Rudimentos 10: Algebra del Cuerpo de Números Complejos
Profesor Ricardo Santander

1. Construcción intuitiva del Cuerpo de Números Complejos

Lo desarrollado entorno al homomorfismo evaluación en el capitulo anterior, nos permite dar una nueva mirada el concepto de "raíz de un polinomio" en el siguiente sentido:

Si $r \in \mathbb{R}$, r se llamará una raíz o cero de un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ si $p(x) \in \ker(\varphi(r))$ o equivalentemente $p(r) = 0$

(1) Aplicando esta idea al polinomio $q(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ tenemos para $r \in \mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned} q(x) \in \ker(\varphi(r)) &\iff \varphi(r)(q(x)) = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0 \\ &\iff r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{R} \\ &\iff b^2 - 4ac \geq 0 \end{aligned}$$

(2) Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces $q(x) = ax^2 + bx + c \notin \ker(\varphi(r)) \quad (\forall r; r \in \mathbb{R})$ y entonces los posibles gráficos para la función $q(x)$ son las siguientes:

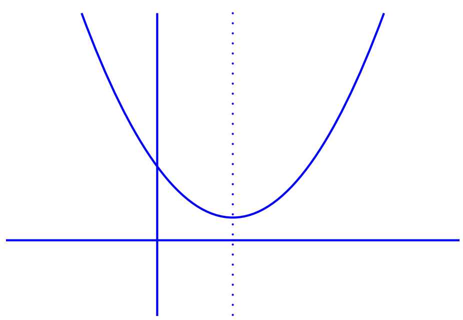


Figura 1 : $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

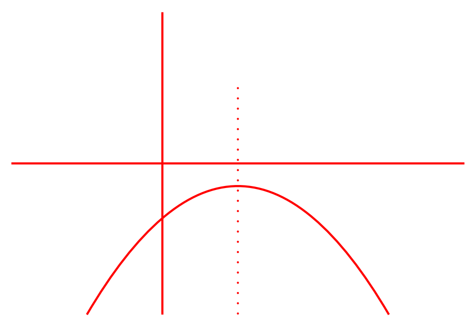


Figura 2 : $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

Por tanto, en este caso, la situación algebraica $q(x) = ax^2 + bx + c \notin \ker(\varphi(r)) \quad (\forall r; r \in \mathbb{R})$, significa geométricamente que "el gráfico de $q(x)$ no intersecta al Eje x"

(3) Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces $-(b^2 - 4ac) > 0$. Así que, en ese caso "nos gustaría tener" que:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{-(4ac - b^2)}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,\sqrt{-1}}{2a} \qquad (*) \\ &= \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\in \mathbb{R}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}_{\in \mathbb{R}} \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Así

$$r_1 = c + d\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \qquad \wedge \qquad r_2 = c - d\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Donde

$$c = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R} \qquad \wedge \qquad d = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \in \mathbb{R}$$

(4) En $(*)$ encima hemos operado sin fundamento matemático, pues;

(a) En los números reales se verifica:

$$(a \geq 0) \wedge \ (b \geq 0) \Longrightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

(b) Nada sabemos en otros casos posibles, como por ejemplo:

$$(a \leq 0) \wedge \ (b \leq 0) \overset{?}{\Longrightarrow} \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \text{(Pues, en este caso ni } \sqrt{a} \notin \mathbb{R}\text{, ni tampoco } \sqrt{b} \notin \mathbb{R}\text{)}$$

(c) En particular no podemos asegurar que $\sqrt{-1} \overset{?}{=} 1 \cdot \sqrt{-1}$

(d) En cualquier caso el punto a observar es el siguiente, basta definir un conjunto donde exista $\sqrt{-1}$, y en ese conjunto deberían tener solución las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

En efecto

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{R} & \text{Si } (b^2 - 4ac) \geq 0 \\ \\ x = \dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\sqrt{-1} \in \left(\mathbb{R} + \mathbb{R}\,\sqrt{-1}\right) & \text{Si } (b^2 - 4ac) < 0 \end{cases}$$

Definición 1.1. *Llamaremos números complejos al conjunto*

$$\mathbb{C} \quad = \quad \{u = a + bi \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}\}$$

Análisis 1.1.1. *Estudiemos este nuevo conjunto, en particular su operatoria, pues si no existe ésta, es que el conjunto es equivalente a ser vacío.*

(1) $\mathbb{C}$ *es un conjunto no vacío, es decir* $\mathbb{C} \neq \emptyset$, *pues* $u = 0 + 1 \cdot i = i \in \mathbb{C}$

(2) *Si definimos la función* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{C}$ *tal que* $\varphi(x, y) = x + iy$ *entonces* φ *es una biyección, porque es posible definir la función* $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{R}^2$, *tal que* $\varphi^{-1}(x + iy) = (x, y)$.

En efecto, por una parte vemos que,

$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \overset{\varphi}{\longmapsto} & \mathbb{C} & \overset{\varphi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy & \longmapsto & (x, y) \end{array}\right\} \Longrightarrow (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x, y) = (x, y)$$

Y por otra

$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \overset{\varphi^{-1}}{\longmapsto} & \mathbb{R}^2 & \overset{\varphi}{\longmapsto} & \mathbb{C} \\ x + iy & \longmapsto & (x, y) & \longmapsto & x + iy \end{array}\right\} \Longrightarrow (\varphi \circ \varphi^{-1})(z + iy) = x + iy$$

Así que φ *es invertible y por tanto es una biyección.*

(3) *Como* $\mathbb{R}^2$ *es un grupo con la adición, entonces usando la biyección construida podemos dotar a* $\mathbb{C}$ *de una operatoria que lo transforme también en un grupo.*

La idea es la siguiente, si

$$u_1 = (x_1, y_1) \longmapsto z_1 = \varphi(x_1, y_1) = x_1 + iy_1$$

$$u_2 = (x_2, y_2) \longmapsto z_2 = \varphi(x_2, y_2) = x_2 + iy_2$$

entonces definimos:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \qquad (\textit{ Pues, } u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2))$$

Como resultado de la gestión anterior tenemos el siguiente resultado

Teorema 1.1.2. $(\mathbb{C}, +)$ *es un grupo abeliano, donde:*

- $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0 \cdot i$ *es el neutro aditivo.*
- *Si* $z = x + iy$ *entonces* $-z = -x - iy$ *es el inverso aditivo de* z

La acción geométrica del isomorfismo es:

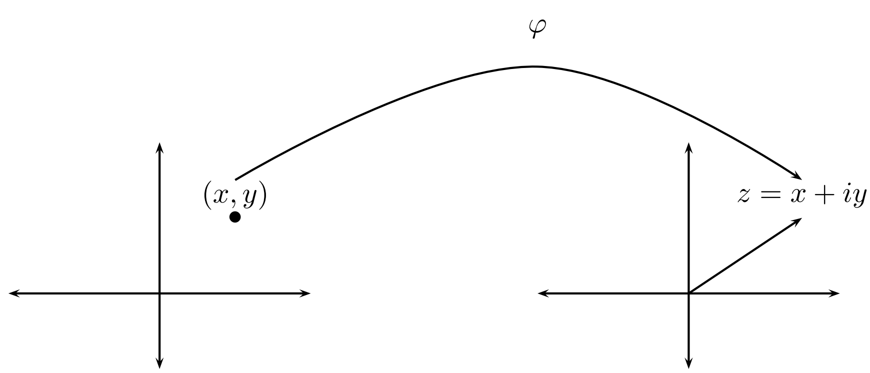


Figura 3: Isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$

En particular, tenemos que:

