Rudimentos 6: Relaciones
Profesor Ricardo Santander

El capitulo esta destinado a presentar contenidos y actividades que permitirán al estudiante generar relaciones entre los elementos de uno o más conjuntos, a fin de dotar, emular o copiar estructuras algebraicas con propiedades interesantes, las cuales le permitirán gestionar, identificar y clasificar de forma eficiente situaciones algebraicas complejas

1. Ideas Básicas

♦ ¿ Por qué admitir que $\frac{2}{2} = \frac{3}{3}$, si son de formas absolutamente diferentes?

Quizás se dirá porque, existe una única forma de repartir dos partes de dos, es decir $\frac{2}{2} = 1$ y lo mismo para tres, es decir, $\frac{3}{3} = 1$

♦ Lo mismo diremos para justificar $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, pues $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0.5$

♦ Si en un rectángulo ABCD hacemos por decreto $\overline{AC} = \overline{BD}$, obtenemos una figura geométrica conocida como cilindro

En efecto

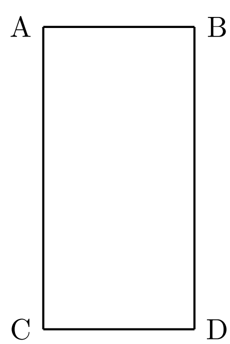

figura 1: Rectángulo

$\Longrightarrow$

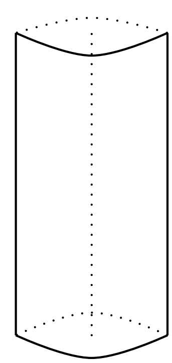

figura 2: Cilindro

Aquí, podemos observar lo que significa "pegar en el lenguaje de la Matemática", es decir "basta con definir que esos lados son iguales". Así que en resumen un cilindro es un rectángulo con sus lados "identificados" como iguales.

En cualquier caso la cuestión es la misma, se "identifican" elementos diferentes en su forma y terminan confundiéndose

Definición 1.1. *Convengamos en primera instancia que, dos enteros estarán relacionados (”dos enteros serán considerados iguales bajo estas circunstancias”), si al dividir a cada uno de ellos por dos el resto es cero.*

Adoptaremos la siguiente notación: Si $m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$m \, \Re_1 \, n \iff (\exists k_1; k_1 \in \mathbb{Z}) : m = 2k_1 \wedge (\exists k_2; k_2 \in \mathbb{Z}) : n = 2k_2$$

- ⋄ En primer lugar, los enteros pares están todos relacionados, es decir son todos iguales bajo esta ley, pues si $n \in \mathbb{Z}$ es par entonces $n = 2k + 0$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

- ⋄ En segundo lugar, como debemos comparar enteros entonces generaremos un espacio para escribir la información:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; = \;\; \{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 1.1.1. $(2, 4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Ejemplo 1.1.2. $(-1, 6) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Ejemplo 1.1.3. $(4, 11) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Ejemplo 1.1.4. $(-3, 13) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- ⋄ De acuerdo a los ejemplos y nuestra experiencia sólo están relacionados los enteros pares, sin embargo, si $n = 2k + 1$ y $m = 2s + 1$ entonces $n - m = 2(k - s)$ es decir, aunque el 3 no es divisible por 2 y el 5 tampoco, pero si lo es (5-3)

Motivados por lo anterior podemos definir la relación más general:

Definición 1.2. *Si* $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *entonces*

$$r \;\cong\; s \;\; (mod\, 2) \iff (\exists k, k \in \mathbb{Z}) \mid r - s = 2k$$

- ⋄ *Esta definición tiene el siguiente significado: Dos elementos se relacionarán o serán considerados iguales, si al dividir a cada uno de ellos por 2 poseen el mismo resto*

- ⋄ *Esta forma de relacionar elementos enteros se acostumbra a leer como: ”r congruente a s módulo 2”*

- ⋄ *Por ejemplo:*

- $2 \;\cong\; 4 \;\; (mod\; 2)$ *pues* $2 = 2 \cdot 1 + 0$ *y* $4 = 2 \cdot 2 + 0$. *Es decir*

$$
\begin{array}{rl}
 & 2 \;:\; 2 = 1 \\
- & 2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & 4 \;:\; 2 = 4 \\
- & 4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Igual resto

Figura 3: Equivalentes módulo 2

- $18 \;\ncong\; 7 \;\; (mod\; 2)$, *pues* $18 = 2 \cdot 9 + 0$ *y* $7 = 2 \cdot 3 + 1$

$$
\begin{array}{rl}
 & 18 \;:\; 2 = 9 \\
- & 2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & 7 \;:\; 2 = 3 \\
- & 4 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

Distinto resto

Figura 4: No equivalentes módulo 2

Observación 1.3. *Después de definir esta relación podemos observar lo siguiente*

$$(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Longrightarrow r \;\cong\; s \;\; (mod\; 2) \;\vee\; r \;\ncong\; s \;\; (mod\; 2) \qquad (*)$$

entonces tiene sentido preguntar, si existe o no un criterio para caracterizar uno u otro caso en $(*)$

- ◇ Para responder a esta interrogante, precisemos que aunque se analizan pares de enteros, la comparación se hace al interior de $\mathbb{Z}$, (No debemos olvidar el dilema inicial $\frac{2}{2} = \frac{3}{3}$).

- ◇ En la misma linea de reflexión, podemos preguntar ¿Cómo se comporta esta relación entre enteros, con la suma y multiplicación de enteros?. Es decir, si $r \;\cong\; s \;\; (mod\; 2)$ entonces para $p \in \mathbb{Z}$, ¿$(r + p \;\cong\; s + p \;\; (mod\; 2)$? y ¿$r \cdot p \;\cong\; s \cdot p \;\; (mod\; 2)$?

  - Por ejemplo, $[2 \;\cong\; 4 \;\; (mod\; 2)]$ y $[2+5 \;\cong\; 4+5 \;\; (mod\; 2)]$, pues $7 - 9 = -2$ y $[2 \cdot 5 \;\cong\; 4 \cdot 5 \;\; (mod\; 2)]$, pues $10 - 20 = -10$

  - En general, como $r \;\cong\; s \;\; (mod\; 2) \Longleftrightarrow r - s = 2k$ entonces
$$
\begin{aligned}
r + p - (s + p) = r - s = 2k &\quad\Longrightarrow\quad r + p \;\cong\; s + p \;\; (mod\; 2) \\
r \cdot p - s \cdot p = (r - s) \cdot p = 2kp &\quad\Longrightarrow\quad r + p \;\cong\; s + p \;\; (mod\; 2)
\end{aligned}
$$

- ◇ Motivados por la idea anterior podemos definir lo siguiente
$$\overline{r} \;\;=\;\; \{s \in \mathbb{Z} \mid s \;\cong\; r \;\; (mod\; 2)\}$$
  Es decir,

$$
\begin{aligned}
s \in \overline{r} &\iff s \in \mathbb{Z} \ \wedge \ s \ \cong \ r \ \ (mod\, 2)\\
&\iff s \in \mathbb{Z} \ \wedge \ s - r = 2k\\
&\iff s \in \mathbb{Z} \ \wedge \ s = r + 2k
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\boxed{\overline{r} \ \ = \ \ \{r + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}}
$$

Ejemplo 1.3.1. $\overline{0} = \{0 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\} = \{\mathit{Números\ pares}\}$

Ejemplo 1.3.2. $\overline{1} = \{1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\} = \{\mathit{Números\ impares}\}$

Conclusión 1.4. *Si escogemos $z \in \mathbb{Z}$ entonces $z = 2u$ ó $z = 2u + 1$, para algún $u \in \mathbb{Z}$. Luego*

- $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1}$ *y* $\overline{0} \cap \overline{1} = \{0\}$

  En efecto

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{2u} \ \vee \ \overline{2u + 1}\\
&= \{2u + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \ \vee \ \{2u + 1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}\\
&= \{2(u + k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \ \vee \ \{2(u + k) + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\\
&= \overline{0} \ \vee \ \overline{1}
\end{aligned}
$$

  Así que, $\mathbb{Z} \subset \overline{0} \cup \overline{1}$ y como $\overline{0} \subset \mathbb{Z}$ y $\overline{1} \subset \mathbb{Z}$ entonces $\overline{0} \cup \overline{1} \subset \mathbb{Z}$, y por tanto $\overline{0} \cup \overline{1} = \mathbb{Z}$

  Además,

$$
\begin{aligned}
z \in [\overline{0} \cap \overline{1}] &\iff z \in \overline{0} \ \wedge \ z \in \overline{1}\\
&\iff z = 0 + 2k_1 \ \ \mathit{Para\ algún}\ k_1 \in \mathbb{Z} \ \wedge \ z = 1 + 2k_2 \ \ \mathit{Para\ algún}\ k_2 \in \mathbb{Z}\\
&\iff 2k_1 = 1 + 2k_2\\
&\iff 2(k_1 - k_2) = 1\\
&\iff (k_1 - k_2) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

  Así que tales k_1 y k_2 no existen, y $\overline{0} \cap \overline{1} = \emptyset$

- *Si llamamos $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, este conjunto se conoce como los enteros módulo 2, entonces por lo visto, hasta aquí, podemos definir las operaciones*

$$
\begin{aligned}
\overline{r} + \overline{s} &= \overline{r + s}\\
\overline{r} \cdot \overline{s} &= \overline{r \cdot s}
\end{aligned}
$$

- *Por ejemplo* $\overline{5} + \overline{3} = \overline{5 + 3} = \overline{8} = \overline{0}$ *y* $\overline{5} \cdot \overline{3} = \overline{15} = \overline{1}$

Aplicación 1.5. *Si $r \in \mathbb{Z}$ entonces se recuerda que en base 10 este entero se representa como:*

$$r = a_s \cdot 10^s + a_{s-1} \cdot 10^{s-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^{s} a_i 10^i \quad (0 \leq a_i \leq 9)$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 233 &= 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \\ 42 &= 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \\ 7 &= 7 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Ahora, podemos intentar aplicar lo que aprendimos, en la siguiente secuencia de cálculos:

$$\begin{aligned}
&\blacklozenge \quad r = a_s \cdot 10^s + a_{s-1} \cdot 10^{s-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \\
&\blacklozenge \quad \overline{r} \cong \overline{a_s \cdot 10^s + a_{s-1} \cdot 10^{s-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0} \\
&\blacklozenge \quad \overline{r} \cong \overline{a_s \cdot 10^s} + \overline{a_{s-1} \cdot 10^{s-1}} + \cdots + \overline{a_1 \cdot 10^1} + \overline{a_0 \cdot 10^0} \\
&\blacklozenge \quad \overline{r} \cong \overline{a_s} \cdot \overline{10^s} + \overline{a_{s-1}} \cdot \overline{10^{s-1}} + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{10^1} + \overline{a_0} \cdot \overline{1} \\
&\blacklozenge \quad \overline{r} \cong \overline{a_s} \cdot (\overline{10})^s + \overline{a_{s-1}} \cdot (\overline{10})^{s-1} + \cdots + \overline{a_1} \cdot (\overline{10})^1 + \overline{a_0} \\
&\blacklozenge \quad \overline{r} \cong \overline{a_s} \cdot (\overline{0})^s + \overline{a_{s-1}} \cdot (\overline{0})^{s-1} + \cdots + \overline{a_1} \cdot (\overline{0})^1 + \overline{a_0} \\
&\blacklozenge \quad \overline{r} = \overline{a_0}
\end{aligned} \tag{1}$$

