ *y* $\rho(A|B) = 3$

3. *Como* $\rho(A) \neq \rho(A|B)$ *entonces no hay solución.*

8.3. Herramientas Básicas 2: Espacios Vectoriales. Hasta ahora el criterio a usar, para que un sistema tenga o no tenga solución es comparar mecánicamente dos números, más específicamente el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada, ambas asociada al sistema lineal dado. Como puede ser rápidamente deducido esta técnica no permite una mayor elucubración teórica, así que debemos intentar traducir este comportamiento a través de las ricas y fructificas propiedades que poseen los espacios vectoriales.
Para ello, observamos que las columnas de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ son elementos del espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$, y en este nuevo contexto el siguiente teorema es una caracterización (una nueva formulación) del Teorema del Rango.

Teorema 8.3.1. (*Caracterización del Teorema del Rango*) *El sistema* (48) *tiene solución si y sólo si B pertenece al espacio generado por las columnas de A.*

En efecto, como

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right| \Longleftrightarrow \quad x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

entonces es claro que,

$$(48)\ \textit{tiene solución} \iff B \in \Omega(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Ejemplo 8.3.2. *El sistema del ejemplo* (8.2.1) *tiene solución, como visto encima, y por ejemplo*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O mejor, para cada $x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1 + x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.3.3. *El sistema* (8.2.2) *no tiene solución, como visto encima, y podemos directamente ver que,*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow 1 = \frac{3}{2} \quad (\Longrightarrow\Longleftarrow)$$

Si consideramos un sistema lineal como el sistema (48) entonces Del teorema (8.3.1), sigue que el sistema (48) no tiene solución si y sólo si $B \notin \Omega(A)$. Por tanto se torna clave el subespacio $\Omega(A)$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$, y entonces direccionemos nuestras ideas hacia este conjunto:

1. En primer lugar, usaremos en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ su producto interno canónico es decir,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

2. Si $P_{\Omega(A)} : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \longmapsto \Omega(A)$ representa la proyección ortogonal de B en el subespacio $\Omega(A)$ entonces

$$P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)$$

y, aplicando nuevamente el teorema (8.3.1) existe $\widehat{X} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times 1)$ tal que

$$A \cdot \widehat{X} \quad = \quad P_{\Omega(A)}(B) \tag{50}$$

3. La distancia $d(B, \Omega(A)) = \|B - P_{\Omega(A)}(B)\| = \sqrt{\langle B - P_{\Omega(A)}(B), B - P_{\Omega(A)}(B)\rangle}$, es la menor posible, es decir. $B - P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)^{\perp}$ por tanto si notamos las columnas de A, de la forma:

$$col_j(A) \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad (1 \leq j \leq m)$$

entonces

$$\left\langle col_j(A), B - P_{\Omega(A)}(B) \right\rangle = 0 \qquad (1 \leq j \leq m)$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad col_j(A)^t \cdot (B - P_{\Omega(A)}(B)) \qquad (1 \leq j \leq m) \\ &= \quad col_j(A)^t \cdot B - col_j(A)^t \cdot P_{\Omega(A)}(B) \qquad (1 \leq j \leq m) \\ &\overset{(50)}{=} \quad col_j(A)^t \cdot B - col_j(A)^t A \cdot \widehat{X} \qquad (1 \leq j \leq m) \end{aligned}$$

Luego,

$$B - P_{\Omega(A)}(B) \in \Omega(A)^{\perp} \iff A^t \cdot B = A^t A \cdot \widehat{X} \tag{51}$$

8.4. Herramienta Central.

Definición 8.4.1. *Dado un sistema lineal de orden $(n \times m)$, tal como el definido en (48) entonces cualquier solución de la ecuación matricial,*

$$A^t A \cdot \widehat{X} = A^t \cdot B \tag{52}$$

será llamada una solución por mínimos cuadrados de (48)

Teorema 8.4.2. *Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$. Si $\rho(A) = m$, (donde $\rho(A)$ es el rango de la matriz A) entonces $A^t \cdot A$ es invertible y el sistema lineal asociado a la matriz A, tiene una única solución por mínimos cuadrados dada por:*

$$\widehat{X} \quad = \quad (A^t \cdot A)^{-1} A^t B$$

En efecto, sabemos por definición que,

$$U \quad \textit{invertible} \iff \ker(U) = \{(0)\} \iff U \cdot X = (0) \Longrightarrow X = (0)$$

entonces usando esta equivalencia obtenemos,

$$\begin{aligned} A^t \cdot A \cdot X = (0) &\Longrightarrow \langle X, A^t \cdot A \cdot X \rangle = 0 \Longrightarrow X^t \cdot A^t \cdot A \cdot X = 0 \Longrightarrow (A \cdot X)^t \cdot A \cdot X = 0 \\ &\Longrightarrow \langle A \cdot X, A \cdot X \rangle = (0) \Longrightarrow A \cdot X = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 \cdot col_1(A) + x_2 \cdot col_2(A) + \cdots + x_n \cdot col_n(A) = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0, \qquad \textit{(las columnas de A son linealmente independientes)} \\ &\Longrightarrow X = (0) \end{aligned}$$

Ejemplo 8.4.3. *Consideremos el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & 5z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -2x & + & 4y & - & 6z & = & 7 \end{array}\right| \tag{53}$$

(1) *El sistema* (53) *se escribe matricialmente como*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B} \tag{54}$$

(2) *Calculamos* $\rho(A)$, *escalonando la matriz* A *por filas:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 + L_1) \\ (L_4 \longrightarrow L_2 + 2L_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 9 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 4 \\ 0 & 12 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(L_4 \longrightarrow L_4 - 2L_3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 9 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, $\rho(A) = 3$ *y* $\rho(A_a) = 4$, *así que por una parte* $\rho(A)$ *es máximo y por otra el sistema* (53) *no tiene solución.*

(3) *De acuerdo al teorema (8.4.2),* $A^t \cdot A$ *es invertible y la ecuación* $A^t \cdot A \cdot X = A^t \cdot B$, *tiene solución única. Así que tenemos alternativa: Escalonar para aplicar el teorema del rango, o bien calcular directamente* $(A^t \cdot A)^{-1}$. *Optaremos por la primera y entonces debemos armar el sistema a resolver.*

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 37 & -51 \\ 8 & -51 & 47 \end{pmatrix}$$

Además,

$$A^t \cdot B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \\ -62 \end{pmatrix}$$

Así que debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 37 & -51 \\ 8 & -51 & 47 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \\ -62 \end{pmatrix} \tag{55}$$

(4) *Finalmente resolvemos el sistema lineal* (55), *escalonando su matriz ampliada correspondiente:*

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 & -8 \\ -4 & 37 & -51 & 44 \\ 8 & -51 & 47 & -62 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.36936168 \\ 0 & 1 & 0 & 1.31037985 \\ 0 & 0 & 1 & 0.11689171 \end{pmatrix}$$

Así que la solución por mínimos cuadrados es:

$$\widehat{X} \;=\; \begin{pmatrix} 0.36936168 \\ 1.31037985 \\ 0.11689171 \end{pmatrix} \tag{56}$$