(1) $(0, 1) \in \mathbb{R}^2 \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} i \in \mathbb{C}$

(2) Si $z = x + iy$ entonces llamaremos parte real de z a $Re(z) = x$ y parte imaginaria de z a $Im(z) = y$

Ejemplo 1.1.3. *Si* $z = 2 - 3i$ *entonces* $Re(z) = 2$ *e* $Im(z) = -3$

1.2. Anillo de Números Complejos. Iniciamos esta sección definiendo un producto de números complejos,

Definición 1.2.1. *Si $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ entonces definimos el producto de números complejos*

$$z_1 \cdot z_2 \quad = \quad (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Ejemplo 1.2.2. *Si $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 - 4i$ entonces*

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (2+3i)(1-4i) \\ &= (2-(-12)) + i(3+(-8)) \\ &= 14 - 5i \end{aligned}$$

Teorema 1.2.3. *$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con identidad 1. Más aún $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.*

Para verificar este resultado hacemos las siguientes etapas:

(1) Mostramos la propiedad asociativa, es decir que $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3 \quad (\forall z_j; z_j \in \mathbb{C}; j = 1, 2, 3)$

En efecto

Si tomamos $z_j = a_j + ib_j \in \mathbb{C}$ para $j = 1, 2, 3$ entonces aplicando la definición de producto obtenemos:

$$\begin{aligned} z_1(z_2z_3) &= (a_1+ib_1)((a_2+ib_2)(a_3+ib_3)) \\ &= (a_1+ib_1)(a_2a_3 - b_2b_3) + i(a_2b_3 + a_3b_2) \\ &= (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + a_3b_2)) + i(a_1(a_2b_3 + a_3b_2) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)) \\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (b_1a_2 + a_1b_2)b_3) + i((a_1b_2 + b_1a_2)a_3 + (a_1a_2 - b_1b_2)b_3) \\ &= (z_1z_2)z_3 \end{aligned}$$

(2) A seguir mostramos que el complejo $1 = 1 + 0i$ es el neutro multiplicativo

En efecto

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ entonces $z \cdot 1 = (a+ib)(1 + i \cdot 0) = (a - 0) + i(0 + b) = a + ib = z$

Análogamente, $1 \cdot z = z$. Así que $1 + 0i$ es el neutro para el producto de complejos.

(3) Para la distributividad, $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \quad (\forall z_i : z_i \in \mathbb{C}; i = 1, 2, 3)$. Calculamos directamente

$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3) &= (a_1+ib_1)((a_2+ib_2) + (a_3+ib_3)) \\ &= (a_1+ib_1)((a_2+a_3) + i(b_2+b_3)) \\ &= a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3) + i(a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3)) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1a_3 - b_1b_3) + i((a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + b_1a_3)) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1a_3 - b_1b_3) + i(a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= z_1z_2 + z_1z_3 \end{aligned}$$

(4) Para la conmutatividad $z_1z_2 = z_2z_1 \quad (\forall z_i : z_i \in \mathbb{C}; i = 1, 2)$ procedemos como antes, y obtenemos que

$$z_1z_2 = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = (a_1b_1 - a_2b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = (b_1a_1 - b_2a_2) + i(b_1a_2 + b_2a_1) = z_2z_1$$

(5) Finalmente, si $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

es el inverso multiplicativo de z.

En efecto

$$z \cdot z^{-1} = (x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right) = 1 + 0i$$

Análogamente,

$$z^{-1} \cdot z = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)(x+iy) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + i\left(\frac{xy-xy}{x^2+y^2}\right) = 1 + 0i$$

Así que $\mathbb{U}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0+0i\}$

Luego, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con identidad 1. Más aún $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.

Definición 1.2.4. *Sea $\mathbb{A}$ un conjunto no vacío. Diremos que $\mathbb{A}$ es un cuerpo conmutativo con identidad 1 si $(\mathbb{A}, *, \circ)$ es un anillo conmutativo con identidad 1 y todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo, es decir $\mathbb{U}(\mathbb{A}) = \mathbb{A} - \{0\}$*

Ejemplo 1.2.5.

(1) $\mathbb{C}$ *es el cuerpo de números complejos*

(2) $\mathbb{R}$ *es el cuerpo de números reales*

(3) $\mathbb{Q}$ *es el cuerpo de números racionales*

(4) $\mathbb{Z}_p$ *es el cuerpo de enteros módulo p, si p es un número primo*

2. Construcción algebraica de $\mathbb{C}$

Para esta construcción usaremos las ideas desarrolladas en el proyecto de integración (**??**).

Así que iniciamos definiendo en el anillo de polinomios $\mathbb{R}[x]$ la siguiente relación

$$\begin{aligned} p(x) \mho q(x) &\iff (x^2+1) | (p(x) - q(x)) \\ &\iff (\exists\, c(x); c(x) \in \mathbb{R}[x]) : p(x) - q(x) = (x^2+1)c(x) \end{aligned}$$

Y concluiremos, después de pasar las siguientes etapas:

Etapa 1. $\mho$ es una relación de equivalencia

Etapa 2. $\overline{0} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid (x^2+1) | p(x)\}$

Etapa 3. Si definimos $i^2 = -1$ entonces $p(x) \in \overline{0} \iff p(i) = 0$

Etapa 4. $\displaystyle\bigcup_{p(x) \in \mathbb{R}[x]} \overline{p(x)} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$

Etapa 1. $\mho$ es una relación de equivalencia

En efecto

- $p(x) - p(x) = 0 = 0 \cdot (x^2+1)$. Así que $p(x) \mho p(x)$ y $\mho$ es una relación reflexiva.

- Si $p(x) \mho q(x)$ entonces $(\exists\, c(x); c(x) \in \mathbb{R}[x]) : p(x) - q(x) = (x^2+1)c(x)$, Pero
$$\left.\begin{array}{rcl} q(x) - p(x) &=& -(p(x) - q(x)) \\ &=& -[(x^2+1)c(x)] \\ &=& (x^2+1)(-c(x)) \end{array}\right\} \Longrightarrow q(x) \mho p(x)$$
Así que $q(x) \mho p(x)$ y $\mho$ es una relación simétrica

- Si suponemos que $p(x) \mho q(x)$ y $q(x) \mho h(x)$ entonces $(\exists\, r_1(x); r_1(x) \in \mathbb{R}[x])$ y $r_2(x); r_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) - q(x) = (x^2+1)r_1(x)$ y $q(x) - h(x) = (x^2+1)r_2(x)$. Luego tenemos que
$$p(x) - q(x) + q(x) - h(x) = (x^2+1)r_1(x) + (x^2+1)r_2(x) \Longrightarrow p(x) - h(x) = (x^2+1)[r_1(x) + r_2(x)]$$
Así que $p(x) \mho h(x)$ y $\mho$ es una relación transitiva, y en consecuencia es una relación de equivalencia.