Luego la aplicación que obtenemos es la siguiente:

$$\boxed{r \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad r = \sum_{i=0}^{s} a_i 10^i \Longrightarrow r \cong a_0 \ (mod\ 2)}$$

Lo que significa que r es par si y sólo si su última cifra es par

Ejemplo 1.5.1. 146 *es par*

En efecto

$$\begin{aligned} \overline{146} &= \overline{1} \cdot (\overline{10})^2 + \overline{4} \cdot (\overline{10})^1 + \overline{6} \cdot (\overline{10})^0 \\ &= \overline{1} \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot (\overline{0}) + \overline{0} \cdot \overline{1} \\ &= \overline{0} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.2. 233 *es impar*

En efecto

$$\begin{aligned} \overline{233} &= \overline{2} \cdot (\overline{10})^2 + \overline{3} \cdot (\overline{10})^1 + \overline{3} \cdot (\overline{10})^0 \\ &= \overline{0} \cdot \overline{0} + \overline{1} \cdot \overline{0} + \overline{1} \cdot \overline{1} \\ &= \overline{1} \cdot \overline{1} \\ &= \overline{1} \end{aligned}$$

Ahora generalizamos el comportamiento módulo 2 a cualquier entero n:

Definición 1.6. *Para $n \in \mathbb{Z}$ fijo definimos la relación "Congruencia módulo n", como sigue:*

$$r \ \cong \ s \quad (mod\, n) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists k; k \in \mathbb{Z}) : r - s = nk$$

Esta definición tiene el siguiente significado: Dos elementos se relacionarán o serán considerados iguales, si al dividir a cada uno de ellos por n poseen el mismo resto

Ejemplo 1.6.1. $5 \cong 14 \quad (\text{mód } 3)$, *pues* $5 - 14 = -9 = 3(-3)$. *Observen que al dividir* 5 *y* 14 *por* 3 *el resto es* 2.

Ejemplo 1.6.2. $16 \ncong 5 \quad (\text{mód } 3)$, *pues* $16 - 5 = 11$ *no es divisible por* 3. *Observen que al dividir* 16 *por* 3 *el resto es* 1, *y al dividir* 5 *por* 3 *el resto es* 2.

Definición 1.7. *Si $r \in \mathbb{Z}$ entonces llamaremos clase de equivalencia módulo n de r, al conjunto*

$$\overline{r} \ = \ \{s \in \mathbb{Z} \mid s \ \cong \ r \ \ (mod\, n)\}$$

Equivalentemente los elementos de una clase de equivalencia se caracterizan como:

$$\begin{aligned} s \in \overline{r} \quad &\Longleftrightarrow \quad s \in \mathbb{Z} \ \wedge \ s \ \cong \ r \ \ (mod\, n) \\ &\Longleftrightarrow \quad s \in \mathbb{Z} \wedge (\exists k; k \in \mathbb{Z}) : s - r = nk \\ &\Longleftrightarrow \quad s \in \mathbb{Z} \ \wedge \ s = r + nk \end{aligned}$$

Así que,

$$\boxed{\overline{r} \ = \ \{r + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

Ejemplo 1.7.1. *Para $n = 3$ tenemos que*

- $\overline{0} = \{0 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$
- $\overline{1} = \{1 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -2, 1, 4, 7, \cdots\}$
- $\overline{2} = \{2 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -1, 2, 5, 8, \cdots\}$
- $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2}$, *pues los restos posible al dividir por* 3 *son exactamente* $0, 1, 2$

Ejemplo 1.7.2. *En general,* $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cdots \cup \cdots \cup \overline{n-1}$, *pues los restos al dividir un entero por n, son exactamente* $0, 1, 2, \ldots, n-1$

Definición 1.8. *Para $n \in \mathbb{Z}$, llamaremos enteros módulo n, al conjunto*

$$\mathbb{Z}_n \ = \ \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

Ejemplo 1.8.1. *Así tenemos para $N = 2, 3, 4$*

- $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$
- $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$
- $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

Observación 1.9. *Ahora que tenemos caracterizadas las clases de equivalencia, podemos hacer lo siguiente:*

$$\begin{aligned} m \in (\overline{r} + \overline{s}) &\iff (\exists k_1; k_1 \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists k_2; k_2 \in \mathbb{Z}) : m = (r + nk_1) + (s + nk_2) \\ &\iff (\exists k_1; k_1 \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists k_2; k_2 \in \mathbb{Z}) : m = r + s + n(k_1 + k_2) \\ &\iff m \in \overline{(r + s)} \end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{\overline{r+s} = \overline{r} + \overline{s}}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} m \in (\overline{r} \cdot \overline{s}) &\iff (\exists k_1; k_1 \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists k_2; k_2 \in \mathbb{Z}) : m = (r + nk_1) \cdot (s + nk_2) \\ &\iff (\exists k_1; k_1 \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists k_2; k_2 \in \mathbb{Z}) : m = rs + n(k_1 s + k_2 r + k_1 k_2) \\ &\iff m \in \overline{(r \cdot s)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{r \cdot s} = \overline{r} \cdot \overline{s}}$$

Ejemplo 1.9.1. *Para* $n = 5$

$\overline{7} + \overline{9} = \overline{16} = \overline{1}$, *y*
$\overline{7} \cdot \overline{9} = \overline{63} = \overline{3}$

Ejemplo 1.9.2. *Para* $n = 11$

$\overline{23} + \overline{45} = \overline{68} = \overline{2}$, *y*
$\overline{23} \cdot \overline{45} = \overline{1035} = \overline{1}$

2. Criterios de divisibilidad

Aplicaremos las congruencias módulo n, para construir criterios de divisibilidad de los números enteros. Consideraremos en forma sucinta, las siguientes etapas:

Definición 2.1. *Diremos que* $p \in \mathbb{Z}$ *divide a* $q \in \mathbb{Z}$ *si existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $q = pk$. *Usaremos la siguiente notación:*

$$p \mid q \iff (\exists k; k \in \mathbb{Z}) : q = pk$$

Ejemplo 2.1.1. $2 \mid 6$, *pues* $6 = 2 \cdot 3$

Ejemplo 2.1.2. $7 \mid 154$, *pues* $154 = 7 \cdot 22$

Ejemplo 2.1.3. $2 \not\mid 5$, *pues la "ecuación* $2x = 5$ *no tiene solución en* $\mathbb{Z}$*"*

Definición 2.2. *Dado* $n \in \mathbb{Z}$. *Diremos que poseemos un criterio de divisibilidad para* n *si poseemos un procedimiento "simple y eficiente" para responder la pregunta: Si* $p \in \mathbb{Z}$ *entonces ¿*$n \mid p$*?*

Definición 2.3. *Para obtener criterios de divisibilidad usaremos la misma idea empleada en* (1)*. Es decir si* $r \in \mathbb{Z}$ *es tal que* $r = \sum_{i=0}^{s} a_i 10^i \quad (0 \leq a_i \leq 9)$ *entonces aplicando la relación congruencia módulo* n *tenemos la ecuación fundamental*

$$\boxed{\overline{r} \;\; = \;\; \sum_{i=0}^{s} \overline{a_i} \;\; \overline{10}^{\,i} \qquad (mod\ n)} \tag{2}$$

Teorema 2.4. Criterio de divisibilidad para n = 3

$$\boxed{3 \mid r \Longleftrightarrow r = \sum_{i=0}^{s} a_i 10^i \quad (0 \leq a_i \leq 9) \;\wedge\; 3 \;\Bigg|\; \sum_{i=0}^{s} a_i} \tag{3}$$

En efecto, de la fórmula (2) *sigue que,*

$$\begin{aligned}
3 \mid r \quad &\Longleftrightarrow \quad (\exists k; k \in \mathbb{Z}) \;:\; r = 3k \\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{r} = \overline{0} \qquad\qquad (mod\ 3) \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{s} \overline{a_i} \;\; \overline{10}^{\,i} = \overline{0} \qquad (mod\ 3) \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{s} \overline{a_i} = \overline{0} \qquad (mod\ 3) \qquad (\overline{10} = \overline{1}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{\sum_{i=0}^{s} a_i} = \overline{0} \qquad (mod\ 3) \qquad (\overline{10} = \overline{1})
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1. $3 \mid 78$, *pues* $78 = 7 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0$ *y* $7 + 8 = 15 = 3 \cdot 5$

Ejemplo 2.4.2. $3 \mid 691872$, *pues* $6 + 9 + 1 + 8 + 7 + 2 = 33 = 3 \cdot 11$

Ejemplo 2.4.3. $3 \not| \, 333333333331$, *pues* $3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+1 = 34$ *y* $3 \not| \, 34$

Teorema 2.5. Criterio de divisibilidad para n = 5

$$\boxed{5 \mid r \Longleftrightarrow \left[r = \sum_{i=0}^{s} a_i 10^i \quad (0 \leq a_i \leq 9) \right] \;\wedge\; [a_0 = 0 \vee a_0 = 5]} \tag{4}$$

En efecto, de la fórmula (2) *sigue que*

$$\begin{aligned}
5 \mid r &\iff (\exists k; k \in \mathbb{Z}) \; : \; r = 5k \\
&\iff \overline{r} = \overline{0} \qquad\qquad (mod\ 5) \\
&\iff \sum_{i=0}^{s} \overline{a_i}\,\overline{10}^i = \overline{0} \qquad (mod\ 5) \\
&\iff \overline{a_0} = \overline{0} \qquad (mod\ 5) \qquad (\overline{10} = \overline{0}) \\
&\iff 5 \mid a_0
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.5.1. $5 \mid 90$

Ejemplo 2.5.2. $5 \mid 4444444445$

Ejemplo 2.5.3. $5 \not| \, 55555555555554$

Teorema 2.6. Criterio de divisibilidad para n = 11

$$\boxed{11 \mid r \iff \left[r = \sum_{i=0}^{s} a_i 10^i \quad (0 \leq a_i \leq 9) \right] \; \wedge \; 11 \; \left| \; \sum_{i=0}^{s} (-1)^i a_i \right.} \tag{5}$$

En efecto, de la fórmula (2) *sigue que,*

$$\begin{aligned}
11 \mid r &\iff (\exists k; k \in \mathbb{Z}) \; : \; r = 11k \\
&\iff \overline{r} = \overline{0} \qquad\qquad (mod\ 11) \\
&\iff \sum_{i=0}^{s} \overline{a_i}\; \overline{10}^{\,i} = \overline{0} \qquad (mod\ 11) \\
&\iff \sum_{i=0}^{s} \overline{a_i}\; (\overline{-1})^i = \overline{0} \qquad (mod\ 11) \quad (\overline{10} = \overline{-1})
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.1. $11 \mid 99$

Ejemplo 2.6.2. $11 \mid 3443$

Ejemplo 2.6.3. $11 \not| \, 11111$

3. El concepto de Relación

Ya observamos que la idea de una relación es comparar dos o más elementos, por tanto lo primero que debemos hacer es construir un ambiente, donde sea posible comparar elementos y clasificar conjuntos

Definición 3.1. *Si A y B son dos conjuntos entonces llamaremos producto cartesiano de A y B al conjunto*

$$A \times B \quad = \quad \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

En particular, notaremos $A \times A = A^2$

Ejemplo 3.1.1. *Si* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{a, b\}$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}, \ \ y \\
B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.1.2. *Si* $A = \{1, 2, 3\}$ *entonces*

$$
A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}
$$

Definición 3.2. *Diremos que* R *es una relación de* A *en* B *si* $R \subset A \times B$