8.5. Aproximación por una Recta.

Definición 8.5.1. *Consideremos una colección finita de puntos del plano; digamos*

$$\P \;=\; \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\} \tag{57}$$

tal que $a_i \neq a_j$ *para algún* i *y para algún* j, $(1 \leq i \leq n)$ *y* $(1 \leq j \leq n)$ *entonces la recta "que mejor se ajuste "a la colección de puntos* (57), *la llamaremos "recta de mínimos cuadrados ".*

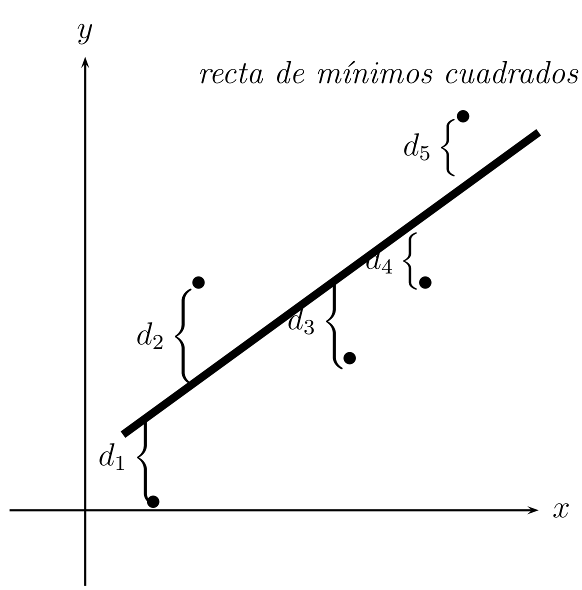


Figura 14: Recta de los Mínimos Cuadrados

Aplicación 8.5.2. *Si suponemos que la ecuación de la recta de mínimos cuadrados es dada por al ecuación:*

$$(RMC) \quad : \qquad y = m_1x + m_0 \tag{58}$$

entonces a partir de (58)*, tenemos las ecuación básica* (EB)

$$(EB) \quad : \qquad b_i = m_1a_i + m_0 + d_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

donde;

$$d_i \neq 0 \iff (a_i, b_i) \notin (RMC) \qquad \text{(De acuerdo a la Figura 14)}$$

Así que, tenemos el sistema de ecuaciones para la recta de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned} b_1 &= m_1a_1 + m_0 + d_1 \\ b_2 &= m_1a_2 + m_0 + d_2 \\ b_3 &= m_1a_3 + m_0 + d_3 \\ &\vdots \\ b_n &= m_1a_n + m_0 + d_n \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ a_3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{D} \tag{59}$$

Finalmente;

(1) *como* $a_i \neq a_j$*, para algún* i *y para algún* j *entonces* $\rho(A) = 2$ *y entonces del teorema (8.4.2), sigue que el sistema* $A \cdot X = B$ *tiene una solución única por mínimos cuadrados, dada por* $\widehat{X} = (A^tA)^{-1}A^tB$

(2) *Como* $D = B - A \cdot X$ *entonces* D*, representa la menor magnitud posible*

Ejemplo 8.5.3. *En la fabricación de un producto químico* $\mathbb{Q}$*, se detecta que la cantidad de un compuesto químico* p*, es controlada por la cantidad del producto químico* c *utilizado en el proceso. Al producir un litro de* $\mathbb{Q}$*, se detectaron las cantidades de* p *y* c*, presente y usada respectivamente, según la tabla:*

c ocupada	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p existente	4.5	5.5	5.7	6.6	7.0	7.7	8.5	8.7	9.5	9.7

(60)

Solución del problema

- *El gráfico de la tabla es de la forma:*

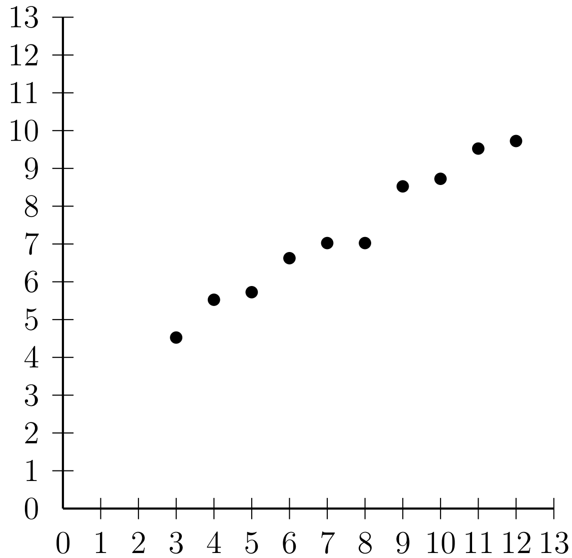


Figura 15

- *El sistema que corresponde en este caso es de la forma:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.5 \\ 5.7 \\ 6.6 \\ 7.0 \\ 7.7 \\ 8.5 \\ 8.7 \\ 9.5 \\ 9.7 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \\ 10 & 1 \\ 11 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}}_{X}$$

- *Como el rango de A es 2 entonces hay solución única. Así que debemos calcular A^tA y A^tB.*

$$A^tA = \begin{pmatrix} 645 & 75 \\ 75 & 10 \end{pmatrix} \qquad A^tB = \begin{pmatrix} 598.6 \\ 73.4 \end{pmatrix}$$

- *Luego la solución del sistema es dada por:*

$$X = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.583 \\ 2.967 \end{pmatrix}$$

- *Por tanto, la recta pedida es de la forma:*

$$p = 0.583c + 2.967$$

y su gráfico es de la forma:

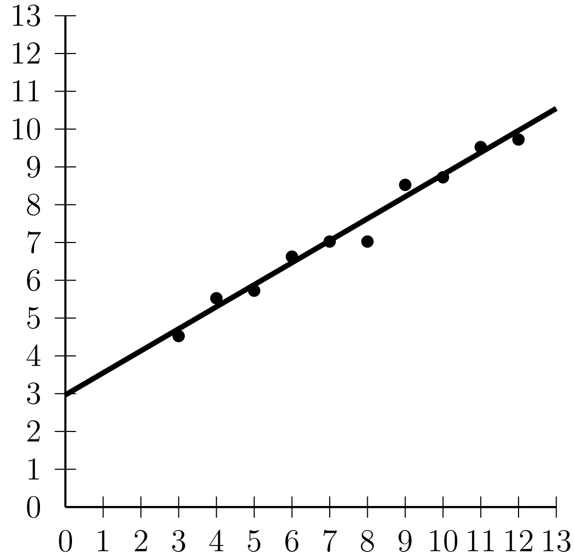


Figura 16

8.6. Aproximación por un Polinomio. Consideremos nuevamente la colección ¶ en (57), es decir

$$¶ \quad = \quad \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$$

Aplicación 8.6.1. *Si suponemos que al menos $m+1$ de los a_i son distintos entonces podemos aproximar al conjunto ¶ por un polinomio de la forma:*

$$PMC \quad : \qquad y = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i \qquad (m \leq n+1)$$