Etapa 2. $\overline{0} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid (x^2+1)|p(x)\}$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} p(x) \in \overline{0} &\Longleftrightarrow& p(x) \in \mathbb{R}[x] \ \wedge \ p(x) \mho 0 \\ &\Longleftrightarrow& p(x) \in \mathbb{R}[x] \ \wedge \ (x^2+1)|(p(x) - 0) \\ &\Longleftrightarrow& p(x) \in \mathbb{R}[x] \ \wedge \ (\exists\, c(x); c(x) \in \mathbb{R}[x] \wedge p(x) = (x^2+1)c(x)) \end{array}$$

Por tanto,
$$\overline{0} \quad = \quad \{(x^2+1)c(x) \mid c(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

Etapa 3. Si definimos $i^2 = -1$ entonces $p(x) \in \overline{0} \Longleftrightarrow p(i) = 0$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} p(x) \in \overline{0} &\Longleftrightarrow& p(x) \in \mathbb{R}[x] \ \wedge \ (\exists\, c(x); c(x) \in \mathbb{R}[x]) : p(x) = (x^2+1)c(x) \\ &\Longleftrightarrow& p(x) \in \mathbb{R}[x] \ \wedge \ (\exists\, c(x); c(x) \in \mathbb{R}[x]) : p(i) = (i^2+1)r(i) \\ &\Longleftrightarrow& p(x) \in \mathbb{R}[x] \ \wedge \ p(i) = 0 \end{array}$$

Etapa 4. $\displaystyle\bigcup_{p(x) \in \mathbb{R}[x]} \overline{p(x)} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$

En efecto

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces $p(x) = (x^2+1)s(x) + r(x)$, donde $\partial(p(x)) \leq 1$

$p(x) = (x^2+1)s(x) + r(x) \Longrightarrow p(i) = (i^2+1)s(i) + r(i) \Longrightarrow p(i) = r(i)$

Concluimos que:

- $\overline{0} = \overline{x^2+1} \Longrightarrow \overline{x} = i$

- $p(x) = (x^2+1)s(x) + r(x) \ : \partial(p(x)) \leq 1 \Longrightarrow \overline{p(x)} = \overline{r(x)} = \overline{a+bx}$
- $\overline{p(x)} = \overline{a+bx} \Longrightarrow p(\overline{x}) = a + b\overline{x} = a + bi$
- $\displaystyle\bigcup_{p(x)\in\mathbb{R}[x]} \overline{p(x)} = \bigcup_{p(x)\in\mathbb{R}[x]} p(\overline{x}) = \bigcup_{p(x)\in\mathbb{R}[x]} p(i) = \{a+bi \mid a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}\}$

3. Interpretación Geométrica de $\mathbb{C}$

Inicialmente asociemos a un complejo z un ángulo α, según la figura:

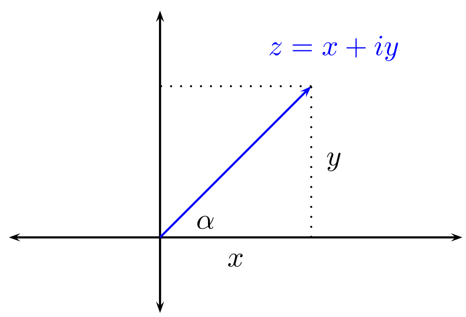


Figura 4 : Un complejo y su ángulo

Y si llamamos módulo del complejo z, a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ entonces aplicando ideas básicas de trigonometría obtenemos que

$$x = |z|\cos\alpha \qquad \wedge \qquad y = |z|\operatorname{sen}\alpha$$

Definición 3.1. *Llamaremos forma polar o trigonométrica de z a*

$$z \quad = \quad |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Ejemplo 3.1.1. *Si $z = 1+i$ entonces $\varphi(1,1) = 1+i$. Así que*

$$|1+i|\cos\frac{\pi}{4} \wedge 1+i|\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \Longrightarrow (1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

3.2. Raíces de la Unidad. En lo que sigue estaremos interesados en resolver la ecuación $x^n = 1$, es decir en determinar el conjunto

$$R(n) \quad = \quad \{u\in\mathbb{C} \mid u^n = 1\}$$

Definición 3.2.1. *$u\in\mathbb{C}$ se llamará una raíz n ésima, $(n\in\mathbb{N})$ de la unidad si $u\in R(n)$, equivalentemente si satisface la ecuación $x^n = 1$, es decir, si verifica que $u^n = 1$*

Para determinar el conjunto $R(n) = \{u\in\mathbb{C} \mid u^n = 1\}$ usaremos una estrategia, basada esencialmente en las propiedades que se desprenden de la forma polar de un complejo z.

(1) Aplicamos el método de Inducción para mostrar la fórmula de Abraham de Moivre

$$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\operatorname{sen}n\alpha) \quad (\forall n; n\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

♦ Si $n = 2$ entonces

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 &= \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^2\,\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\,\alpha + 2i\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ &= \cos 2\alpha + i\,\mathrm{sen}\,2\alpha\end{aligned}$$

♦ Ahora para $n = k$ suponemos verdadero que $(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^k = \cos k\alpha + i\,\mathrm{sen}\,k\alpha$

♦ Finalmente mostramos que (1) se verifica para $n = k+1$

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^{k+1} &= (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^k(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \\ &= (\cos k\alpha + i\,\mathrm{sen}\,k\alpha)(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \\ &= \cos k\alpha\cos\alpha + i(\cos k\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,k\alpha\cos\alpha) - \mathrm{sen}\,k\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ &= \cos k\alpha\cos\alpha - \mathrm{sen}\,k\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + i(\cos k\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,k\alpha\cos\alpha) \\ &= \cos(k\alpha + \alpha) + i\,\mathrm{sen}(k\alpha + \alpha) \\ &= \cos(k+1)\alpha + i\,\mathrm{sen}(k+1)\alpha)\end{aligned}$$

Así que

$$(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha \qquad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(2) Aplicando el resultado obtenido en (1) tenemos que

$$z^n = 1 \iff |z|^n(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha) = 1 + 0i \iff \left.\begin{array}{rcl}|z|\cos n\alpha &=& 1\\ |z|\,\mathrm{sen}\,n\alpha &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}|z|^2\cos^2 n\alpha &=& 1\\ |z|^2\,\mathrm{sen}^2\,n\alpha &=& 0\end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow |z|^2(\cos^2 n\alpha + \mathrm{sen}^2\,n\alpha) = 1 \Longrightarrow |z|^2 = 1 \Longrightarrow |z| = 1$$

Luego,

$$z^n = 1 \iff \left.\begin{array}{rcl}\cos n\alpha &=& 1\\ \mathrm{sen}\,n\alpha &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow n\alpha = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Finalmente, haciendo las respectivas sustituciones tenemos que

$$z^n = 1 \iff z = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación $z^n - 1 = 0$ son

$$R(n) = \left\{z = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(3) Faltan aún algunas importantes precisiones. Si notamos por

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n} \tag{2}$$

entonces

(a) $\omega_n^n = \cos\dfrac{2n\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2n\pi}{n} = \cos 2\pi - i\,\mathrm{sen}\,2\pi = 1$

(b) $(\omega_n^k)^n = (\omega_n^n)^k = 1 \qquad (\forall k; k \in \mathbb{Z})$

(c) De los resultados anteriores, sigue que las soluciones de la ecuación $z^n = 1$ son

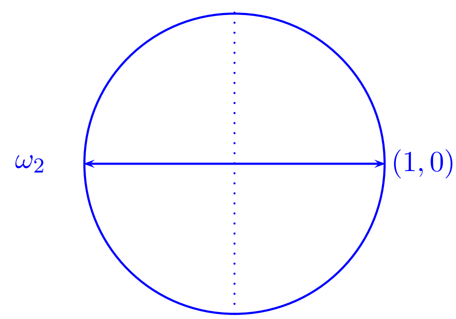
$$\boxed{R(n) \;=\; \{\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\} = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}} \tag{3}$$

Ejemplo 3.2.2.