Ejemplo 3.2.1. *Si* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{a, b\}$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(p, q) \in A \times B \mid p = 1\} \\
&= \{(1, a), (1, b)\} \subset A \times B \quad \textit{es una relación de } A \textit{ en } B \\
\\
R_2 &= \{(p, q) \in B \times A \mid q = 1\} \\
&= \{(a, 1), (b, 1)\} \subset B \times A \quad \textit{es una relación de } B \textit{ en } A
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.2.2. *Si* $A = \{1, 2, 3\}$ *entonces define las relaciones*

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{(m, n) \in \mathbb{A} \times A \mid m = n\} \\
&= \{(m, m) \mid m \in \mathbb{A}\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \{(m, n) \in \mathbb{A} \times A \mid m + n = 4\} \\
&= \{(m, 4 - m) \mid m \in \mathbb{A}\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}
\end{aligned}
$$

Observen que la situación gráfica en este caso es la siguiente.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \overset{\bullet}{(1,3)} & \overset{\bullet}{(2,3)} & \overset{\bullet}{(3,3)} & \\
 & \overset{\bullet}{(1,2)} & \overset{\bullet}{(2,2)} & \overset{\bullet}{(3,2)} & \\
 & \overset{\bullet}{(1,1)} & \overset{\bullet}{(2,1)} & \overset{\bullet}{(3,1)} & \\
U_1 & & A \times A & & U_2
\end{array}
$$

Figura 5 : Gráfico de las relaciones U_1 y U_2

3.3. Elementos básicos de una Relación.

Definición 3.3.1. *Si A y B son dos conjuntos y $R \subset A \times B$ entonces*

- *Notaremos $(a.b) \in R \Longleftrightarrow a\ R\ b$*
- *El Dominio de R, será el conjunto $dom(R) = \{a \in A \mid (\exists b; b \in B) : a\ R\ b\}$*
- *La Imagen de R, será el conjunto $Img(R) = \{b \in B \mid (\exists a; a \in A) : a\ R\ b\}$*
- *La Imagen de un elemento $a \in \mathbb{A}$, será el conjunto $Img(a) = \{b \in B \mid a\ R\ b\}$*
- *El Gráfico de R, será el conjunto $Graf(R) = \{(a, b) \in A \times B \mid a \in dom(R)\}$*

Ejemplo 3.3.2. *Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ y*

$$R \ = \ \{(p, q) \in A \times B \mid p = 1\} = \{(1, a), (1, b)\} \subset A \times B$$

entonces

- *$dom(R) = \{1\} \subset A$*
- *$Img(R) = \{a, b\} \subset B$*

Ejemplo 3.3.3. *Sea $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y define la relación $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = x^2\}$ entonces su gráfico es del tipo:*

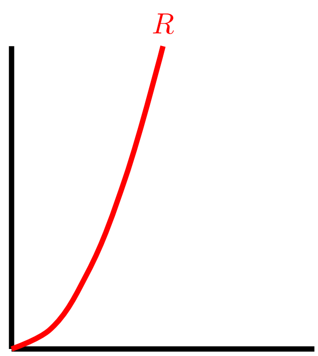

figura 6 : Gráfico de R

4. Construcción de Relaciones

Definición 4.1. *Si A y B son dos conjuntos y $R \subset A \times B$ entonces la Relación Inversa de R será el conjunto $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$. Es decir*

$$\left[(a, b) \in \ R \Longleftrightarrow (b, a) \in \ R^{-1}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \left[a\ R\ b \Longleftrightarrow b\ R^{-1}\ a\right]$$

Ejemplo 4.1.1. *Si $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = x^2\}$ entonces su gráfico, como vimos, es el de la figura 6, y su relación inversa es definida por*

$$R^{-1} = \{(x, y) \in A^2 \mid x = \sqrt{y}\}$$

Es decir

$$y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{y} \quad (x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$$

Y su gráfico es

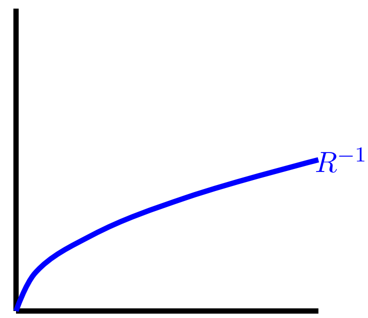

figura : 7: Gráfico de R^{-1}

Observación 4.1.2. *Juntando los gráficos de R y R^{-1} obtenemos el siguiente diseño:*

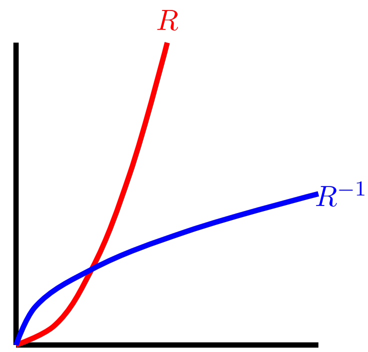

figura 8 : Gráfico de R y R^{-1}

Motivados por la figura : 8 definiremos una nueva relación, la relación compuesta

Definición 4.2. *Si A, B y C son tres conjuntos y $R_1 \subset A \times B$ y $R_2 \subset B \times C$ entonces llamaremos relación compuesta de las relaciones R_1 y R_2 al conjunto*

$$R_2 \circ R_1 \quad = \quad \{(a,c) \in A \times C \mid (\exists b, b \in B) : (a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2\}$$

Es decir

$$a\ (R_2 \circ R_1)\ c \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists b, b \in B) : [\ a\ R_1\ b \wedge b\ R_2\ c]$$

Podemos esquematizar la situación como sigue:

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} A & \overset{R_1}{\longmapsto} & B & \overset{R_2}{\longmapsto} & C \\ a & \longmapsto & b & \longmapsto & c \end{array}}_{R_2\ \circ R_1}$$

Ejemplo 4.2.1. *Si $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ y $C = \{p,q,r,s,t\}$ y $R_1 = \{(1,a),(1,b),(2,c)(3,b)\}$ y $R_2 = \{(a,p),(a,r),(b,s),(d,t)\}$ entonces*

$$R_2 \circ R_1 \quad = \quad \{(1,p),(1,r),(1,s),(3,s)\}$$

Su esquema es el siguiente:

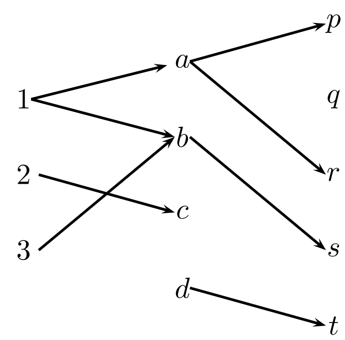

figura 9 : Gráfico de $R_2 \circ R_1$

Ejemplo 4.2.2. *Si* $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid y = x^2\}$ *y* $R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid y = \sqrt{x}\}$ *entonces*

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (R^{-1} \circ R) &\iff x \; (R^{-1} \circ R) \; y \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : (x,b) \in R \wedge (b,y) \in R^{-1} \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : (x \; R \; b) \wedge (b \; R^{-1} \; y) \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : (b = x^2) \wedge (y = \sqrt{b}) \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : y = \sqrt{x^2} \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : y = x \qquad (x \geq 0)
\end{aligned}$$

Luego,

$$R^{-1} \circ R = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}\}$$

Análogamente tenemos que

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (R \circ R^{-1}) &\iff x \; (R \circ R^{-1}) \; y \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : (x,b) \in R^{-1} \wedge (b,y) \in R \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : (x \; R^{-1} \; b) \wedge (b \; R \; y) \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : (b = \sqrt{x}) \wedge (y = b^2) \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : y = (\sqrt{x})^2 \qquad (x \geq 0) \\
&\iff (\exists b; b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}) : y = x
\end{aligned}$$

Luego,

$$R \circ R^{-1} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}\}$$

El gráfico de $(R^{-1} \circ R)$ *es el siguiente:*

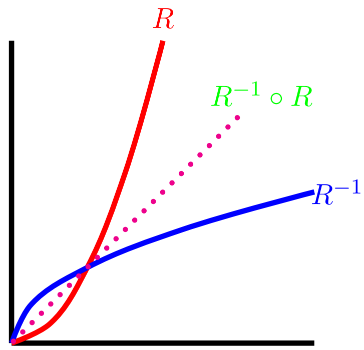

Figura 10: Gráfico de $R^{-1} \circ R$

Observen que la recta $y = x$ divide a la nueva figura en " partes iguales" !!!

5. Relaciones de equivalencia

Definición 5.1. *Si $\mathbb{A} \neq \emptyset$ y $R \subset \mathbb{A}^2$. Diremos que R es una relación reflexiva o refleja si*

$$a\ R\ a\ (\forall a; a \in \mathbb{A})$$

Ejemplo 5.1.1. *Si $A = \{1, 2, 3\}$ entonces*

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ *es una relación reflexiva o refleja*
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$ *no es una relación reflexiva o refleja, pues* $(3, 3) \notin R$

Definición 5.2. *Si $\mathbb{A} \neq \emptyset$ y $R \subset \mathbb{A}^2$. Diremos que R es una relación simétrica si*

$$a\ R\ b \Longrightarrow b\ R\ a$$

Ejemplo 5.2.1. *Si $A = \{1, 2, 3\}$ entonces*

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$ *es una relación simétrica*
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ *no es una relación simétrica, pues* $(2, 1) \notin R$

Definición 5.3. *Si $\mathbb{A} \neq \emptyset$ y $R \subset \mathbb{A}^2$. Diremos que R es una relación transitiva si*

$$a\ R\ b\ \wedge\ b\ R\ c \Longrightarrow a\ R\ c$$

Ejemplo 5.3.1. *Si $A = \{1, 2, 3\}$ entonces*

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3)\}$ *es una relación transitiva*
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ *no es una relación transitiva, pues* $(2, 2) \notin R$

Definición 5.4. *Si $\mathbb{A} \neq \emptyset$ y $R \subset \mathbb{A}^2$. Diremos que R es una relación de equivalencia si es simultáneamente*

- *Una relación Reflexiva*
- *Una relación Simétrica*
- *Una relación Transitiva*

Ejemplo 5.4.1. *En $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la relación congruencia módulo n definida en* **1.6**, *es una relación de equivalencia.*

En efecto

- $(\forall m, m \in \mathbb{Z})\ :\ m - m = 0 = n \cdot 0 \Longrightarrow m\ \cong\ m\ \ (mod\, n)$. *Luego la relación es reflexiva.*

- *Si suponemos que $r\ \cong\ s\ \ (mod\, n)$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m - s = nk$. Ahora*

$$m - s = nk \Longrightarrow -(m - s) = -nk \Longrightarrow s - m = n(-k) \Longrightarrow s\ \cong\ r\ \ (mod\, n)$$

  Así que la relación es simétrica

- *Si suponemos que $r\ \cong\ s\ \ (mod\ n)\ \wedge\ s\ \cong\ t\ \ (mod\ n)$ entonces existen $k_1 \in \mathbb{Z}$ y $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $m - s = nk_1$ y $s - t = nk_2$. Ahora*

$$(m - s = nk_1) \wedge (s - t = nk_2) \quad \Longrightarrow \quad m - s + s - t = nk_1 + nk_2 \Longrightarrow m - t = n(k_1 + k_2)$$