La ecuación básica en este caso es dada por:

$$b_j \quad = \quad \sum_{i=0}^{m} c_i a_j^i + d_j \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{61}$$

y $d_j \neq 0 \Longleftrightarrow (a_j, b_j) \notin (PMC)$, para $0 \leq j \leq n$

A partir de (61)*, podemos construir el sistema de ecuaciones lineales para el polinomio de mínimos cuadrados:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^m \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{D} \tag{62}$$

Como existen al menos $m+1$, a_i distintos entonces $\rho(A) = m+1$ y del sistema (62) *y del teorema (8.4.2), sigue que el sistema asociado $A \cdot X = B$ tiene un solución única de la forma $X = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B$.*

Ejemplo 8.6.2. *Ajustemos la tabla de datos*

x	0	1	2
y	1.1	0.1	-3.1

a través de4 un polinomio cuadrático $q(x) = a + bx + cx^2$

Solución

- *El gráfico de los puntos es el siguiente:*

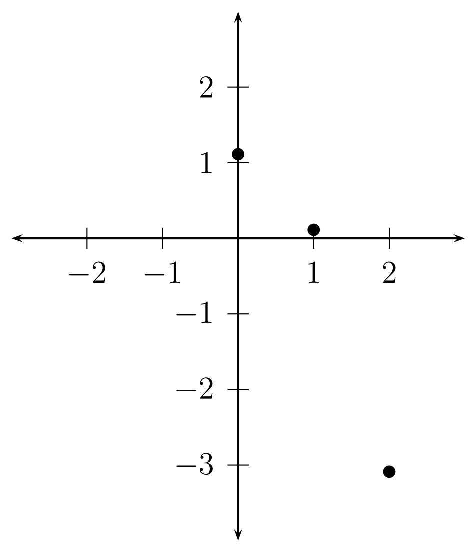


Figura 17

- *El sistema general asociado a la situación según el sistema lineal* (62) *es:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.1 \\ -3.1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{X} \tag{63}$$

- *Así que debemos resolver el sistema $A^t \cdot A \cdot X = A^t \cdot B$, y para ello:*

◦ *Calculamos* $A^t \cdot A$ *y* $A^t \cdot B$

$$\begin{aligned} A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^t \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.1 \\ -3.1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1.9 \\ -6.1 \\ -12.3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◦ *Escalonamos la matriz ampliada* $[A^t \cdot A | A^t \cdot B]$.

$$\begin{aligned} [A^t \cdot A | A^t \cdot B] &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -1.9 \\ 3 & 5 & 9 & -6.1 \\ 5 & 9 & 17 & -12.3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.10001 \\ 0 & 1 & 0 & 0.09999 \\ 0 & 0 & 1 & -1.09999 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, el polinomio de los mínimos cuadrados es:

$$q(x) = 1.10001 + 0.09999x - 1.09999x^2 \tag{64}$$

- *Finalmente, el gráfico de* (64) *es:*

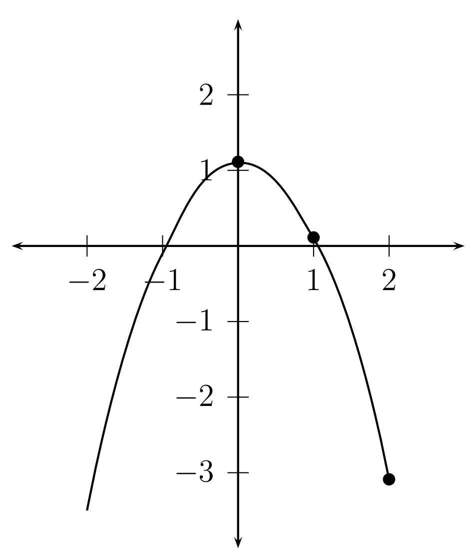


Figura 18

8.7. Aproximación por una función. Consideremos una función $y = f(x)$ continua en $\mathbb{R}$ y supongamos que conocemos sólo n valores de ella , digamos $f(x_i) = y_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$ entonces si queremos resolver el problema planteado al inicio de este Capitulo, debemos considerar las siguientes etapas

Etapa 1. Supongamos que existe un conjunto de funciones $\alpha = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ tal que

- α es linealmente independiente en el espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}$
- $g_i(x_j) \in \mathbb{R}$, para $(i = 1, 2, \dots, n)$

Etapa 2. Sea $W = \langle\{g_1, g_2, \dots, g_n\}\rangle$ el espacio vectorial generado por α.

Etapa 3. Define en W el producto interno:

$$\langle h, s\rangle = \sum_{i=1}^{n} h(x_i)s(x_i) \tag{65}$$

Etapa 4. Partir de (65), definimos la norma usual:

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sqrt{\langle h, h\rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[h(x_i)]^2} \end{aligned}$$

Así que f es aproximable por $g \in W$ si y sólo si la distancia $d(f, g)$, es mínima, esto es equivalente a decir que $(f - g) \in W^{\perp}$.

En particular deben verificarse simultáneamente las ecuaciones:

$$\langle g_i, f - g\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{66}$$

Es decir, que si $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ entonces de (66), sigue que,

$$0 = \langle g_i, f - g\rangle = \langle g_i, f - \sum_{j=1}^{n} c_j g_j\rangle = \langle g_i, f\rangle - \langle g_i, \sum_{j=1}^{n} c_j g_j\rangle = \langle g_i, f\rangle - \sum_{j=1}^{n} c_j \langle g_i, g_j\rangle$$

Etapa 5. Resumiendo

$$\begin{aligned} g \approx f \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle g_i, f\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle g_i, g_j\rangle \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} g_i(x_j)f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n} g_i(x_k)g_j(x_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{67}$$

(67) se conoce como “método de los mínimos cuadrados”

Ejemplo 8.7.1. *Supongamos que* $y = f(x)$ *es una función tal que verifica los valores:*

x	*0*	*1*	*2*
$f(x)$	*1.1*	*0.1*	*-3.1*

y que deseamos aproximar según el método de los mínimos cuadrados por la función $g(x) = c_1 + c_2x^2$ *entonces*

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 1 \\ g_2(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Así que (67) *para este caso, consiste en:*

$$\langle g_1, f\rangle = c_1\langle g_1, g_1\rangle + c_2\langle g_1, g_2\rangle \tag{68}$$
$$\langle g_2, f\rangle = c_1\langle g_2, g_1\rangle + c_2\langle g_2, g_2\rangle \tag{69}$$

Como conocemos los valores de f *y* g_i*, para* $i = 1, 2$ *entonces*

$$\begin{aligned} \langle g_1, f\rangle &= 1\cdot 1.1 + 1\cdot 0.1 + 1\cdot(-3.1) = -1.9 \\ \langle g_1, g_1\rangle &= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3 \\ \langle g_1, g_2\rangle &= 1\cdot 0^1 + 1\cdot 1^2 + 1\cdot 2^2 = 5 \\ \langle g_2, g1\rangle &= 0^2\cdot 1 + 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 1 = 5 \\ \langle g_2, g_2\rangle &= 0^2\cdot 0^2 + 1^2\cdot 1^2 + 2^2\cdot 2^2 = 17 \\ \langle g_2, f\rangle &= 0^2\cdot 1.1 + 1^2\cdot 0.1 + 2^2\cdot(-3.1) = -12.3 \end{aligned}$$