Si n=2 entonces

$$R(2) = \{1, \omega_2\} = \left\{1, \cos\frac{2\pi}{2} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{2}\right\} = \{1, -1\}$$

Gráficamente tenemos:

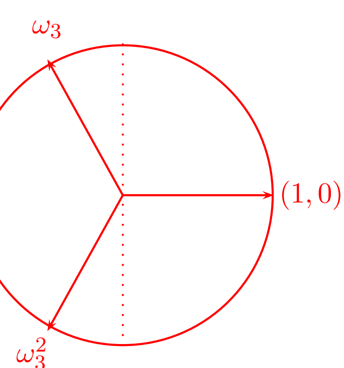


$Figura\,5 : R(2)$

Si n=3 entonces

$$\begin{aligned} R(3) &= \{1, \omega_3, \omega_3^2\} \\ &= \left\{1, \cos\frac{2\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right\} \\ &= \{1, \cos 120 - i\,\mathrm{sen}\,120, \cos 240 - i\,\mathrm{sen}\,240\} \end{aligned}$$

Gráficamente tenemos:



$Figura\ 6 : R(3)$

Concluimos esta sección, en primer lugar observando que $R(n)$ divide en n partes iguales al círculo unitario, y para identificar estas raíces de ahora en adelante haremos la siguiente definición.

Definición 3.2.3. *ω_n se llamará una raíz n-ésima primitiva de la unidad y ω_n^k se llamará una raíz n-ésima de la unidad.*

4. Aplicaciones

4.1. Solución de la ecuación $z^n = u$. Este caso lo solucionamos aplicando los resultados obtenidos en la sección anterior.

(1) $z^n = u \Longleftrightarrow \dfrac{z^n}{u} = 1 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{z}{\sqrt[n]{u}}\right)^n = 1$

(2) Si llamamos $q = \dfrac{z}{\sqrt[n]{u}}$ entonces las soluciones de la ecuación $q^n = 1$ son dadas por $R(n)$, así que la solución final debe ser del tipo, $z_k = \sqrt[n]{u} \cdot \omega_n^k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

(3) Por otra parte, como $u = |u|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ entonces

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{u} &= |u|^{\frac{1}{n}}(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^{\frac{1}{n}} \\ &= |u|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha}{n}\right) \end{aligned}$$

(4) Finalmente las soluciones son del tipo:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{u} \cdot \omega_n^k \\ &= |u|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha}{n}\right) \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} - i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= |u|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\alpha - 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha - 2k\pi}{n}\right] \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{4}$$

Ejemplo 4.1.1. *Si $z^3 = 1 + i$ determinamos en primer lugar, la forma polar del complejo $1 + i$. Es decir*

$$1 + i = |1 + i|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \sqrt{2}\cos\alpha &=& 1 \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha &=& 1 \end{array}\right| \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Luego aplicando (4) a la ecuación $z^3 = 1 + i$ tenemos que las soluciones son del tipo

$$z_k = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{45 - 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{45 - 2k\pi}{3}\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

Es decir,

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{\frac{1}{6}}(\cos 15 + i \operatorname{sen} 15) \\ z_1 &= 2^{\frac{1}{6}}(\cos 315 - i \operatorname{sen} 315) \\ z_2 &= 2^{\frac{1}{6}}(\cos 675 - i \operatorname{sen} 675) \end{aligned}$$

4.2. La Matriz de Fourier. Dada la periodicidad de ω_n, es decir una raíz primitiva n-ésima de la unidad satisface las propiedades:

(1) $\omega_n^n = 1$

(2) Si $s \in \mathbb{Z}$ y $s > n$ como $s = rn + t$, con $t < n$ entonces $\omega_n^s = \omega_n^{rn+t} = \omega_n^{rn}\omega^t = \omega^t$

Podemos construir una matriz de orden n sobre $\mathbb{C}$.

Definición 4.2.1. *Llamaremos matriz de Fourier de orden n a la matriz, $F_n = (\omega_n)^{i\cdot j} \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n)$; tal que $(0 \leq i \leq n-1)$ $(0 \leq j \leq n-1)$*

Es decir,

$$F_n = \begin{pmatrix} \omega_n^{0\cdot 0} & \omega_n^{0\cdot 1} & \omega_n^{0\cdot 2} & \cdots & \omega_n^{0\cdot (n-1)} \\ \omega_n^{1\cdot 0} & \omega_n^{1\cdot 1} & \omega_n^{1\cdot 2} & \cdots & \omega_n^{1\cdot (n-1)} \\ \omega_n^{2\cdot 0} & \omega_n^{2\cdot 1} & \omega_n^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_n^{2\cdot (n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n^{(n-1)\cdot 0} & \omega_n^{(n-1)\cdot 1} & \omega_n^{(n-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_n^{(n-1)\cdot (n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{1\cdot 1} & \omega_n^{1\cdot 2} & \cdots & \omega_n^{1\cdot (n-1)} \\ 1 & \omega_n^{2\cdot 1} & \omega_n^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_n^{2\cdot (n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{(n-1)\cdot 1} & \omega_n^{(n-1)\cdot 2} & \cdots & \omega_n^{(n-1)\cdot (n-1)} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.2.

$$(i)\quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (ii)\ F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3 \end{pmatrix} \quad (iii)\ F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

Observación 4.2.3. *Si consideramos la ecuación $F_n \cdot X = \widehat{X}$, donde*

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \end{pmatrix}}_{Datos} \qquad \wedge \qquad \widehat{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \widehat{x}_0 \\ \widehat{x}_1 \\ \vdots \\ \widehat{x}_{(n-1)} \end{pmatrix}}_{Transformados}$$

Entonces de acuerdo al producto de matrices y a la igualdad de matrices tenemos que cada dato transformado se calcula de la forma:

$$\widehat{x}_k = \sum_{s=0}^{n-1} x_s \omega_n^{ks} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Para $n = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_k &= \sum_{n=0}^{1} x_n w_2^{kn} \qquad (k = 0,1)\\
&= \sum_{n=0}^{1} x_n (-1)^{kn} \qquad (k = 0,1)\\
&= x_0(-1)^{k\cdot 0} + x_1(-1)^{k\cdot 1} \qquad (k = 0,1)\\
&\Downarrow\\
\widehat{x}_0 &= x_0 + x_1\\
\widehat{x}_1 &= x_0 - x_1
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_0 \\ \widehat{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix}$$