  Así que la relación es transitiva y por ende es una relación de equivalencia

5.5. Clases de equivalencia de una relación de equivalencia.

Definición 5.5.1. *Si $R \subset A^2$ es una relación de equivalencia. Llamaremos clase de equivalencia de $a \in R$ al conjunto*

$$\overline{a} = \{b \in A \mid a\ R\ b\} \tag{6}$$

Ejemplo 5.5.2. *Para la relación de congruencia módulo n definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que es una relación de equivalencia, tenemos para cada $r \in \mathbb{Z}$*

$$\overline{r} \quad = \quad \{r - nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Propiedad 5.5.3. $\overline{a} = \{b \in A \mid a\ R\ b\} \neq \emptyset$

En efecto

R es una relación de equivalencia, y entonces en particular es reflexiva, esto es $(a\ R\ a)\quad (\forall a; a \in A)$, así que $a \in \overline{a}$, y $\overline{a} \neq \emptyset$

Propiedad 5.5.4. $b \in \overline{a} \Longrightarrow \overline{a} = \overline{b}$

En efecto

$$b \in \overline{a} \iff b \in A \wedge a\ R\ b \qquad (*)$$

En primer lugar,

$$\begin{aligned} c \in \overline{b} &\implies c \in A \wedge b\ R\ c \\ &\overset{(*)}{\implies} a\ R\ b \wedge b\ R\ c \\ &\implies c \in A \wedge a\ R\ c \qquad (\ R \text{ es transitiva}) \\ &\implies c \in \overline{a} \end{aligned}$$

Luego, $\overline{b} \subset \overline{a}$

En segundo lugar,

$$\begin{aligned} c \in \overline{a} &\implies c \in A \wedge a\ R\ c \\ &\overset{(*)}{\implies} a\ R\ b \wedge a\ R\ c \\ &\implies b\ R\ a \wedge a\ R\ c \qquad (R \text{ es simétrica}) \\ &\implies c \in A \wedge b\ R\ c \qquad (\ R \text{ es transitiva}) \\ &\implies c \in \overline{b} \end{aligned}$$

Luego, $\overline{a} \subset \overline{b}$*, y por tanto,* $\overline{a} = \overline{b}$

Propiedad 5.5.5. $A = \displaystyle\bigcup_{a \in A} \overline{a}$

En efecto

$$a \in A \iff \overline{a} \in \bigcup_{a \in A} \overline{a}$$

Propiedad 5.5.6. $\overline{a} \neq \overline{b} \Longrightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$

En efecto

$$\begin{aligned} c \in \overline{a} \cap \overline{b} &\iff c \in \overline{a} \wedge c \in \overline{b} \\ &\iff c \in A \wedge [\ \overline{c} = \overline{a} \wedge \overline{c} = \overline{b}\ ] \\ &\implies \overline{a} = \overline{b} \end{aligned}$$

6. Aplicación de las Relaciones de Equivalencia: Construcción de los Números Enteros

6.1. Necesidad de plantear el problema. Si consideramos la ecuación

$$x + m = n \quad \text{con } m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

entonces ¿cuáles son todas las soluciones de (7)?.

Ejemplo 6.1.1. *Algunas ecuaciones de la forma son:*

- $x + 8 = 10$ *tiene solución en* $\mathbb{N}$, *pues* $2 + 8 = 10$
- $x + 6 = 7$ *tiene solución en* $\mathbb{N}$, *pues* $1 + 6 = 7$
- $x + 5 = 8$ *tiene solución en* $\mathbb{N}$, *pues* $3 + 5 = 8$
- $x + 8 = 5$ *no tiene solución en* $\mathbb{N}$, *pues* $(\nexists n; n \in \mathbb{N}) : n + 8 = 5$

Problema 6.2. *Para responder al problema planteado en* **6.1** *debemos considerar la siguiente restricción:*

- *Si* $m < n$ *entonces* $x_0 = n - m \in \mathbb{N}$ *es una solución de la ecuación* $x + m = n$
- *Si* $m \geq n$ *entonces* $n - m$, *no sólo no es un natural sino que ni siquiera esta definido*

Problema 6.3. $x_0 \in \mathbb{N}$ *puede ser solución de más de una ecuación del tipo* (7).

Ejemplo 6.3.1. *Algunas soluciones que consideran la restricción de la idea* **6.2**

$$\underbrace{\begin{array}{c}1+1=2\\1+2=3\\1+3=4\\1+4=5\\1+5=6\end{array}}_{x_0=1}\quad\underbrace{\begin{array}{c}2+1=3\\2+2=4\\2+3=5\\2+4=6\\2+5=7\end{array}}_{x_0=2}\quad\underbrace{\begin{array}{c}3+1=4\\3+2=5\\3+3=6\\3+4=7\\3+5=8\end{array}}_{x_0=3}\quad\underbrace{\begin{array}{c}4+1=5\\4+2=6\\4+3=7\\4+4=8\\4+5=9\end{array}}_{x_0=4}\quad\underbrace{\begin{array}{c}5+1=6\\5+2=7\\5+3=8\\5+4=9\\5+5=10\end{array}}_{x_0=5}$$

Idea 6.4. *Si asociamos a cada ecuación un par de elementos naturales como sigue:*

$$\boxed{(\ x + m = n\ ) \rightsquigarrow (n, m) \in \mathbb{N}^2}$$

entonces tenemos un modelo gráfico para visualizar los problemas **6.1** *y* **6.3**

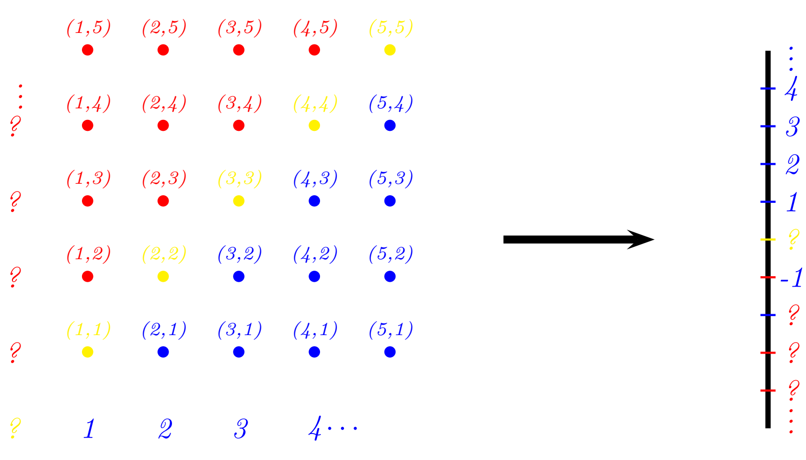

figura 11: Primera aproximación de los naturales a los enteros

Idea 6.5. *Para responder a los problemas planteados podemos intentar la siguiente estrategia*

- *En primer lugar, estudiamos que significa que un natural sea solución de dos ecuaciones del tipo* (7).

  Para ello supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_0 + m = n$ *y* $x_0 + m' = n'$ *entonces de su análisis obtenemos que:*

$$\left.\begin{array}{lcl} x_0 + m = n & \Longleftrightarrow & x_0 = n - m \\ x_0 + m' = n' & \Longleftrightarrow & x_0 = n' - m' \end{array}\right\} \Longrightarrow n + m' = n' + m \tag{8}$$

- *La respuesta es parcial porque* $x_0 \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow n > m$, *y por otra parte, si* $n \leq m$ *entonces* $x_0 \notin \mathbb{N}$.

- *Como queremos todas las soluciones de las ecuaciones de la forma* (7) *entonces siguiendo el resultado obtenido en* (8), *y recordando la asociación fundamental hecha en la idea* (**6.4**), *podemos archivar esto en la siguiente definición*

Definición 6.6. *En* $\mathbb{N}^2$, *definimos la relación* $\Re$ *como sigue:*

$$(n, m)\, \Re\, (n', m') \quad \Longleftrightarrow \quad n + m' = n' + m \tag{9}$$

Pregunta 6.6.1. *¿ Qué significa la relación* $\Re$ *definida en* (9)*?*

En forma intuitiva podemos interpretar la relación $\Re$ *como sigue*

- ♦ $(n, m)\, \Re\, (n', m') \Longleftrightarrow n + m' = n' + m \overset{???}{\Longleftrightarrow} n - m = n' - m'$

- ♦ *Ahora si observamos la igualdad* $n - m = n' - m'$ *entonces recordando lo hecho en* (8), *y en la identificación de una ecuación del tipo* (7) *con un par de naturales hecha en (6.4) podemos concluir lo siguiente:*

$$n - m = n' - m' \Longrightarrow (n, m)\Re(n', m')$$

  Y si $\Re$ *fuese un relación de equivalencia entonces tendríamos que las ecuaciones que tienen la misma solución son identificables (iguales las clases de pares de naturales bajo la relación). es decir*

$$n - m = n' - m' \Longrightarrow \overline{(n, m)} = \overline{(n', m')}$$

- ♦ *Es importante observar expresamente que para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $m \in \mathbb{N}$, *el objeto* $(n - m)$ *sólo tiene sentido hasta ahora, para* $n > m$, *en cuyo caso* $(n - m) \in \mathbb{N}$

Teorema 6.7. *La relación* $\Re$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración

- $(\forall (n, m); (n, m) \in \mathbb{N}^2)$ *tenemos que* $n+m = n+m$. *Así que* $(n, m)\, \Re\, (n, m)$ *y* $\Re$ *es una relación reflexiva*

- *Si* $(n,m)\,\Re\,(n',m')$ *entonces*

$$\begin{aligned}(n,m)\,\Re\,(n',m') &\iff n+m'=n'+m\\ &\implies n'+m=n+m'\\ &\implies (n',m')\,\Re\,(n,m)\end{aligned}$$

Así que $\Re$ *es una relación simétrica*

- *Si* $(n,m)\,\Re\,(n',m')\wedge(n',m')\,\Re\,(n'',m'')$ *entonces*

$$\begin{aligned}(n,m)\Re(n',m')\wedge(n',m')\Re(n'',m'') &\iff (n+m'=n'+m)\wedge(n'+m''=n''+m')\\ &\implies n+m'+n'+m''=n'+m+n''+m'\\ &\implies n+m''+(m'+n')=n''+m+(m'+n')\\ &\implies n+m''=n''+m\\ &\implies (n,m)\,\Re\,(n'',m'')\end{aligned}$$

Así que $\Re$ *es transitiva, y con las propiedades anteriores* $\Re$ *se torna una relación de equivalencia*

Corolario 6.7.1. *Para cada* $(n,m)\in\mathbb{N}^2$*, el conjunto* $\overline{(n,m)}=\{(r,s)\in\mathbb{N}^2\mid(n,m)\,\Re\,(r,s)\}$ *corresponde a su clase de equivalencia y* $\mathbb{N}^2=\bigcup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\overline{(n,m)}$

En efecto

Como $\Re$ *es una relación de equivalencia podemos determinar sus clases de equivalencia (ver (6)), y entonces*

$$\overline{(n,m)}=\{(r,s)\in\mathbb{N}^2\mid n+s=r+m\}$$

Además de la propiedad 5.5.5, sigue que $\mathbb{N}^2=\bigcup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\overline{(n,m)}$

Ejemplo 6.7.2. $\overline{(2,1)}=\{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),\dots\}$

Ejemplo 6.7.3. $\overline{(2,2)}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),\dots\}$

Ejemplo 6.7.4. $\overline{(2,3)}=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\dots\}$

Observación 6.8. *Como el "ambiente de trabajo" es* $\mathbb{N}^2$*, y los enteros son comparables respecto de la relación de orden* $<$ *entonces podemos consolidar alguno de los casos posibles, en el contexto de las clases de equivalencia. Así para el caso* $n>m$ *tenemos los siguientes resultados:*