Así que sustituyendo en (68) *y* (69) *tenemos el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 3c_1 & + & 5c_2 & = & -1.9 \\ 5c_1 & + & 17c_2 & = & -12.3 \end{array}\right| \tag{70}$$

De donde $c_1 \approx 1.12$ *y* $c_2 \approx -1.05$ *así que la función que mejor aproxima a la función* f*, según este método es* $g(x) = 1.12 - 1.05x^2$ *y el gráfico de la función* g *es aproximadamente:*

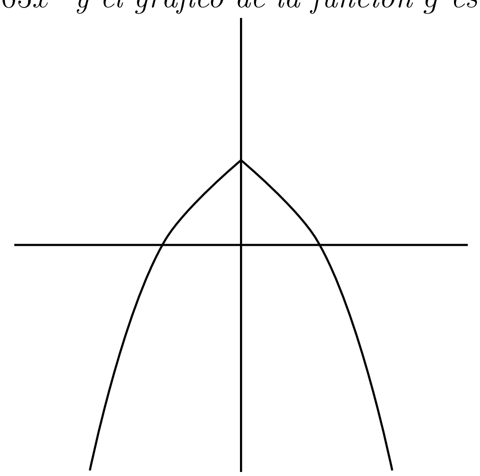


Figura 19

Ejemplo 8.7.2. *Supongamos que la población de una cierta localidad ha variado en el tiempo, según la tabla:*

	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$
año	1950	1960	170	1980
$\underbrace{\textit{población}}_{f(t)}\times 10^4$	1.0	1.5	1.8	2.0

(71)

Supongamos que queremos aproximar los puntos de la tabla por una función del tipo:

$$g(t) \quad = \quad a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

entonces ¿ cúal será la población en el 2000 ?
Según el método de los mínimos cuadrados debemos tener para este caso:

- $g_1(t) = 1$
- $g_2(t) = t$
- $g_3(t) = t^2$

Así que:

$$\begin{aligned}
\langle g_1, f)\rangle &= a_0\langle g_1, g_1)\rangle + a_1\langle g_1, g_2)\rangle + a_2\langle g_1, g_3)\rangle = 6.3\\
\langle g_2, f)\rangle &= a_0\langle g_2, g_1)\rangle + a_1\langle g_2, g_2)\rangle + a_2\langle g_2, g_3)\rangle = 36.3\\
\langle g_3, f)\rangle &= a_0\langle g_3, g_1)\rangle + a_1\langle g_3, g_2)\rangle + a_2\langle g_3, g_3)\rangle = 216.3
\end{aligned}$$

Luego resolviendo el sistema para estos valores tenemos que:

- $a_0 = -2.415$
- $a_1 = 1.155$
- $a_2 = -0.075$

Por tanto la función que aproxima es de la forma:

$$g(t) \quad = \quad -2.415 + 1.155t - 0.075t^2 \tag{72}$$

Así que la población esperada según esta aproximación es dada por:

$$\begin{aligned}
g(9)\times 10^4 &= 1.905 \times 10^4\\
&= 19050
\end{aligned} \tag{73}$$

Ejemplo 8.7.3. *En (8.7.2) tratemos de predecir la población, usando para aproximar una función del tipo $g(t) = a\cdot e^{bt}$. Para aplicar el método de los mínimos cuadrados podemos hacer lo siguiente:*

$$\begin{aligned}
f(t) \approx a\cdot e^{bt} &\iff \ln f(t) \approx \ln a\cdot e^{bt}\\
&\iff \ln f(t) \approx \ln a + \ln e^{bt}\\
&\iff \ln f(t) \approx \ln a + bt\ln e\\
&\iff \ln f(t) \approx \ln a + bt
\end{aligned}$$

Así que en este caso tenemos que:

$$g(t) = \ln a + bt$$

Es claro que también tenemos que modificar la tabla anterior, es decir (71) *se transforma aplicando* ln *en:*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & t=4 & t=5 & t=6 & t=7 \\ \textit{año} & 1950 & 1960 & 170 & 1980 \\ \hline \underbrace{\textit{población}}_{\ln f(t)} \times 10^4 & 0.0 & 0.405 & 0.588 & 0.693 \end{array} \tag{74}$$

Finalmente si llamamos:

- $F(t) = \ln f(t)$
- $c_1 = \ln a$ *y* $g_1(t) = 1$
- $c_2 = b$ *y* $g_2(t) = t$

entonces según la tabla (74) *tenemos que:*

$$\begin{aligned} \langle g_1, F\rangle &= 1.686 \\ \langle g_2, F\rangle &= 10.404 \\ \langle g_1, g_1\rangle &= 4 \\ \langle g_1, g_2\rangle &= 22 \\ \langle g_2, g_1\rangle &= 22 \\ \langle g_2, g_2\rangle &= 126 \end{aligned}$$

Así que obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 4c_1 & + & 22c_2 & = & 1.686 \\ 22c_1 & + & 126c_2 & = & 10.404 \end{array}\right| \tag{75}$$

Resolviendo el sistema (75) *tenemos que:*

$$c_1 \approx 0.226 \implies a = 0.439$$

$$c_2 \approx 0.226 \implies b = 0.226$$

Luego de estos resultados concluimos que:

(1) $g(t) = 0.439e^{0.226t} \Longrightarrow g(9) = 3.356$

(2) *Así que finalmente tenemos en este caso:*

$$\textit{población} \times 10^4 = F(9) \times 10^4 \approx 3.356 \times 10^4 = 33560 \textit{ personas} \tag{76}$$

9. Aplicación 2: Producto Interno y Estadística

Definición 9.1. *Si consideramos un fenómeno o suceso F tal que posee las posibilidades distintas de ocurrir $s_1, s_2, \dots, s_n$ entonces*

(1) *Llamaremos espacio muestral al conjunto*

$$S(F) \quad = \quad \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \tag{77}$$

(2) *Si cada s_i posee una probabilidad de ocurrencia p_i, para $i = 1, 2, \dots, n$ entonces llamamos "***vector de probabilidad***"del suceso F a*

$$p(F) \quad = \quad (p_1, p_2, \dots, p_n) \tag{78}$$

y (78)

(3) *Si además a cada elemento s_i asociamos un valor "x_i", para cada $i = 1, 2, \dots, n$ entonces el vector*

$$x(F) \quad = \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{79}$$

*se llama "***variable aleatoria***", asociada al espacio muestral del suceso F.*

(4) *Llamaremos "valor medio o esperado"de $x(F)$ a:*

$$\bar{x}(F) \quad = \quad p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_nx_n \tag{80}$$

(5) *Llamaremos "varianza"de $x(F)$ a:*

$$v[x(F)] \quad = \quad p_1(x_1 - \bar{x}(F))^2 + p_2(x_2 - \bar{x}(F))^2 + \cdots + p_n(x_n - \bar{x}(F))^2 \tag{81}$$