Para $n = 2^2$ tenemos para $(k = 0, 1, 2, 3)$ que

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_k &= \sum_{n=0}^{2^2-1} x_n \omega_4^{kn}\\
&= x_0\omega_4^{k\cdot 0} + x_1\omega_4^{k\cdot 1} + x_2\omega_4^{k\cdot 2} + x_3\omega_4^{k\cdot 3}\\
&= x_0 + x_1\omega_4^{k} + x_2\omega_4^{2k} + x_3\omega_4^{3k}\\
&= x_0 + x_1\omega_4^{k} + x_2(\omega_4^{k})^2 + x_3(\omega_4^{k})^3
\end{aligned}$$

Ahora como $\omega_4 = \left(\cos\frac{2\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}\right)$ entonces tenemos la siguiente útil fórmula de reducción

$$\begin{aligned}
\omega_4^2 &= \left(\cos\frac{2\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}\right)^2\\
&= \left(\cos\frac{2\cdot 2\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{2\cdot 2\pi}{4}\right)\\
&= \left(\cos\frac{2\pi}{2} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2}\right)\\
&= \omega_2
\end{aligned}$$

Así que reordenamos la expresión de $\widehat{x}_k$, para posteriormente aplicar la fórmula,

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_k &= x_0 + x_1\omega_4^k + x_2(\omega_4^2)^k + x_3(\omega_4^3)^k\\
&= x_0 + x_1\omega_4^k + x_2(\omega_4^2)^k + x_3(\omega_4^2\omega_4)^k\\
&= x_0 + x_1\omega_4^k + x_2(\omega_4^2)^k + x_3(\omega_4^2)^k\omega_4^k\\
&= x_0 + x_1\omega_4^k + x_2\omega_2^k + x_3(\omega_2)^k\omega_4^k\\
&= x_0 + x_2\omega_2^k + (x_1 + x_3\omega_2^k)\omega_4^k\\
&= x_0 + x_2(-1)^k + (x_1 + x_3(-1)^k)\omega_4^k \qquad \textit{(recordar que } \omega_2 = (-1))
\end{aligned}$$

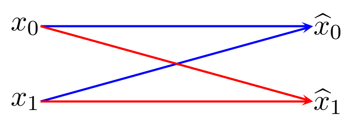
Para cada $k = 0, 1, 2, 3$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \widehat{x}_0 & = & (x_0+x_2)+(x_1+x_3) \\ \widehat{x}_1 & = & (x_0-x_2)+(x_1-x_3)\omega_4 \\ \widehat{x}_2 & = & (x_0+x_2)+(x_1+x_3)\omega_4^2 \\ \widehat{x}_3 & = & (x_0-x_2)+(x_1-x_3)\omega_4^3 \end{array} \iff \begin{array}{rcl} \widehat{x}_0 & = & (x_0+x_2)+(x_1+x_3) \\ \widehat{x}_1 & = & (x_0-x_2)+(x_1-x_3)\omega_4 \\ \widehat{x}_2 & = & (x_0+x_2)-(x_1+x_3) \\ \widehat{x}_3 & = & (x_0-x_2)-(x_1-x_3)\omega_4 \end{array}$$

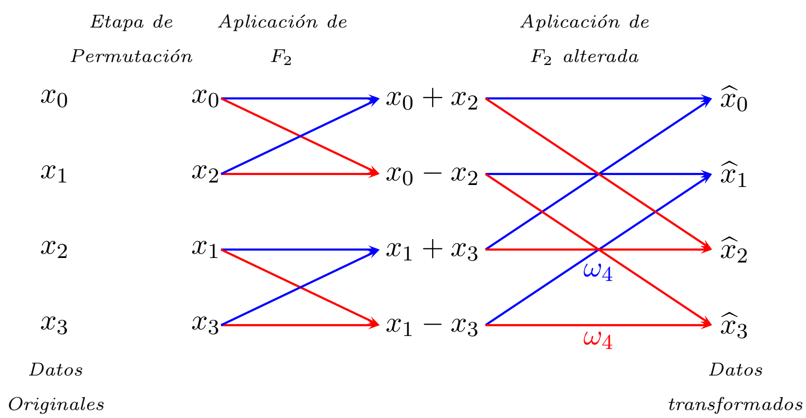
Luego, tenemos para calcular la transformada de orden 4, el siguiente algoritmo.

$$\widehat{x}_k = \sum_{n=0}^{2^2-1} x_n\omega_4^{kn} = \sum_{n=0}^{1} x_{2n}\omega_2^{kn} + \omega_4^k\sum_{n=0}^{1} x_{2n+1}\omega_2^{kn}$$

Podemos esquematizar para $n=2$ este procedimiento como sigue:



Para $n=4$



Finalmente, si $n=2^s$ obtenemos la fórmula de reducción:[1]

$$\widehat{x}_k = \sum_{n=0}^{\frac{2^s-2}{2}} x_{2n}\omega_{2^{s-1}}^{kn} + \omega_{2^s}^k \sum_{n=0}^{\frac{2^s-2}{2}} x_{2n+1}\omega_{2^{s-1}}^{kn}$$

5. Ejercicios Propuestos

(1) Resuelva las siguientes ecuaciones:

(i) $x^3-27=0$
(ii) $x^5+32=0$
(iii) $x^6-i=0$
(iv) $x^6-1=0$

(2) Si definimos $e^{ix}=\cos x+i\operatorname{sen} x$, (fórmula de Euler) entonces:

[1]Todo lo anterior es descrito por el famoso y popular " Algoritmo de Cooley - Tukey "

(i) Demuestre que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \wedge \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

(ii) Demuestre que

$$\cos^2 y \cdot \operatorname{sen}^2 y \quad = \quad -\frac{1}{8}\cos 4y + \frac{1}{8}$$

(iii) Demuestre que

$$2 + i \quad = \quad \sqrt{5}\, e^{i \arctan(\frac{1}{2})}$$

(3) Si $z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces demuestre que:

$$z = \frac{i - r}{1 + 2ir} \quad \Longrightarrow \quad \left| z - \frac{3}{4}\, i \right| = \frac{1}{4}$$

(4) Demuestre que

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i \right) (-1 - i\sqrt{3}) \left(\cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \right)^{10n} \quad = \quad -2i$$

(5) Si $x_1 = \alpha - \alpha^4$ y $x_2 = \alpha^2 - \alpha^3$ entonces demuestre que

$$\alpha^5 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = -5$$

(6) Demuestre que

$$i \left(\frac{1 - e^{ix}}{1 + e^{ix}} \right) \quad = \quad \tan\frac{x}{2}$$

(7) Calcule

$$\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$$

(8) Determine el conjunto

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}^2 \}$$

(9) Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ demuestre que

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad Im(z) = 0 \quad \vee \quad |z| = 1$$

(10) Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $z \neq \pm i$ entonces demuestre que

$$z \cdot \bar{z} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{z}{1 + z^2} \in \mathbb{R}$$

(11) Demuestre que las raíces cúbicas de la unidad son los vertices de un triángulo equilátero.