[1] *Podemos ser más explícitos en el cálculo de la clase de equivalencia de* (n,m) *en el siguiente sentido.*

$$\begin{aligned}(r,s)\in\overline{(n,m)} &\iff (r,s)\in\mathbb{N}^2\wedge(r,s)\,\Re\,(n,m)\\ &\iff (r,s)\in\mathbb{N}^2\wedge r+m=n+s\\ &\iff (r,s)\in\mathbb{N}^2\wedge r=\underbrace{n-m}_{\in\mathbb{N}}+s\end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{\overline{(n,m)} = \{(n-m+s,s) \mid s \in \mathbb{N}\} = \{(r,s) \in \mathbb{N} \mid r-s = n-m\}} \tag{10}$$

[2] *Además recordando que en la idea 6.4 identificamos la ecuación $x+m=n$ con el par $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ entonces tenemos que*

$$n > m \Longrightarrow x_0 = n-m \in \mathbb{N} \;\wedge\; x_0 + m = n \;\rightsquigarrow\; (n,m)$$

[3] *Así que para $n > m$ hacemos la siguiente identificación (una nueva mirada a los naturales)*

$$\boxed{n - m \leftrightsquigarrow \overline{(n,m)}} \tag{11}$$

[4] *A esta alturas del análisis, les sugiero remirar la figura :11, para concluir por ejemplo que*

(i) $1 = \overline{(2,1)} = \overline{(3,2)} = \overline{(4,3)} = \cdots$

(ii) $5 = \overline{(6,1)} = \overline{(7,2)} = \overline{(8,3)} = \cdots$

(iii) $6 = \overline{(7,1)} = \overline{(8,2)} = \overline{(9,3)} = \cdots$

[5] *Mirando los ejemplos anteriores podemos observar que,*

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & = & \overline{(2,1)} & = & \overline{(3,2)} & = & \overline{(4,3)} & = & \cdots \\ + & 5 & = & \overline{(6,1)} & = & \overline{(7,2)} & = & \overline{(8,3)} & = & \cdots \\ & -- & & -- & & -- & & -- & & -- \\ & 6 & = & \overline{(7,1)} & = & \overline{(8,2)} & = & \overline{(9,3)} & = & \cdots \end{array}$$

Y nos sugiere el siguiente resultado

Lema 6.9. *Sean $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ y $(r,s) \in \mathbb{N}^2$ entonces*

$$(n,m)\Re(r,s) \quad\Longrightarrow\quad [n > m \Longrightarrow r > s] \vee [n = m \Longrightarrow r = s] \vee [n < m \Longrightarrow r < s]$$

En efecto

Supongamos que $(n,m)\Re(r,s)$ tal que $n > m \wedge r \leq s$ entonces

$$\begin{aligned} r \leq s \quad &\Longrightarrow \quad r+m \leq s+m \\ &\Longrightarrow \quad r+m < s+n \\ &\Longrightarrow \quad (n,m) \not\Re \,(r,s) \end{aligned}$$

Corolario 6.10. *Una nueva caracterización de los numeros naturales es la siguiente:*

$$\bigcup_{n>m} \overline{(n,m)} = \mathbb{N}$$

En efecto

- *En primer lugar, aplicando la fórmula obtenida en la idea* 6.4*, y fundamentalmente en la asociación* (10) *tenemos que*

$$\bigcup_{n>m}\overline{(n,m)}=\bigcup_{n>m}\overline{(n-m+s,s)}\qquad (\forall s; s\in\mathbb{N})$$

- *En segundo lugar, recordando las propiedades de la unión de conjuntos y especialmente como Peano construyó los naturales tenemos que,*

$$\bigcup_{n>m}\overline{(n-m+s,s)}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\overline{(r+1,1)}$$

- *En tercer y último lugar, por la genial asociación obtenida en* (11)*, obtenemos*

$$\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\overline{(r+1,1)}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}(r+1-1)=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}r=\mathbb{N}$$

Definición 6.11. *Llamaremos números enteros al conjunto*

$$\mathbb{Z} \;=\; \left[\bigcup_{n>m}\overline{(n,m)}\right]\bigcup\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{(n,n)}\right]\bigcup\left[\bigcup_{n<m}\overline{(n,m)}\right] \tag{12}$$

Lema 6.12. *En* $\mathbb{N}^2$ *la relación* $\Re$ *"respeta la operación suma de naturales". Es decir*

$$[(n,m)\Re(r,s)\wedge(n',m')\Re(r',s')]\implies (n+n',m+m')\Re(r+r',s+s')$$

En efecto

$$\begin{aligned}(n+n')+(s+s') &= (n+s)+(n'+s')\\ &= (r+m)+(r'+m')\\ &= (r+r')+(m+m')\end{aligned}$$

Así que, $(n+n',m+m')\;\Re\;(r+r',s+s')$

Definición 6.13. *En virtud del lema 6.12 definimos en* $\mathbb{Z}$ *la adición (relación de adición) como sigue,*

$$\overline{(r,s)}+\overline{(p,q)} \;=\; \overline{(r+p,s+q)} \tag{13}$$

Ejemplo 6.14. $\overline{(8,5)}+\overline{(4,2)}=\overline{(12,7)}$

Observen que aquí podemos identificar según lo convenido antes:

$$\overline{(8,5)}+\overline{(4,2)}=\overline{(12,7)}\iff(8-5)+(4-2)=(12-7)\iff 3+2=5$$

Ejemplo 6.15. $\overline{(9,12)} + \overline{(7,5)} = \overline{(16,17)}$

Ene este ejemplo, aún no tenemos interpretación "práctica" para $\overline{(9,12)}$ *y* $\overline{(16,17)}$

Observación 6.16. *Estudiemos en el espíritu de 6.8 los casos en que* $n \leq m$

[1] *Por una parte, por definición de adición en* $\mathbb{Z}$, *sabemos que* $\overline{(n,m)} + \overline{(s,s)} = \overline{(n+s, m+s)}$

Y por otra parte, $\overline{(n+s, m+s)} = \overline{(n,m)}$. *Pues,* $n+s+m = m+s+n$.

Así que,

$$\overline{(n,m)} + \overline{(s,s)} = \overline{(n,m)} \qquad (\forall (n,m); (n,m) \in \mathbb{N}^2), (\forall s; s \in \mathbb{N})$$

[2] *Por definición* $\overline{(n,m)} + \overline{(m,n)} = \overline{(n+m, m+n)}$

Definición 6.17. *En virtud de la observación 6.16 adoptaremos las siguientes convenciones:*

- *Asignaremos el símbolo "0" a la clase* $\overline{(s,s)}$. *Es decir*

$$0 : \;=\; \overline{(s,s)}$$

- *Si* $n > m$ *entonces* $(m-n) \in \mathbb{N}$, *y como* $\overline{(n,m)} + \overline{(m,n)} = \overline{(n+m, m+n)} = 0$, *asignaremos*

$$-(n-m) = \overline{(n,m)}$$

Conclusión 6.18. *Podemos resumir los hitos más importantes en nuestra construcción en los siguientes:*

[1] *Finalmente completamos la figura: 11.*

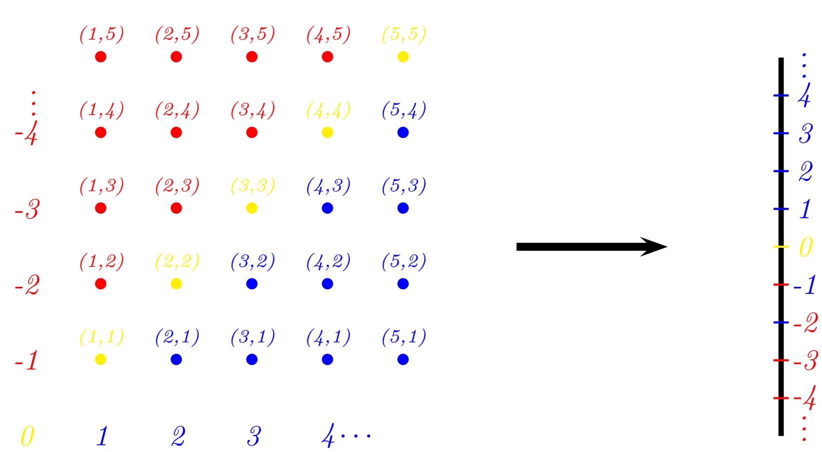

figura 12: Los números enteros

[2] $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

Ejemplo 6.19. *En el nuevo lenguaje en el conjunto* $\mathbb{Z}$

- $2 + 5 = 7 \Longleftrightarrow \overline{(3,1)} + \overline{(6,1)} = \overline{(8,1)}$
- $4 - 6 = -2 \Longleftrightarrow \overline{(5,1)} + \overline{(1,7)} = \overline{(2,4)}$
- $9 - 9 = 0 \Longleftrightarrow \overline{(10,1)} + \overline{(1,10)} = \overline{(1,1)}$

7. Aplicación de las Relaciones de Equivalencia: Construcción de los Números Racionales

7.1. Necesidad de plantear el problema. Si consideramos la ecuación

$$mx = n \quad \text{con } m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

entonces ¿cuáles son todas las soluciones de (14)?

Ejemplo 7.1.1. *Algunas ecuaciones de la forma son:*

- $2x = 6$ *tiene solución en* $\mathbb{Z}$*, pues* $2 \cdot 3 = 6$
- $3x = 7$ *no tiene solución en* $\mathbb{Z}$*, pues* $(\nexists z; z \in \mathbb{Z}) : 3z = 7$

Observación 7.2. *Ya adquirimos una experiencia al construir los números enteros, y entonces debemos intentar capitalizarla en este caso. Así que*

- *Si* $m|n$*, es decir* $(\exists k; k \in \mathbb{Z}) : n = mk$ *entonces* $x = \dfrac{n}{m} = k$ *es una solución de la ecuación* $mx = n$
- $z_0 \in \mathbb{Z}$ *puede ser solución de más de una ecuación del tipo* (14)*. Por ejemplo*

$$\underbrace{\begin{array}{l} 1\cdot 2 = 2 \\ 2\cdot 2 = 4 \\ 3\cdot 2 = 6 \\ 4\cdot 2 = 8 \\ 5\cdot 2 = 10 \end{array}}_{z_0 = 2} \quad \underbrace{\begin{array}{l} 1\cdot 3 = 3 \\ 2\cdot 3 = 6 \\ 3\cdot 3 = 9 \\ 4\cdot 3 = 12 \\ 5\cdot 3 = 15 \end{array}}_{z_0 = 3} \quad \underbrace{\begin{array}{l} 1\cdot 4 = 4 \\ 2\cdot 4 = 8 \\ 3\cdot 4 = 12 \\ 4\cdot 4 = 16 \\ 5\cdot 4 = 20 \end{array}}_{z_0 = 4} \quad \underbrace{\begin{array}{l} 1\cdot 5 = 5 \\ 2\cdot 5 = 10 \\ 3\cdot 5 = 15 \\ 4\cdot 5 = 20 \\ 5\cdot 5 = 25 \end{array}}_{z_0 = 5} \quad \underbrace{\begin{array}{l} 1\cdot 6 = 6 \\ 2\cdot 6 = 12 \\ 3\cdot 6 = 18 \\ 4\cdot 6 = 24 \\ 5\cdot 6 = 30 \end{array}}_{z_0 = 6}$$