(6) *Llamaremos "desviación standar"de $x(F)$ a:*

$$d[x(F)] \quad = \quad \sqrt{v[x(F)]} \tag{82}$$

Ejemplo 9.1.1. *Si F representa "el lanzamiento de un peso chileno", entonces*

(1) $S(F) = \{$*cara,sello*$\}$

(2) $p(F) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Ejemplo 9.1.2. *Si F representa "el lanzamiento de dos monedas", entonces*

(1) $S(F) = \{$*(cara,cara),(sello,sello),(cara,sello)*$\}$

(2) $p(F) = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$

Ejemplo 9.1.3. *Si dos personas A y B en* (9.1.1)*, deciden hacer la apuesta:*

- *Si después del lanzamiento de la moneda sale cara A gana \$10*

- *Si después del lanzamiento de la moneda sale sello B gana $10*

entonces

(1) $S(F) = \{cara,sello\}$

(2) $p(F) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(3) $x(F, A) = (10, -10)$, *variable aleatoria del punto de vista de A*

(4) $x(F, A) = (-10, 10)$, *variable aleatoria del punto de vista de B*

Ejemplo 9.1.4. *Si las mismas personas A y B deciden hacer la apuesta en* (9.1.2), *como sigue:*

- *Si salen dos caras A gana $10*
- *Si salen dos sellos A gana $7*
- *Si salen una cara y un sello B gana $7*

entonces la situación es la siguiente:

(1) $S(F) = \{(cara,cara),(sello,sello),(cara,sello)\}$

(2) $p(F) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(3) $x(F, A) = (10, 7, -7)$

(4) $x(F, B) = (-10, -7, 7)$

9.2. Un producto interno "estadístico". Sea $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo entonces define el producto interno:

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle_u = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot x_i \cdot y_i \tag{83}$$

Lema 9.2.1. *Si F es un evento entonces*

(1) $\bar{x}(F) = \langle x(F), (1, 1, \dots, 1) \rangle_{p(F)}$

(2) $v[x(F)] = \langle x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \dots, 1), x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \dots, 1) \rangle_{p(F)}$

(3) $d[x(F)] = \|x(F) - \bar{x}(F)(1, 1, \dots, 1)\|$

En efecto

Para probar [1] *hacemos:*

$$
\begin{aligned}
\langle x(F),(1,1,\dots,1)\rangle_{p(F)} &= \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot x_i\cdot 1\\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot x_i\\
&= \bar{x}(F) \qquad \textit{verificar en } (80)
\end{aligned}
$$

Para probar [2] *hacemos:*

$$
\langle x(F)-\bar{x}(F)(1,1,\dots,1),x(F)-\bar{x}(F)(1,1,\dots,1)\rangle_{p(F)} = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x}(F))^2 \ (\textit{verificar en } 81)
$$

Para probar [3] *hacemos:*

$$
\begin{aligned}
\|x(F)-\bar{x}(F)(1,1,\dots,1)\| &= \|(x_1-\bar{x}(F),x_2-\bar{x}(F)\dots,x_n-\bar{x}(F))\|\\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x}(F))^2}\\
&= \sqrt{v[x(F)]} \quad \textit{verificar en } (82)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9.2.2. *Para el suceso relatado en 9.1.1, tenemos la información:*

- $s(F)=\{$ *cara, sello*$\}$
- $p(F)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$
- $x(F,A)=(10,-10)$, *variable aleatoria del punto de vista de A*
- $x(F,A)=(-10,10)$, *variable aleatoria del punto de vista de B*

Luego,

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(F,A) &= \langle(10,-10),(1,1)\rangle\\
&= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(-10)\cdot 1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(F,B) &= \langle(-10,10),(1,1)\rangle\\
&= \frac{1}{2}\cdot(-10)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} d[x(F,A)] &= \|(10,-10)\| \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}10^2 + \frac{1}{2}(-10)^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d[x(F,B)] &= \|(-10,10)\| \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(-10)^2 + \frac{1}{2}10^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

9.3. Correlación. Sea F un evento n-dimensional, es decir:

- $s(F) = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ es su espacio muestral.
- $p(F) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ es su vector probablidad.

Si suponemos que es posible asociar a dos comportamientos de F, dos variables aleatorias, digamos $x(F,A) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $x(F,B) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ entonces estudiemos las posibles relaciones entre $x(F,A)$ y $x(F,B)$.

(1) Tenemos en primer lugar un valor esperado para cada caso:

- $\bar{x}(F,A) = \sum_{i=1} np_i x_i$
- $\bar{x}(F,B) = \sum_{i=1} np_i y_i$

(2) Podemos construir los vectores asociados:

$$\begin{aligned} x(F,A) - \bar{x}(F,A)(1,1,\dots,1) &= (x_1 - \bar{x}(F,A), x_2 - \bar{x}(F,A), \dots, x_n - \bar{x}(F,A)) \\ x(F,B) - \bar{x}(F,B)(1,1,\dots,1) &= (y_1 - \bar{x}(F,B), y_2 - \bar{x}(F,B), \dots, y_n - \bar{x}(F,B)) \end{aligned}$$

(3) El conjunto

$$C = \{(x_1 - \bar{x}(F,A), \dots, x_n - \bar{x}(F,A)), (y_1 - \bar{x}(F,B), \dots, y_n - \bar{x}(F,B))\} \tag{84}$$

es linealmente independiente o linealmente dependiente , así que tenemos dos casos:

- Caso 1. C es Linealmente dependiente. Luego existe, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

$$x(F,B) = \lambda x(F,A)$$

Es decir, $x(F,A)$ y $x(F,B)$ están relacionados o uno es dependiente. Ahora

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\langle x(F,A), x(F,B)\rangle}{\|x(F,A)\|\|x(F,B)\|} = \frac{\langle x(F,A), \lambda x(F,A)\rangle}{\|x(F,A)\|\|\lambda x(F,A)\|} = \frac{\lambda\langle x(F,A), x(F,A)\rangle}{|\lambda|\|x(F,A)\|\|x(F,A)\|} \\ &= \frac{\lambda\|x(F,A)\|^2}{|\lambda|\|x(F,A)\|\|x(F,A)\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1: & \text{si } \lambda > 0 \\ -1: & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego,

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \text{ó} \\ \pi \end{cases} \tag{85}$$

- Caso 2. C es Linealmente independiente. Luego no existe relación entre $x(F, A)$ y $x(F, B)$

Definición 9.3.1. *Llamaremos "***coeficiente de correlación***" de $x(F, A)$ y $x(F, B)$ a*

$$r(x(F, A), x(F, B)) = \frac{\langle x(F, A), x(F, B)\rangle}{\|x(F, A)\|\|x(F, B)\|} \tag{86}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} r(x(F, A), x(F, B)) &= \frac{\langle x(F, A), x(F, B)\rangle}{\|x(F, A)\|\|x(F, B)\|} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x}(F, A))(y_i - \bar{x}(F, B))}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x}(F, A))^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i(y_i - \bar{x}(F, B))^2\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Ejemplo 9.3.2. *Consideremos un grupo de 10 atletas de los cuales conocemos sus registros de 1 a 10 en dos pruebas; prueba1 y prueba2, según la tabla:*

atleta		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
registro	*prueba 1*	2	8	5	7	7	5	3	1	9	9
	prueba 2	1	9	7	2	7	4	6	3	9	7