(12) Demuestre que

$$z \in R(7) - \{1\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{z}{1 + z^2} + \frac{z^2}{1 + z^4} + \frac{z^3}{1 + z^6} = -2$$

(13) Si $z = n! + i(n-1)!$ y $w = n + i$ entonces demuestre que $\left| \dfrac{z}{w} \right| = (n-1)!$

(14) Si $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ entonces demuestre que $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$

(15) Demuestre que $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left[\cos\dfrac{n\pi}{6} - i\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{6} \right]$

(16) Si $z = \sqrt[6]{\dfrac{1 - i}{\sqrt{3} + i}}$. Determine $Re(z)$ e $Im(z)$

(17) Si $x_n + iy_n = \left(2 - 2i\sqrt{3}\right)^n$ entonces demuestre que $\dfrac{x_{10}}{x_8} + \dfrac{y_{10}}{y_8} = 0$

(18) Si $x_n + iy_n = (\sqrt{3} + i)^{6n}$ entonces demuestre que $x_n + 2^6 x_{n-1} = 0$

(19) Si $x_n + iy_n = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ entonces demuestre que $x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(20) Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x+iy} + \frac{2}{x-iy} = 1 + i\right\}$$

(21) si $\rho = |a + bi|$ entonces demuestre que

$$\sqrt{a+bi} \quad = \quad \pm\left[\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}\right]$$

(22) Si $p(z) = z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 \in \mathbb{C}[z]$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{u \in \mathbb{C} \mid p(u) = 0\}$$

Ayuda: Observe que $p(-1) = 0$

(23) Descomponga en fracciones parciales

$$u(x) \quad = \quad \frac{3x + 1}{x^6 - 1}$$

(24) Para el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcl} (1+i)z & - & iw & = & 2+i \\ (2+i)z & + & (2-i)w & = & 2i \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid (*) \text{ tiene solución}\}$$

6. Situaciones de Desempeño: Números Complejos

6.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante ”Situaciones Problemáticas” que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y ”en lo posible haber aprehendido” de los tópicos analizados.

6.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es ”incognita”, o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar ”sinónimos matemáticos”, que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

6.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

(1) Si $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ entonces demuestre que $Im(z^{16}) = 0$

(2) Si $z = \dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, para $n \in \mathbb{N}$. Determine $Re(z)$ e $Im(z)$.

(3) Determine el conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 + 8i = 0\}$

(4) Si $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^3 = i \ \wedge \ Re(w) < 0$ entonces calcule $|w - i|$

(5) Si $\sqrt{a+bi} = \pm(\alpha + i\beta)$. Determine $\sqrt{-a-bi}$

(6) Dado $(n \in \mathbb{N})$ tal que $n > 1$. Demuestre que:

(a) $\omega_{kn}^k = \omega_n$ para cada $(k \in \mathbb{N})$

(b) Demuestre que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_n^i = 1$

(7) Demuestre que

$$z^{2n} - 2z^n \cos n\alpha = -1 \Longrightarrow [(z^n = \cos n\alpha + i \text{ sen } n\alpha) \quad \vee \quad (z^n = \cos n\alpha - i \text{ sen } n\alpha)]$$

(8) Demuestre que

$$(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)^n = \cos n\alpha + i \,\text{sen}\, n\alpha \qquad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(9) Si $x_1 = \alpha - \alpha^4$ y $x_2 = \alpha^2 - \alpha^3$ y $\alpha \neq 1$ entonces demuestre que

$$\alpha^5 = 1 \implies x_1^2 + x_2^2 = -5$$

(10) Si α es una raíz cúbica de la unidad, $\alpha \neq 1$ pruebe que

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5) = 9$$

(11) Demuestre que $(1+\omega_3^2)^3 + 1 = 0$

(12) Si $z = 1 + \omega_3^n + \omega_3^{2n}$ entonces demuestre que

(a) n divisible por 3 $\implies z = 3$

(b) n no divisible por 3 $\implies z = 0$

(13) Si consideramos la ecuación $F_8 \cdot X = \widehat{X}$, donde

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{7)} \end{pmatrix}}_{\text{Datos}} \qquad \wedge \qquad \widehat{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \widehat{x}_0 \\ \widehat{x}_1 \\ \vdots \\ \widehat{x}_{(7)} \end{pmatrix}}_{\text{Transformados}}$$

entonces para cada $(k = 0, 1, 2, \dots, 7)$ se tiene que:

$$\widehat{x}_k = \sum_{n=0}^{3} x_{2n}\omega_4^{kn} + \omega_8^k \sum_{n=0}^{3} x_{2n+1}\omega_4^{kn}$$

7. Solución de Situaciones de Desempeño: Números Complejos

(1) Si $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ entonces demuestre que $Im(z^{16}) = 0$

Solución

La técnica será usar la representación en la forma polar del complejo z <<con la única intención de usar la formula de Demoivre>> entonces con esto en mente procedemos,

$$\begin{aligned} z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) &\Longrightarrow z = (cos(5\pi/4) + i\,\text{sen}(5\pi/4)) \qquad \text{(Forma polar de } z\text{)} \\ &\Longrightarrow z^{16} = (cos(5\pi/4) + i\,\text{sen}(5\pi/4))^{16} \\ &\Longrightarrow z^{16} = cos\,(20\pi) + i\;\text{sen}\,(20\pi) \qquad \text{(Fórmula de De Moivre)} \\ &\Longrightarrow z^{16} = \cos(0) + i\,\text{sen}(0) \\ &\Longrightarrow z^{16} = 1 + i \cdot 0 \end{aligned}$$

entonces $Im(z^{16}) = 0$

(2) Si $z = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, para $n \in \mathbb{N}$. Determine $Re(z)$ e $Im(z)$.

Procedemos directamente buscando la forma binomial del complejo, para leer su parte real e imaginaria.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} \\ &= \frac{(1+i)^n}{(1-i)^n(1-i)^{-2}} \\ &= \left(\frac{(1+i)}{(1-i)}\right)^n (1-i)^2 \\ &= \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^n (1-i)^2 \\ &= \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^n (1-i)^2 \\ &= \frac{1}{2^n}\,(1+i)^{2n}(1-i)^2 \\ &= \frac{1}{2^n}\,\left(\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\;\text{sen}\;\frac{\pi}{4}\right]\right)^{2n}\left(\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\;\text{sen}\;\frac{\pi}{4}\right]\right)^2 \\ &= 2\,\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\;\text{sen}\;\frac{2\pi}{4}\right)^n\left(\cos\frac{2\pi}{4} - i\;\text{sen}\;\frac{2\pi}{4}\right) \\ &= 2\,\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\;\text{sen}\;\frac{\pi}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\;\text{sen}\;\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\;i^n \cdot (-i) \\ &= -2\;i^{n+1} \end{aligned}$$