- *Si suponemos que* z_0 *es solución de dos ecuaciones del tipo* (14) *entonces del análisis de la situación podemos colegir los siguiente*

$$\left.\begin{array}{lcl} mz_0 = n & \Longleftrightarrow & z_0 = \dfrac{n}{m} \\ m'z_0 = n' & \Longleftrightarrow & z_0 = \dfrac{n'}{m'} \end{array}\right\} \Longrightarrow nm' = n'm \tag{15}$$

- *La idea de divisibilidad nace de la relación de dos números enteros, así que podemos transferir el problema de la ecuación al producto cartesiano de enteros, a través de la identificación.*

$$\boxed{(\ mx = n\ ) \rightsquigarrow (n,m) \in \mathbb{Z}^2} \tag{16}$$

Definición 7.3. *Motivados por la fórmula obtenida en* (15)*, y por la asociación generada en* (16) *definimos la siguiente relación* $\Im \subset (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\})^2$ *como sigue*

$$(a,b)\ \Im\ (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad ad = cb$$

Ejemplo 7.3.1. *Algunos pares relacionados y no relacionados*

- $(1,1)\ \Im\ (33,33)$ *pues* $1\cdot 33 = 33 = 33\cdot 1$
- $(3,4)\ \Im\ (12,16)$ *pues* $3\cdot 16 = 48 = 12\cdot 4$
- $(7,13)\ \not\Im\ (2,3)$ *pues* $7\cdot 3 = 21$ *y* $2\cdot 13 = 26$

Teorema 7.4. *La relación* $\Im$ *es una relación de equivalencia*

Demostración

[1] *Como* $ab = ba \quad (\forall (a,b); (a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\})$ *entonces*

$$(a,b)\ \Im\ (a,b) \quad (\forall (a,b); (a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\})$$

Así que $\Im$ *es una relación reflexiva*

[2] *Si* $(a,b)\ \Im\ (c,d)$ *entonces* $ad = bc$*. Pero* $ad = da$ *y* $bc = cb$ *entonces* $cb = da$

Luego,

$$(a,b)R(c,d) \Longrightarrow (c,d)R(a,b)$$

Así que $\Im$ *es una relación simétrica*

[3] *Si* $(a,b)\ \Im\ (c,d) \wedge (c,d)\ \Im\ (e,f)$ *entonces* $ad = cb\ \wedge\ cf = ed$*. Luego,*

$$\begin{aligned} adf = bcf \quad &\Longrightarrow \quad adf = bde \\ &\Longrightarrow \quad af = be \qquad (d\neq 0) \end{aligned}$$

Luego, $(a,b)\ \Im\ (e,f)$ *y* $\Im$ *es una relación transitiva y entonces* $\Im$ *es una relación de equivalencia*

Corolario 7.4.1. *como* $\Im$ *es una relación de equivalencia entonces*

- *Para cada* $(a,b)\in(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\})$ *su clase de equivalencia es un conjunto bien definido y no vacío. Es decir*

$$\boxed{\overline{(a,b)} = \{(c,d)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\} \mid ad = bc\} \neq \emptyset \qquad (\forall (a,b); (a,b)\in(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}))} \tag{17}$$

- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\} = \bigcup\limits_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}} \overline{(a,b)}$

Conclusión 7.5. *Formalización de los números racionales*

[1] *Si* $(a,b)\ \Im\ (c,d)$ *entonces* $b|a \Longrightarrow d|c$

En efecto

$$[\ (a,b)\ \Im\ (c,d) \wedge b|a\ ] \Longrightarrow [\ ad = bc \wedge a = bk\ ] \Longrightarrow bkd = bc \Longrightarrow kd = c \Longrightarrow d|c$$

[2] *Si* $b|a$ *entonces existe* $k\in\mathbb{Z}$ *tal que* $\overline{(a,b)} = \overline{(k,1)}$. *Así que tenemos el importante resultado*

$$\bigcup_{b|a}\overline{(a,b)} \quad = \quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\overline{(k,1)}$$

[3] *Si identificamos* $\overline{(a,b)}$ *con* $\dfrac{a}{b}$ *entonces llamaremos números racionales al conjunto*

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \left\{\frac{a}{b}\ |\ a\in\mathbb{Z}\wedge b\in\mathbb{Z}-\{0\}\right\}$$

Esta notación nos permite recuperar una copia de los enteros $\mathbb{Z}$*, dentro de* $\mathbb{Q}$*,*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\overline{(k,1)} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{k}{1} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$$

Así que, para $z\in\mathbb{Z}$ *tenemos que*

$$\frac{z}{1} = \left\{\cdots,\frac{z}{1},\frac{2z}{2},\frac{3z}{3},\frac{4z}{4},\cdots\right\}$$

En particular,

$$\frac{1}{1} \quad = \quad \left\{\cdots,\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\cdots\right\}$$

8. Aplicación de las Relaciones de Equivalencia: Transformaciones del Plano y del Espacio

8.1. Un primer ejemplo.

Dado el conjunto $\mathbb{W} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ |\ y=0\}$, definamos en el plano la relación $\mathbb{L}_0$, como sigue

$$(x_1,y_1)\ \mathbb{L}_0\ (x_2,y_2) \quad\Longleftrightarrow\quad (x_1-x_2, y_1-y_2)\in\mathbb{W}$$

♦ Observamos en primer lugar que,

$$(x,y)-(x,y) = (x-x,y-y) = (0,0)\wedge 0 = 0 \Longrightarrow (0,0)\in\mathbb{W}\wedge(x,y)\mathbb{L}_0(x,y)$$

Así que $\mathbb{L}_0$ es una relación reflexiva.

♦ En segundo lugar, $\mathbb{L}_0$ es una relación simétrica pues,

$$\begin{aligned}(x,y)\mathbb{L}_0(a,b) &\Longleftrightarrow (x-a,y-b)\in\mathbb{W} \Longleftrightarrow (y-b)=0 \Longrightarrow -(y-b)]=0\\ &\Longrightarrow b-y=0\\ &\Longrightarrow (a-x,b-y)\in\mathbb{W}\\ &\Longrightarrow (a,b)\mathbb{L}_0(x,y)\end{aligned}$$

♦ En tercer lugar,

$$\begin{aligned}
(a,b)\mathbb{L}_0(c,d) \wedge (c,d)\mathbb{L}_0(e,f) &\iff (a-c, b-d) \in \mathbb{W} \wedge (c-e, d-f) \in \mathbb{W} \\
&\iff (b-d) = 0 \wedge (d-f) = 0 \\
&\Longrightarrow b-d+d-f = 0 \\
&\Longrightarrow b-f = 0 \\
&\Longrightarrow (a-e, b-f) \in \mathbb{W} \\
&\Longrightarrow (a,b)\mathbb{L}_0(e,f)
\end{aligned}$$

Así que $\mathbb{L}_0$ es una relación transitiva, y junto a lo anterior es una relación de equivalencia

♦ Ahora, podemos calcular las clases de equivalencia que origina esta relación.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \overline{(a,b)} &\iff (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x,y)\mathbb{L}_0(a,b) \\
&\iff (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x-a, y-b) \in \mathbb{W} \\
&\iff (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (y-b) = 0 \\
&\iff (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = b \\
&\iff (x,b) : \ x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\overline{(a,b)} = \{(x,b) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

♦ La primera conclusión que podemos sacar es que:

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b)\}$$

Representa una linea recta que tiene pendiente 0, es decir es paralela al Eje x, y podemos graficar algunas de estas infinitas clases.

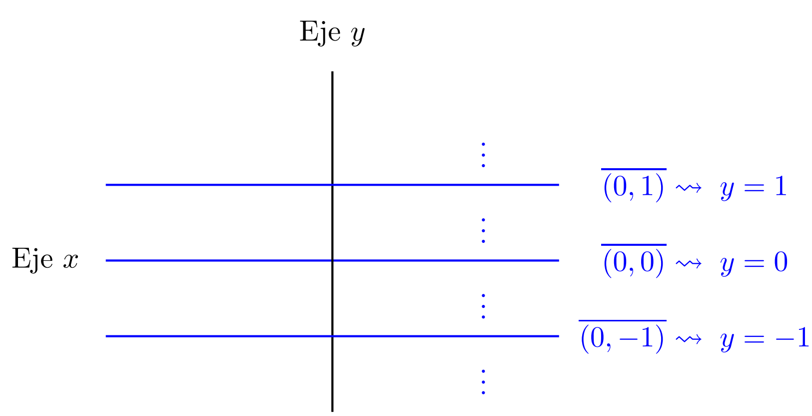

Figura 13

- Si llamamos $\overline{\mathbb{R}^2}$ al conjunto de todas las clases de equivalencia obtenidas, vía la relación $\mathbb{L}_0$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{R}^2} &= \bigcup \overline{(a,b)} \quad (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}) \\
&= \{\overline{(a,b)} \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\overline{(0,b)} \mid b \in \mathbb{R}\}
\end{aligned} \tag{18}$$

8.2. Un segundo ejemplo.

Dado el conjunto $\mathbb{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$, definamos en el plano la relación $\mathbb{L}_1$, como sigue

$$(x_1, y_1)\ \mathbb{L}_1\ (x_2, y_2) \iff (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{W}$$

- Observamos en primer lugar que,

$$(x,y) - (x,y) = (x-x, y-y) = (0,0) \wedge 0 - 0 = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \mathbb{W} \wedge (x,y)\mathbb{L}(x,y)$$

  Así que $\mathbb{L}_1$ es una relación reflexiva.

- En segundo lugar,

$$\begin{aligned}
(x,y)\mathbb{L}_1(a,b) &\iff (x-a, y-b) \in \mathbb{W} \\
&\iff (x-a) - (y-b) = 0 \\
&\Longrightarrow -[(x-a) - (y-b)] = 0 \\
&\Longrightarrow -(x-a) + (y-b)] = 0 \\
&\Longrightarrow (a-x) - (b-y) = 0 \\
&\Longrightarrow (a-x, b-y) \in \mathbb{W} \\
&\Longrightarrow (a,b)\mathbb{L}_1(x,y)
\end{aligned}$$

  Así que $\mathbb{L}_1$ es una relación simétrica.

- En tercer lugar,

$$\begin{aligned}
(a,b)\mathbb{L}_1(c,d) \wedge (c,d)\mathbb{L}_1(e,f) &\iff (a-c, b-d) \in \mathbb{W} \wedge (c-e, d-f) \in \mathbb{W} \\
&\iff (a-c) - (b-d) = 0 \wedge (c-e) - (d-f) = 0 \\
&\Longrightarrow (a-c) - (b-d) = 0 \wedge (c-e) - (d-f) = 0 \\
&\Longrightarrow (a-c) - (b-d) + (c-e) - (d-f) = 0 \\
&\Longrightarrow a - c - b + d + c - e - d + f = 0 \\
&\Longrightarrow a - b - e + f = 0 \\
&\Longrightarrow (a-e) - (b-f) = 0 \\
&\Longrightarrow (a-e, b-f) \in \mathbb{W} \\
&\Longrightarrow (a,b)\mathbb{L}_1(e,f)
\end{aligned}$$

  Así que $\mathbb{L}_1$ es una relación transitiva, y junto a lo anterior es una relación de equivalencia

♦ Ahora, podemos calcular las clases de equivalencia que origina esta relación.

$$\begin{aligned}
(x,y)\in\overline{(a,b)} &\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2\wedge(x,y)\mathbb{L}_1(a,b)\\
&\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2\wedge(x-a,y-b)\in\mathbb{W}\\
&\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2\wedge(x-a)-(y-b)=0\\
&\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2\wedge x-a-y+b=0\\
&\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2\wedge x-a+b=y\\
&\iff (x,x+b-a)\wedge x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\overline{(a,b)} \quad = \quad \{(x,x+b-a)\mid x\in\mathbb{R}\}$$

♦ La primera conclusión que podemos sacar es que:

$$\overline{(a,b)} \quad = \quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=x+b-a)\}$$

Representa una linea recta que tiene pendiente 1 e intersecta al Eje y en el punto $(0,b-a)$, y podemos graficar algunas de estas infinitas clases.