Figura 20

Estudiemos la correlación entre el rendimiento de los atletas en ambas pruebas:

(1) *El espacio muestral será:*

$$s(F) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \tag{87}$$

(2) *El vector probabilidad es:*

$$p(F) = \left(\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\dots,\frac{1}{10}\right) \tag{88}$$

(3) *Si notamos prueba i=*p_i*, para* $i = 1,2$ *entonces*

$$x(F,p_1) = (2,8,5,7,7,5,3,1,9,9) \tag{89}$$

$$x(F,p_2) = (1,9,7,2,7,4,6,3,9,7) \tag{90}$$

Ahora, comenzamos a calcular:

- *De* (88) *y* (89)*, tenemos que*

$$\begin{aligned}\bar{x}(F,p_1) &= \frac{1}{10}\cdot 56\\ &= 5.6\end{aligned} \tag{91}$$

- *De* (88) *y* (90)*, tenemos que*

$$\begin{aligned}\bar{x}(F,p_2) &= \frac{1}{10}\cdot 55\\ &= 5.5\end{aligned} \tag{92}$$

- *De* (89) *y* (92)*, tenemos que*

$$x(F,p_1)-\bar{x}(F,p_1)(1,1,\dots,1) = (-3.6,2.4,-0.6,\dots,3.4) \tag{93}$$

- *De* (90) *y* (92)*, tenemos que*

$$x(F,p_2)-\bar{x}(F,p_2)(1,1,\dots,1) = (-4.5,3.5,1.5,\dots,1.5) \tag{94}$$

- *Además, de* (93) *y* (94) *tenemos que*

$$\langle x(F,p_1)-\bar{x}(F,p_1)(1,1,\dots,1), x(F,p_2)-\bar{x}(F,p_2)(1,1,\dots,1)\rangle \approx 4.9 \tag{95}$$

$$\|x(F,p_1)-\bar{x}(F,p_1)(1,1,\dots,1)\| \approx 7.4 \tag{96}$$

$$\|x(F,p_2)-\bar{x}(F,p_2)(1,1,\dots,1)\| \approx 7.2 \tag{97}$$

- *Finalmente de* (95)*,* (96)*,* (97)*, obtenemos que:*

$$r(x(F,p_1),x(F,p_2)) \approx 0.67 \tag{98}$$

10. Aplicación 3: Series de Fourier y Producto Interno

10.1. Conectando lugares inaccesibles. Supongamos que necesitamos conectar dos lugares inaccesibles, como lo muestra la función.

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & : \text{si } -\pi < x < 0 \\ \\ 1 & : \text{si } \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Cuyo gráfico es de la forma:

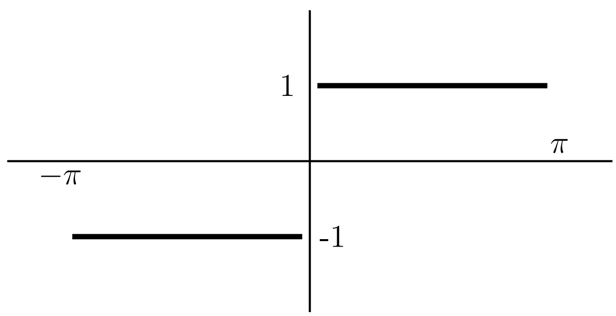
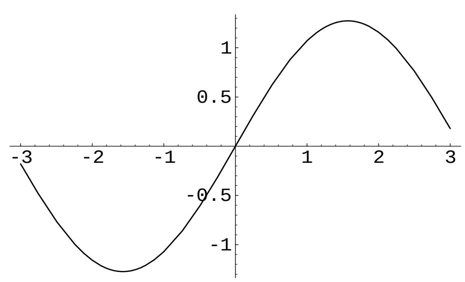


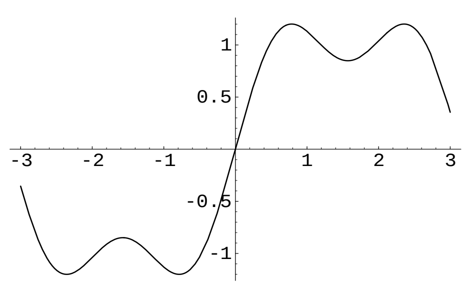
Figura 21 $y = f_1(x)$

La idea es usar como soporte, ideas trigonométricas. para conectar esos lugares inaccesibles:

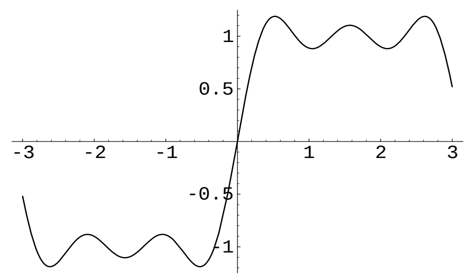
(1) Partamos graficando la función $y = \dfrac{4}{\pi}$ sen x para $(-\pi < x < \pi)$



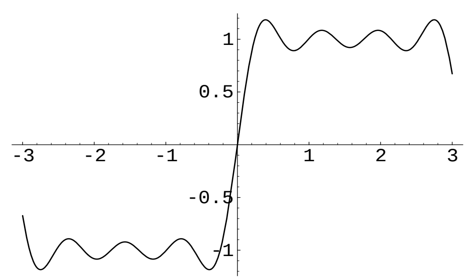
(2) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



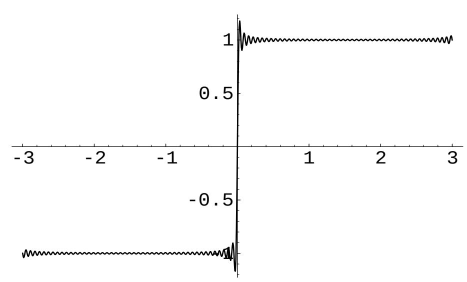
(3) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(4) Graficamos la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5} + \dfrac{\text{sen } 7x}{7}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



(5) En fin, graficamos, la función $y = \dfrac{4}{\pi}\left[\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 5x}{5} + \dfrac{\text{sen } 7x}{7} + \cdots + \dfrac{\text{sen } 99x}{99}\right]$ para $(-\pi < x < \pi)$



Conclusión 10.1.1. *Si llamamos* $g_s=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\dfrac{\operatorname{sen}(2i-1)x}{2i-1}$, *para* $(s\in\mathbb{N})$ *entonces podemos observar lo siguiente:*

(1) *A medida que* s *crece en* $\mathbb{N}$, *el gráfico de* g_s, *más se parece o mejor copia, a la función* f_1

(2) *Sin embargo, debemos tener cuidado con la comparación de las expresiones analíticas de las funciones involucradas; porque por ejemplo:*