Luego, tenemos dos casos: $n = 2k+1 \vee n = 2k$

$$\begin{aligned} n = 2k+1 &\Longrightarrow z = -2\;(i)^{2k+2} = -2\;(i)^{2k}(i)^2 = -2\;(-1)^k(-1) \\ &\Longrightarrow Re(z) = 2(-1)^k \quad \text{e} \quad Im(z) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2k \quad &\Longrightarrow \quad z = -2\,(i)^{2k+1} = -2\,(i)^{2k}(i) = -2\,(-1)^k(i) \\ &\Longrightarrow \quad Re(z) = 0 \quad \text{e} \quad Im(z) = 2(-1)^{k+1} \end{aligned}$$

(3) Determine el conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 + 8i = 0\}$

Etapa 1. Determinamos los elementos de $\mathbb{S}$

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{S} \quad &\Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{C} \wedge z^4 + 8i = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{C} \wedge z^4 = -8i \qquad (*) \end{aligned}$$

Etapa 2. Para determinar los elementos de $\mathbb{S}$ debemos resolver la ecuación $z^n = u$
.

$$z_k \;=\; |u|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Partimos determinando la forma polar del complejo $-8i$.

$$-8i \;=\; 8\,(\cos(-\pi/2) + i\,\text{sen}\,(-\pi/2))$$

Y reemplazando en nuestra fórmula obtenemos que,

$$z_k = \sqrt[4]{8}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right)\right) \qquad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

De donde las soluciones de la ecuación dada son:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{8}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ z_1 &= \sqrt[4]{8}\cdot\left(\cos\left(3\frac{\pi}{8}\right) + i\,sen\left(3\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ z_2 &= \sqrt[4]{8}\cdot\left(\cos\left(7\frac{\pi}{8}\right) + i\,sen\left(7\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ z_3 &= \sqrt[4]{8}\cdot\left(\cos\left(11\frac{\pi}{8}\right) + i\,sen\left(11\frac{\pi}{8}\right)\right) \end{aligned}$$

Así $\mathbb{S} = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

(4) Si $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^3 = i \ \wedge\ Re(w) < 0$ entonces calcule $|w - i|$

En efecto

(a) Como $w^3 = i$ entonces w es raíz cúbica de i entonces

$$w^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2}$$

(b) Las soluciones de esa ecuación cúbica son de la forma,

$$w_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\ ,\quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ w_1 &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ w_2 &= \cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

(c) Finalmente como, para $k = 0, Re(w) > 0$ y para $k = 2, Re(w) = 0$ entonces

$$|w - i| = |-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - i| = 1$$

(5) Si $\sqrt{a+bi} = \pm(\alpha + i\beta)$. Determine $\sqrt{-a-bi}$

Este es un cálculo directo, buscando como aplicar la única hipótesis que existe, es decir,

$$\begin{aligned} \sqrt{-a-bi} &= \sqrt{(-1)(a+bi)} \\ &= \sqrt{(-1)}\,\sqrt{(a+bi)} \\ &= i\,(\pm(\alpha+i\beta)) \\ &= \pm(i\alpha + i^2\beta) \\ &= \pm(i\alpha - \beta) \\ &= \pm((-1)(\beta - i\alpha) \\ &= \mp(\beta - i\alpha) \end{aligned}$$

(6) Dado $(n \in \mathbb{N})$ tal que $n > 1$. Demuestre que:

(a) $\omega_{kn}^k = \omega_n$ para cada $(k \in \mathbb{N})$

Solución

$$\begin{aligned} \omega_{kn}^k &= \left(\cos\frac{2\pi}{2kn} - i\ \operatorname{sen}\ \frac{2\pi}{2kn}\right)^k \\ &= \cos\frac{k\cdot 2\pi}{2kn} - i\ \operatorname{sen}\ \frac{k\cdot 2\pi}{2kn} \\ &= \cos\frac{2\pi}{n} - i\ \operatorname{sen}\ \frac{2\pi}{n} \\ &= \omega_n \end{aligned}$$

(b) Demuestre que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_n^i = 1$

En efecto

(i) $w_n^n = 1$, pues $w_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$ y entonces $w_n^n = \cos\dfrac{2\pi n}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi n}{n} = 1$

(ii) $\dfrac{w_n^n - 1}{w_n - 1} = 1 + w_n + w_n^2 + \cdots + w_n^{n-1} \Longrightarrow 1 + w_n + w_n^2 + \cdots + w_n^{n-1} = 0$

Así que

$$\sum_{i=0}^{n} w_n^i = 1 \quad = \quad \underbrace{1 + w_n + w_n^2 + \cdots + w_n^{n-1}}_{0} + w_n^n = w_n^n = 1$$

(7) Demuestre que

$$z^{2n} - 2z^n \cos n\alpha = -1 \Longrightarrow [(z^n = \cos n\alpha + i \text{ sen } n\alpha) \quad \vee \quad (z^n = \cos n\alpha - i \text{ sen } n\alpha)]$$

Solución

$$\begin{aligned}
z^{2n} - 2z^n \cos n\alpha + 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (z^n)^2 - 2z^n \cos n\alpha + 1 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm \sqrt{(2\cos n\alpha)^2 - 4}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm \sqrt{4\cos^2 n\alpha - 4}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm \sqrt{4(\cos^2 n\alpha - 1)}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm \sqrt{4(-1)(1 - \cos^2 n\alpha)}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm 2i \text{ sen } n\alpha}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \cos n\alpha \pm i \text{ sen } n\alpha \\
&\Longrightarrow \quad [z^n = \cos n\alpha + i \text{ sen } n\alpha] \quad \vee \quad [z^n = \cos n\alpha - i \text{ sen } n\alpha]
\end{aligned}$$

(8) Demuestre que

$$(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)^n \quad = \quad \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha \qquad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución: (Usaremos la técnica de Inducción Matemática)

Si $n = 2$ entonces

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)^2 &= \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha \text{ sen } \alpha - \text{ sen}^2\alpha \\
&= \cos^2\alpha - \text{ sen}^2\alpha + 2i\cos\alpha \text{ sen } \alpha \\
&= \cos 2\alpha + i \text{ sen } 2\alpha
\end{aligned}$$

Ahora si suponemos que $(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)^k = (\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)^n$ entonces

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)^{k+1} &= (\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)^k(\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)\\
&= (\cos k\alpha + i\ \text{sen}\ k\alpha)(\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)\\
&= \cos k\alpha\cos\alpha + i(\cos k\alpha\ \text{sen}\ \alpha + \text{ sen}\ k\alpha\cos\alpha) - \text{ sen}\ k\alpha\ \text{sen}\ \alpha\\
&= \cos k\alpha\cos\alpha - \text{ sen}\ k\alpha\ \text{sen}\ \alpha + i(\cos k\alpha\ \text{sen}\ \alpha + \text{ sen}\ k\alpha\cos\alpha)\\
&= \cos(k\alpha+\alpha) + i\text{sen}\ (k\alpha+\alpha)\\
&= \cos(k+1)\alpha + i\text{sen}\ (k+1)\alpha)
\end{aligned}$$

Así que

$$(\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)^n = \cos n\alpha + i\ \text{sen}\ n\alpha$$