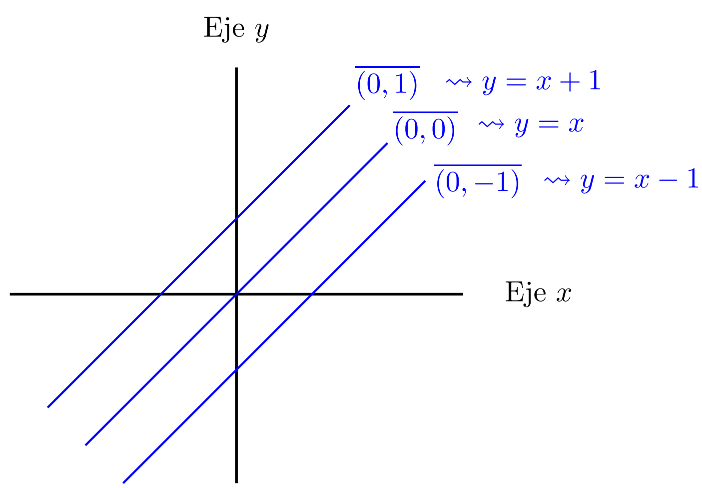

Figura 14

♦ Si llamamos $\overline{\mathbb{R}^2}$ al conjunto de todas las clases de equivalencia obtenidas, vía la relación $\mathbb{L}_1$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{R}^2} &= \bigcup\overline{(a,b)}\quad(a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})\\
&= \{\overline{(a,b)}\mid a\in\mathbb{R},\wedge b\in\mathbb{R}\}\\
&= \{\overline{(0,b-a)}\mid a\in\mathbb{R},\wedge b\in\mathbb{R}\}\\
&= \{\overline{(0,c)}\mid c\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}\tag{19}$$

8.3. Un tercer ejemplo.

Dado el conjunto $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$, definamos en el espacio la relación $\mathbb{P}_0$, como sigue

$$(x_1, y_1, z_1)\ \mathbb{P}_0\ (x_2, y_2, z_2) \iff (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \in \mathbb{W}$$

♦ Observamos en primer lugar que,

$$(x, y, z) - (x, y, z) = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0) \wedge 0 = 0 \Longrightarrow (0, 0, 0) \in \mathbb{W} \wedge (x, y, z)\mathbb{P}_0(x, y, z)$$

Así que $\mathbb{P}_0$ es una relación reflexiva.

♦ En segundo lugar,

$$\begin{aligned}
(x, y, z)\mathbb{P}(a, b, c) &\iff (x - a, y - b, z - c) \in \mathbb{W} \\
&\iff (z - c) = 0 \\
&\Longrightarrow -(z - c)] = 0 \\
&\Longrightarrow z - c = 0 \\
&\Longrightarrow (a - x, b - y, z - c) \in \mathbb{W} \\
&\Longrightarrow (a, b, c)\mathbb{P}_0(x, y, z)
\end{aligned}$$

Así que $\mathbb{P}_0$ es una relación simétrica.

♦ En tercer lugar,

$$\begin{aligned}
(a, b, r)\mathbb{P}_0(c, d, s) \wedge (c, d, s)\mathbb{P}_0(e, f, t) &\iff (a - c, b - d, r - s) \in \mathbb{W} \wedge (c - e, d - f, s - t) \in \mathbb{W} \\
&\iff (r - s) = 0 \wedge (s - t) = 0 \\
&\Longrightarrow r - s + s - t = 0 \\
&\Longrightarrow r - t = 0 \\
&\Longrightarrow (a - e, b - f, r - t) \in \mathbb{W} \\
&\Longrightarrow (a, b, r)\mathbb{P}_0(e, f, t)
\end{aligned}$$

Así que $\mathbb{P}_0$ es una relación transitiva, y junto a lo anterior es una relación de equivalencia

♦ Ahora, podemos calcular las clases de equivalencia que origina esta relación.

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \overline{(a, b, c)} &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge (x, y, z)\mathbb{P}_0(a, b, c) \\
&\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge (x - a, y - b, z - c) \in \mathbb{W} \\
&\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z - c = 0 \\
&\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = c \\
&\iff (x, y, c) :\ (x, y) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\overline{(a, b, c)} = \{(x, y, c) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

♦ La primera conclusión que podemos sacar es que:

$$\overline{(a,b,c)} \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = c)\}$$

Representa un plano, y podemos graficar algunas de estas infinitas clases.

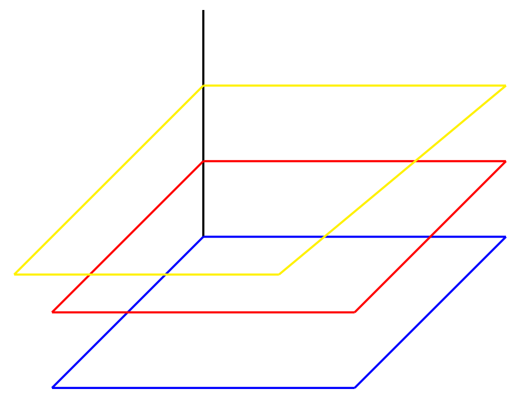

Figura 15

♦ Si llamamos $\overline{\mathbb{R}^3}$ al conjunto de todas las clases de equivalencia obtenidas, vía la relación $\mathbb{P}_0$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{R}^3} &= \bigcup \overline{(a,b,c)} \quad (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}) \\
&= \{\overline{(a,b,c)} \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}\} \qquad (20) \\
&= \{\overline{(0,0,c)} \mid c \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

9. Ejercicios Propuestos de Relaciones

[1] En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se define la relación:

$$aRb \Longleftrightarrow a \text{ es un factor de } b \quad (a \text{ divide } b)$$

Demuestre que R es una relación reflexiva y transitiva, pero no simétrica.

[2] En $\mathbb{N}$ define la relación

$$mRn \Longleftrightarrow m + n = 10$$

¿ Es R, refleja, simétrica o transitiva ?

[3] En el conjunto de números enteros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación

$$(x,y)R(z,w) \Longleftrightarrow (\exists k; k \in \mathbb{Z}) : x - z = 8k \ \wedge \ y - w = 7k$$

[a] Demuestre que R es una relación de equivalencia

[b] Determine $\overline{(1,0)}$

[4] Sea $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ una función. Define en $\mathbb{Z}$, la relación

$$z_1 R z_2 \Longleftrightarrow f(z_1) = f(z_2)$$

[a] Demuestre que R es una relación de equivalencia

[b] Si $f(z) = 2^z \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$. Determine $\overline{z}$ para cada $z \in \mathbb{Z}$

[5] En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Define la relación R como sigue:

$$aRb \Longleftrightarrow a^2 - b = b^2 - a$$

[a] Demuestre que R es una relación de equivalencia

[b] Determine $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$.

[6] En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow ac \geq 0 \wedge bd \geq 0$$

Determine si R es una relación de equivalencia.

[7] Sea R una relación de equivalencia definida en un conjunto A. Demuestre que

- Si cRa y cRb , entonces aRb
- Si $b \in \overline{a}$, entonces $\overline{b} = \overline{a}$
- Si $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ entonces $\overline{a} = \overline{b}$

[8] Define en $\mathbb{Q}^+$, los racionales positivos, la relación

$$q_1 \ R \ q_2 \Longleftrightarrow (\exists p; p \in \mathbb{Z}) : q_1 \cdot (q_2)^{-1} = 3^p \qquad (*)$$

- Demuestre que $(*)$ define una relación de equivalencia
- Determine $\overline{\left(\frac{4}{5}\right)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \mid \frac{a}{b} \ R \ \frac{4}{5} \right\}$

[9] Defina en $\mathbb{R}_2[x]$, el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2 y con coeficientes reales, la siguiente relación:

$$p(x) \ \Re \ q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (p(x) - q(x)) \in \mathbb{U}$$

Donde, $\mathbb{U} = \{f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid c_0 - c_1 + c_2 = 0\}$

- Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia
- Demuestre que $\overline{1 + 2x + x^2} = \mathbb{U}$

[10] Suponga que R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia. Demuestre que $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia.

10. Situaciones de Desempeño: Relaciones

10.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

($\clubsuit$) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

($\clubsuit$) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

($\clubsuit$) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

($\clubsuit$) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

($\clubsuit$) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

10.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

10.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

[1] En $\mathbb{R}^2$ se define la relación R como sigue:

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow \quad d-b=2(c-a)$$

[a] Demuestre que R es una relación de equivalencia.

[b] Determine explícitamente la clase de equivalencia del par (a,b), es decir determine el conjunto

$$\overline{(a,b)} \quad = \quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (a,b)\ R\ (x,y)\}$$

[c] Grafique:

[i] $\overline{(0,0)}$
[ii] $\overline{(1,2)}$
[iii] $\overline{(1,1)}$

[d] ¿Alguna conclusión, respecto de los gráficos de estas clases?, ¿Puede generalizar este comportamiento geométrico?

[2] En $\mathbb{R}^2$ se define la relación R como sigue:

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\,,\ \text{tal que}: \ \ b^n = d$$

Demuestre que R es una relación transitiva

[3] Define en $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid y \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \in \mathbb{R}\}$, para $u_1 = (x_1, y_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2)$, elementos arbitrarios de $\mathbb{R}^2$, las siguientes operaciones:

- $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $u_1 - u_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

Además, si $\mathbb{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$ define la relación $\Re$ en $\mathbb{R}^2$

$$u_1 \,\Re\, u_2 \Longleftrightarrow (u_1 - u_2) \in \mathbb{W}$$

[a] Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia.
[b] Determine $\overline{(2,-1)}$. La clase de equivalencia del elemento $(2,-1)$.
[c] Grafique $\overline{(2,-1)}$ en el plano $\mathbb{R}^2$.

[4] Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; $(a,b) \neq (0,0)$ fijo. Si definimos en $\mathbb{R}^2$ la relación R

$$(x,y)R(w,z) \Longleftrightarrow (\exists \lambda; \lambda \in \mathbb{R});\ \text{tal que}\ (x - w\ ,\ y - z) = \lambda\,(a,b)$$

[a] Demuestre que R es una relación de equivalencia.

[b] Determine claramente la clase de equivalencia del par (1,1).

[c] Decida si la clase del par (1-a , 1-b) es igual a la clase del par (1,1).

11. Solución de Situaciones de Desempeño: Relaciones

[1] En $\mathbb{R}^2$ se define la relación R como sigue:

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow \quad d-b=2(c-a)$$

[a] Demuestre que R es una relación de equivalencia.