(a) $f_1(0)\notin\mathbb{R}$ *y* $g_s(0)=0$

(b) $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ *y* $g_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}$

Sin embargo, observen lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
g_s\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)\frac{\pi}{2}}{2i-1}\\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}\\
&= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{2s-1}\right)
\end{aligned}
$$

Así por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}=1.273\\
g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)=0.848\\
g_3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=1.013\\
g_4\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=0.921\\
g_5\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)=1.063\\
g_6\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)=0.947
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\lim_{s\to\infty} g_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{s\to\infty}\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}=1\Longrightarrow\frac{\pi}{4}=\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}
$$

(3) *Será necesario entonces ser cuidadoso al referirnos al término aproximación de dos funciones, ya sea en su gráfico o en sus valores, con estos cuidados podemos escribir*

$$
f_1(x) \approx \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)x}{2i-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2i-1)x}{2i-1}\quad(-\pi<x<\pi)
$$

10.2. Copiando una función continua. Consideremos ahora una función continua, $f_2(x) = |x|$, para $(-\pi < x < \pi)$, cuyo gráfico es de la forma

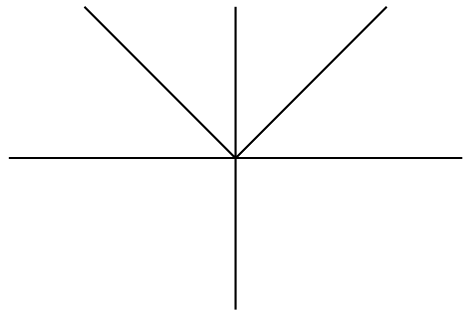
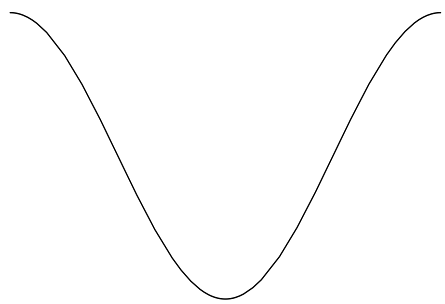


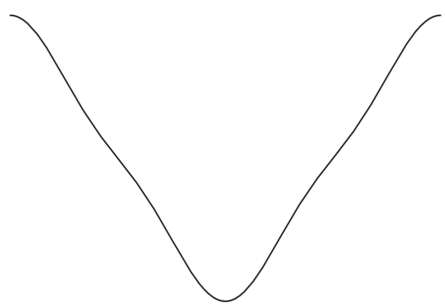
Figura 22 $\quad y = f_2(x)$

Al igual que en el caso anterior, podemos aproximar el gráfico de la función por otras funciones:

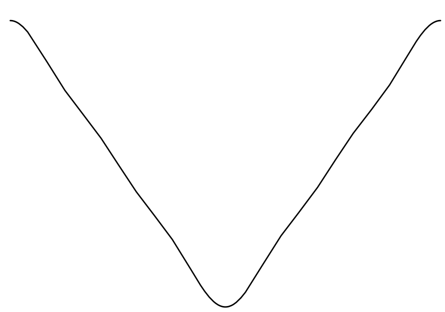
(1) Para $y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos x$



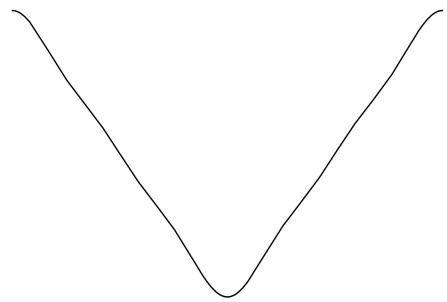
(2) $y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left[\cos x + \dfrac{cos\ 3x}{4}\right]$



(3) $y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left[\cos x + \dfrac{cos\ 3x}{4} + \dfrac{cos\ 5x}{9}\right]$



(4) $y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{cos\ 3x}{4} + \frac{cos\ 5x}{9} + \cdots \frac{cos\ 99x}{50^2}\right]$



Conclusión 10.2.1. *Aquí tenemos también que*

$$|x| \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\lim_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{s}\frac{\cos(2k-1)x}{k^2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

10.3. Formalización inicial y Análisis de la situación.

Definición 10.3.1. *Si notamos $C[-\pi,\pi] = \{f : [-\pi,\pi] \longmapsto \mathbb{R} \mid f$ es una función continua$\}$ al $\mathbb{R}$ espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[-\pi,\pi] \subset \mathbb{R}$ y con valores reales entonces en $C[-\pi,\pi]$ definimos un producto interno como sigue*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

10.3.2. Propiedades y ejemplos de $\langle , \rangle$.

(1) Si $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces $\langle \cos nx, \cos mx\rangle = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$

En efecto

Como, $\langle \cos nx, \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \cos nx\ dx$ entonces para resolver esta integral podemos aplicar las siguientes propiedades:

(a) De la paridad de la función coseno sigue que:
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\ dx = 2\int_{0}^{\pi}\cos mx\cos nx\ dx$$

(b) De las identidades que involucran a la función coseno

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

Y entonces para $n \neq m$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\ dx &= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)\ dx \\
&= \int_0^{\pi} (\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)\ dx \\
&= \left(\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}((m+n)x)+\frac{1}{m-n}\operatorname{sen}((m-n)x)\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \left(\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}((m+n)\pi)+\frac{1}{m-n}\operatorname{sen}((m-n)\pi)\right)- \\
&\quad \left(\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}((m+n)0)+\frac{1}{m-n}\operatorname{sen}((m-n)0)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora, para $n = m$

$$\begin{aligned}
\langle \cos nx, \cos nx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\ dx = 2\int_0^{\pi}\cos^2 nx\ dx = 2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\ dx \\
&= \int_0^{\pi}(1+\cos 2nx)\ dx = \left(x+\frac{1}{2n}\operatorname{sen} nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi
\end{aligned}$$

(2) Si $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces $\langle \operatorname{sen} nx, \operatorname{sen} mx\rangle = \begin{cases}\pi & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m\end{cases}$

En efecto

Como, $\langle \operatorname{sen} nx, \operatorname{sen} mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\ dx$ entonces para resolver esta integral podemos aplicar las siguientes propiedades:

(a) De la imparidad de la función seno sigue que $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx$ es una función par, así que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\ dx = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\ dx$$

(b) De las identidades que involucran a la función coseno

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

Y entonces para $n \neq m$ tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \; dx \quad = \quad 2\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x) \; dx = 0$$

Ahora para $n = m$

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{sen} nx, \operatorname{sen} nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx \; dx = \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx \; dx = 2\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} \; dx \\ &= \int_{0}^{\pi} (1-\cos 2nx) \; dx = \pi \end{aligned}$$

(3) Si $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces $\langle \operatorname{sen} mx, \cos nx \rangle = 0$ para $(n \in \mathbb{N})$ y $(m \in \mathbb{N})$

En efecto
De la imparidad de la función seno y de la paridad de la función coseno sigue que $\operatorname{sen} mx \cos nx$ es una función impar, así que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \; dx \quad = \quad 0$$