(9) Si $x_1 = \alpha - \alpha^4$ y $x_2 = \alpha^2 - \alpha^3$ y $\alpha \neq 1$ entonces demuestre que

$$\alpha^5 = 1 \implies x_1^2 + x_2^2 = -5$$

Etapa 1. Reemplazamos directamente los valores de x_1 y x_2 y obtenemos,

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= (\alpha-\alpha^4)^2 + (\alpha^2-\alpha^3)^2\\
&= \alpha^2 - 2\alpha^5 + \alpha^8 + \alpha^4 - 2\alpha^5 + \alpha^6\\
&= \alpha^2 - 2 + \alpha^3 + \alpha^4 - 2 + \alpha\\
&= -4 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Etapa 2. Aplicando nuestra información tenemos que

- $\dfrac{\alpha^5-1}{\alpha-1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$
- $\alpha^5 - 1 = 0$

entonces

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0 \Longleftrightarrow \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1$$

Finalmente sustituyendo en $(*)$ obtenemos el resultado

$$x_1^2 + x_2^2 = -5$$

(10) Si α es una raíz cúbica de la unidad, $\alpha \neq 1$ pruebe que

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5) = 9$$

En efecto

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5) &= (1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha)(1-\alpha^2) \qquad (\text{Pues, } \alpha^3 = 1)\\
&= (1-\alpha)^2(1-\alpha^2)^2\\
&= (1-2\alpha+\alpha^2)(1-\alpha^2)^2 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Observamos además que como

$$\frac{\alpha^3-1}{\alpha-1} = 1 + \alpha + \alpha^2$$

Entonces

$$\alpha^3 = 1 \Longrightarrow 1 + \alpha + \alpha^2 = 0 \Longrightarrow \alpha^2 = -1 - \alpha$$

Así que sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5) &= (1-2\alpha-1-\alpha)(1+1+\alpha)^2 \\
&= (-3\alpha)(2+\alpha)^2 \\
&= (-3\alpha)(4+4\alpha+\alpha^2) \\
&= (-3\alpha)(3+1+3\alpha+\alpha+\alpha^2) \\
&= (-3\alpha)(3+3\alpha) \\
&= -9\alpha-9\alpha^2 \\
&= -9(\alpha+\alpha^2) \\
&= -9(-1) \\
&= 9
\end{aligned}$$

(11) Demuestre que $(1+\omega_3^2)^3 + 1 = 0$

Solución

Directamente calculamos $(1+\omega_3^2)^3 + 1$.

$$\begin{aligned}
(1+\omega_3^2)^3 + 1 &= 1 + 3\omega_3^2 + 3\omega_3^4 + \omega_3^6 + 1 \\
&= 1 + 3\omega_3^2 + 3\omega_3 + 1 + 1 \\
&= 3(1 + \omega_3^2 + \omega_3) \\
&= 3 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(12) Si $z = 1 + \omega_3^n + \omega_3^{2n}$ entonces demuestre que

(a) n divisible por 3 $\Longrightarrow z = 3$
Solución

Si n divisible por 3 entonces $n = 3k$, para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces sustituyendo en z tenemos que

$$\begin{aligned}
z &= 1 + \omega_3^{3k} + \omega_3^{6k} \\
&= 1 + (\omega_3^3)^k + (\omega_3^3)^{2k} \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

(b) n no divisible por 3 $\Longrightarrow z = 0$

Solución
Si n no es divisible por 3 entonces $n = 3k+1$ o $n = 3k+2$ para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces sutituyendo en z tenemos que

$$\begin{aligned}
z &= 1 + \omega_3^{3k+1} + \omega_3^{6k+2} \\
&= 1 + \omega_3 + \omega_3^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned} z &= 1+\omega_3^{3k+2}+\omega_3^{6k+4} \\ &= 1+\omega_3^2+\omega_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(13) Si consideramos la ecuación $F_8 \cdot X = \widehat{X}$, donde

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{7)} \end{pmatrix}}_{\text{Datos}} \qquad \wedge \qquad \widehat{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \widehat{x}_0 \\ \widehat{x}_1 \\ \vdots \\ \widehat{x}_{(7)} \end{pmatrix}}_{\text{Transformados}}$$

entonces para cada $(k = 0, 1, 2, \dots, 7)$ se tiene que:

$$\widehat{x}_k \;=\; \sum_{n=0}^{3} x_{2n}\omega_4^{kn} + \omega_8^k \sum_{n=0}^{3} x_{2n+1}\omega_4^{kn}$$

En efecto

Si $n = 2^3$ tenemos para $(k = 0, 1, 2, \dots, 7)$ por definición que

$$\begin{aligned} \widehat{x}_k &= \sum_{n=0}^{2^3-1} x_n\omega_8^{kn} \\ &= x_0\omega_8^0 + x_1\omega_8^k + x_2\omega_8^{2k} + x_3\omega_8^{3k} + x_4\omega_8^{4k} + x_5\omega_8^{5k} + x_6\omega_8^{6k} + x_7\omega_8^{7k} \\ &= x_0\omega_8^0 + x_1\omega_8^k + x_2\omega_4^k + x_3\omega_4^k\omega_8^k + x_4\omega_4^{2k} + x_5\omega_4^{2k}\omega_8^k + x_6\omega_4^{3k} + x_7\omega_4^{3k}\omega_8^k \\ &= x_0 + x_2\omega_4^k + x_4\omega_4^{2k} + x_6\omega_4^{3k} + x_1\omega_8^k + x_3\omega_4^k\omega_8^k + x_5\omega_4^{2k}\omega_8^k + x_7\omega_4^{3k}\omega_8^k \\ &= x_0 + x_2\omega_4^k + x_4\omega_4^{2k} + x_6\omega_4^{3k} + (x_1 + x_3\omega_4^k + x_5\omega_4^{2k} + x_7\omega_4^{3k})\omega_8^k \\ &= \sum_{n=0}^{3} x_{2n}\omega_4^{kn} + \omega_8^k \sum_{n=0}^{3} x_{2n+1}\omega_4^{kn} \end{aligned}$$

Indice Alfabético

Algoritmo para determinar la matriz inversa, 23
Anillo conmutativo con identidad, 1
Anillo de matrices, 3
Anillos, 1

Determinante de orden 2, 6
Determinante de orden n, 7

Método de Laplace, 7
Matrices equivalentes por filas, 17
Matriz adjunta, 13
Matriz de cofactores, 13
Matriz elemental, 19
Matriz escalonada reducida por filas, 18
Matriz escalonada por filas, 18
Matriz invertible o no singular, 13

Propiedades del determinante, 7

Rango de una matriz, 18

Situaciones de Desempeño: Estructura de Anillo, 27
Solución de situaciones de desempeño: Estructura de Anillo, 30

Unidad de un anillo, 1

Contenidos

1.	Construcción intuitiva del Cuerpo de Números Complejos	1
2.	Construcción algebraica de $\mathbb{C}$	5
3.	Interpretación Geométrica de $\mathbb{C}$	7
4.	Aplicaciones	10
5.	Ejercicios Propuestos	13
6.	Situaciones de Desempeño: Números Complejos	16
7.	Solución de Situaciones de Desempeño: Números Complejos	18
Indice Alfabético		25