(4) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces

- $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$
- $\langle 1, \operatorname{sen} nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \; dx = 0$
- $\langle 1, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \; dx = 0$

Teorema 10.3.3. *El conjunto* $Trigonom_n[x] = \{1, \cos x, \cos 2x. \dots, \cos nx\} \cup \{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x. \dots, \operatorname{sen} nx\}$ *es linealmente independiente* $(\forall n; n \in \mathbb{N})$*, y una base para el subespacio generado por* $Trigonom_n[x]$*, se decir, para* $\langle Trigonom_n[x] \rangle$*.*

En efecto

Si suponemos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx = 0$ *entonces para* $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx\right], \cos sx \right\rangle &= \langle 0, \cos sx\rangle \Longrightarrow \\
\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx\right] \cos sx \; dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 0 \; dx \Longrightarrow \\
\sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos sx \; dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos sx \; dx &= 0 \Longrightarrow \\
\sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos sx \; dx &= 0 \Longrightarrow \\
a_s \pi &= 0 \Longrightarrow \\
a_s &= 0
\end{aligned}$$

De forma análoga, para $s \geq 1$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx\right], \cos sx \right\rangle &= \langle 0, \operatorname{sen} sx\rangle \Longrightarrow \\
\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx\right] \operatorname{sen} sx \; dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 0 \; dx \Longrightarrow \\
\sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \operatorname{sen} sx \; dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} sx \; dx &= 0 \Longrightarrow \\
\sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} sx \; dx &= 0 \Longrightarrow \\
b_s \pi &= 0 \Longrightarrow \\
b_s &= 0
\end{aligned}$$

Observación 10.3.4. *Supongamos que* $f \in \langle Trigonom_n[x]\rangle$ *entonces*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

aplicando, primeramente $\cos sx$*, obtenemos,*

$$
\begin{aligned}
\langle f(x), \cos sx\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx, \cos sx \right\rangle \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx \; dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx \; dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos\, sx \cos kx \, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} cos\, sx \cos kx \, dx \\
&= a_s \int_{-\pi}^{\pi} cos\, sx \cos sx \, dx \\
&= a_s \pi \qquad (s \geq 1)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
a_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos sx \; dx \quad (s \geq 1)
$$

Y para $s = 0$

$$
\langle f(x), 1\rangle = a_0 \, 2\pi \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \; dx
$$

Análogamente, aplicando $\operatorname{sen} sx$*, obtenemos para los coeficientes* b_s

$$
b_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} sx \; dx
$$

Definición 10.3.5. *Si* $f \in \langle Trigonom_n[x]\rangle \leq C[-\pi, \pi]$ *entonces llamaremos Serie de Fourier de* f *a:*

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})
$$

Y, a_s *y* b_s*, serán llamados los coeficientes de Fourier de* f *y son obtenidos a través de las fórmulas.*

$$
\begin{aligned}
a_s &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos sx \; dx \quad (s \geq 0) \\
b_s &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} sx \; dx
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10.3.6. *Sea $f(x) = x$ entonces calculemos la serie de Fourier de $f(x) = x$ $(\forall n; n \in \mathbb{N})$, (si es posible), es decir;*

$$x \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

Para determinar la Serie debemos calcular los coeficientes de Fourier, a_k y b_k, pero antes de hacerlo será conveniente prestar atención a lo siguiente,

(1) *$f(-x) = -x = -f(x)$, así que f es una función impar entonces $x \cos ks$ es una función impar, $(\forall k; k \geq 0)$. Por tanto*

$$a_k \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \; dx = 0 \quad (\forall k; k \geq 0)$$

(2) *Razonando de la misma forma que encima, $x \operatorname{sen} kx$ es función par y entonces*

$$b_k \;=\; \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} kx \; dx \qquad (k \geq 1)$$

Ahora integrando por partes tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} u = x & : & dv = \operatorname{sen}(kx)dx \\ du = dx & : & v = -\dfrac{1}{k}\cos(kx) \end{array}\right\} \Longrightarrow b_k = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\;\cos(kx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} cos(kx)\;dx\right]$$

Luego,

$$b_k = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\cos(k\pi)\right] = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Así que, la serie es de la forma:

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)$$

(3) *Respecto de la situación geométrica, podemos observar que:*

(a) *El gráfico de $y = x$ es del tipo*

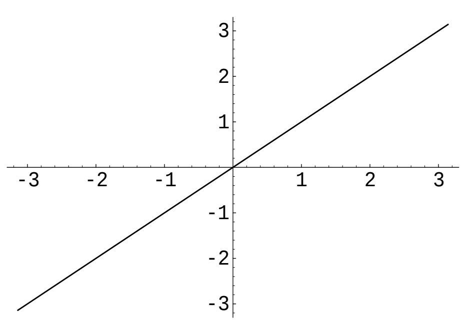


Figura 23 $\quad y = x$

(b) *Si $k = 1$ entonces para la serie tenemos que su gráfico es del tipo:*

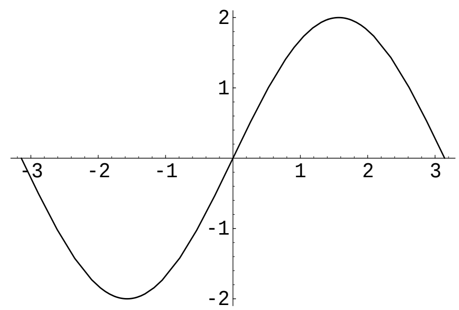


Figura 24 $\quad y = 2\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)$

(c) *Para $k = 2$ tenemos*

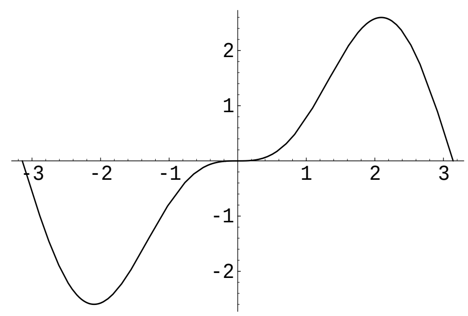


Figura 25 $\quad y = 2\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)$

5

(d) *Para $k = 50$ sucede que*

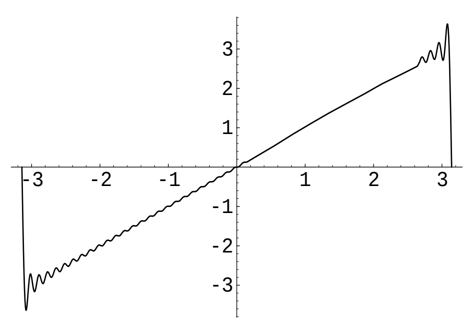


Figura 26 $\quad y = 2\sum_{k=1}^{50} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)$

10.4. Ejercicios Propuestos. Desarrolle en Serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$ las siguientes funciones:

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(3) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

(4) $f(x) = \begin{cases} 0 & : \text{ si } -\pi < x \leq 0 \\ x & ; \text{ si } \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Además demuestre que: $\dfrac{\pi^2}{8} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Indice Alfabético

Contenidos