Solución

[i] R es refleja, pues

$(a,b)R(a,b) \Longleftrightarrow b-b=2(a-a)$, pues $0=0$

[ii] R es simétrica, pues si suponemos que $(a,b)R(c,d)$ entonces

$$\begin{aligned}
(a,b)R(c,d) &\Longleftrightarrow d-b=2(c-a)\\
&\Longrightarrow -(d-b)=-2(c-a)\\
&\Longrightarrow b-d=2(a-c)\\
&\Longrightarrow (c,d)R(a,b)
\end{aligned}$$

[iii] R es transitiva, pues si $(a,b)R(c,d)$ y $(c,d)R(e,f)$ entonces

$$\begin{aligned}
(a,b)R(c,d)\wedge(c,d)R(e,f) &\Longleftrightarrow [d-b=2(c-a)]\wedge[f-d=2(e-c)]\\
&\Longrightarrow (d-b)+(f-d)=2(c-a)+2(e-c)\\
&\Longrightarrow f-b=2(e-a)\\
&\Longrightarrow (a,b)R(e,f)
\end{aligned}$$

Y, R es una relación de equivalencia.

[b] Determine explícitamente la clase de equivalencia del par (a,b), es decir determine el conjunto

$$\overline{(a,b)} \quad = \quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (a,b)\ R\ (x,y)\}$$

Aplicamos directamente la definición,

$$\begin{aligned}
(c,d)\in\overline{(a,b)} &\Longleftrightarrow (c,d)\in\mathbb{R}^2\wedge(a,b)R(c,d)\\
&\Longleftrightarrow (c,d)\in\mathbb{R}^2\wedge d-b=2(c-a)\\
&\Longleftrightarrow (c,d)\in\mathbb{R}^2\wedge d=2(c-a)+b
\end{aligned}$$

Y obtenemos que las clases de equivalencia son de la forma,

$$\overline{(a,b)} \quad = \quad \{(c,2(c-a)+b) \mid c\in\mathbb{R}\} \tag{21}$$

[c] Grafique:

[i] $\overline{(0,0)}$

Usando, directamente (21), tenemos que

$$\overline{(0,0)} \quad = \quad \{(c,2c) \mid c\in\mathbb{R}\}$$

Luego, su gráfico es la recta $L:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x\}$

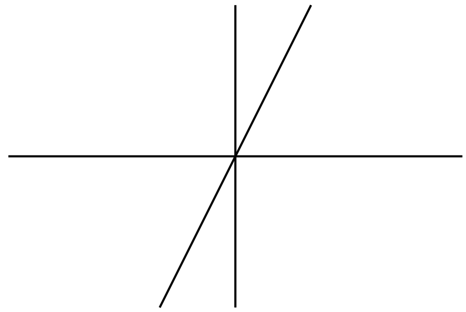

Figura 16: $L: \ y = 2x$

[ii] $\overline{(1,2)}$

Usando, (21), tenemos que

$$\overline{(1,2)} \;=\; \{(c, 2(c-1)+2) \mid c \in \mathbb{R}\} = \{(c, 2c-2+2) \mid c \in \mathbb{R}\} = \{(c, 2c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

es la recta $L: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$, cuyo gráfico es del tipo,

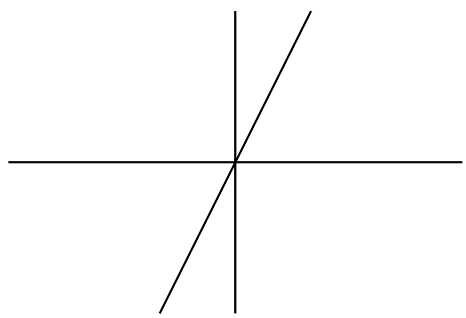

Figura 17: $L: \ y = 2x$

[iii] $\overline{(1,1)}$

Usando, (21), tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{(1,1)} &= \{(c, 2(c-1)+1 \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(c, 2c-2+1 \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(c, 2c-1 \mid c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Su gráfico es la recta $L: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x-1\}$

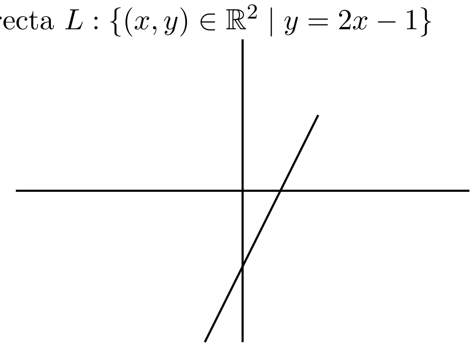

Figura 18: $L: \ y = 2x - 1$

[d] ¿Alguna conclusión, respecto de los gráficos de estas clases?, ¿Puede generalizar este comportamiento geométrico?

[i] $\overline{(0,0)} = \overline{(1,2)}$

[ii] $\overline{(1,1)} \neq \overline{(1,2)}$

[iii] En general, como,

$$\begin{aligned}
\overline{(a,b)} &= \{(c, 2(c-a)+b \mid c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(c, 2c-2a+b \mid c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(c, 2c+(b-2a) \mid c \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

entonces las clases de equivalencia corresponden a rectas paralelas con pendiente 2, de la forma,

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \mid y = 2x + (b-2a)\}$$

[2] Si en $\mathbb{R}^2$ definimos la relación R como sigue:

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\,,\ \text{tal que}:\ \ b^n = d$$

entonces R es una relación transitiva

En efecto

Etapa 1. Debemos verificar que R es una relación transitiva, es decir hay que probar que

$$(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Longrightarrow (a,b)R(e,f)$$

Etapa 2. Si suponemos que $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$ entonces

$$\begin{aligned}
(a,b)R(c,d) &\Longleftrightarrow (\exists n; n \in \mathbb{N}) : b^n = d \qquad (*) \\
(c,d)R(e,f) &\Longleftrightarrow (\exists m; m \in \mathbb{N}) : d^m = f \qquad (**)
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
b^n = d &\Longrightarrow (b^n)^m = d^m, && \text{De } (*) \\
&\Longrightarrow b^{nm} = d^m \\
&\Longrightarrow b^{nm} = f, && \text{De } (**) \\
&\Longrightarrow (a,b)R(e,f), && (\text{Pues, } nm \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Y, R es transitiva.

[3] Define en $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\ \wedge\ x \in \mathbb{R}\}$, para $u_1 = (x_1, y_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2)$, elementos arbitrarios de $\mathbb{R}^2$, las siguientes operaciones:

- $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $u_1 - u_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

Además, si $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$ define la relación $\Re$ en $\mathbb{R}^2$

$$u_1 \Re u_2 \Longleftrightarrow (u_1 - u_2) \in \mathbb{W}$$

[a] Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

Solución

[i] $\Re$ es una relación reflexiva

En efecto

Sea $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $u - u = (0, 0) \in \mathbb{W}$, pues $0 + 2 \cdot 0 = 0$

Luego, $u\Re u$ y entonces $\Re$ es una relación reflexiva.

[ii] $\Re$ es una relación simétrica

En efecto

Supongamos que $u = (x, y)$ y $v = (a, b)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $u\Re v$

$$\begin{aligned}
u\Re v &\Longleftrightarrow (u - v) \in \mathbb{W} \\
&\Longleftrightarrow ((x, y) - (a, b)) \in \mathbb{W} \\
&\Longleftrightarrow (x - a, y - b) \in \mathbb{W} \\
&\Longrightarrow (x - a) + 2(y - b) = 0 \\
&\Longrightarrow -(a - x) - 2(b - y) = 0 \\
&\Longrightarrow (-1)[(a - x) + 2(b - y)] = 0 \\
&\Longrightarrow (a - x) + 2(b - y) = 0 \\
&\Longrightarrow v\Re u
\end{aligned}$$

Luego $\Re$ es una relación simétrica

[iii] $\Re$ es una relación transitiva

En efecto

Supongamos que $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$ y $u_3 = (x_3, y_3)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que. $u_1\Re u_2 \quad \wedge \quad u_2\Re u_3$

Entonces

$$\begin{aligned}
u_1\Re u_2 \wedge u_2\Re u_3 &\Longleftrightarrow (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{W} \wedge (x_2 - x_3, y_2 - y_3) \in \mathbb{W} \\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} (x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) &=& 0 \\ (x_2 - x_3) + 2(y_2 - y_3) &=& 0 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow (x_1 - x_3) + 2(y_1 - y_3) = 0 \\
&\Longrightarrow (x_1 - x_3, y_1 - y_3) \in \mathbb{W} \\
&\Longrightarrow u_1\Re u_3
\end{aligned}$$

Así que $\Re$ es una relación transitiva y en conjunto con las propiedades anteriores es una relación de equivalencia.

[b] Determine $\overline{(2,-1)}$. La clase de equivalencia del elemento $(2,-1)$.

Solución

$$\begin{aligned}
u \in \overline{(2,-1)} &\iff u \in \mathbb{R}^2 \wedge u\Re(2,-1)\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x,y)\Re(2,-1)\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x-2, y+1) \in \mathbb{W}\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x-2) + 2(y+1) = 0 \in \mathbb{W}\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x - 2 + 2y + 2 = 0 \in \mathbb{W}\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x + 2y = 0 \in \mathbb{W}\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x,y) \in \mathbb{W}\\
&\iff u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge u \in \mathbb{W}\\
&\iff u \in \mathbb{W}
\end{aligned}$$

Así que $\overline{(2,-1)} = \mathbb{W}$

[c] Grafique $\overline{(2,-1)}$ en el plano $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{W}$ corresponde a la recta $L:\ x + 2y = 0$ ó $L:\ y = -\dfrac{1}{2}x$

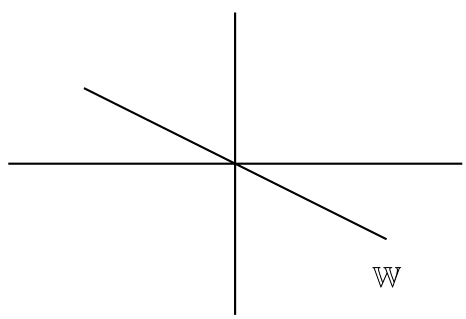

Figura 19: $L:\ x + 2y = 0$

[4] Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2;\ (a,b) \neq (0,0)$ fijo. Si definimos en $\mathbb{R}^2$ la relación R

$$(x,y)R(w,z) \iff (\exists \lambda; \lambda \in \mathbb{R});\ \text{tal que } (x-w\ ,\ y-z) = \lambda\ (a,b)$$

[a] Demuestre que R es una relación de equivalencia.

[i] R es reflexiva, pues $(\forall (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2)$, $(x-x, y-y) = (0,0) = 0\ (a,b)$

[ii] R es simétrica pues, si $(x,y)R(z,w)$, es decir $(\exists \lambda; \lambda \in \mathbb{R}) : (x-z, y-w) = \lambda(a,b)$ entonces

$$\begin{aligned}
(x-z, y-w) = \lambda(a,b) &\implies -(x-z, y-w) = -\lambda(a,b)\\
&\implies (z-x-z, w-y) = (-\lambda)(a,b)
\end{aligned}$$

Esto es $(z,w)R(x,y)$

[iii] R es transitiva, pues si $(x,y)R(z,w) \ \wedge \ (z,w)R(u,v)$, es decir

$[(\exists\lambda_1;\lambda_1 \in \mathbb{R}) : (x-z, y-w) = \lambda_1(a,b)] \wedge [(\lambda_2;\lambda_2 \in \mathbb{R})(z-u, w-v) = \lambda_2(a,b)]$
entonces sumando miembro a miembro obtenemos

$$(x-u, y-v) = (\lambda_1+\lambda_2)(a,b)$$

De donde $(x,y)R(u,v)$,

[b] Determine claramente la clase de equivalencia del par (1,1).

Aplicando directamente la definición tenemos que,

$$\begin{aligned}
(u,v) \in \overline{(1,1)} &\iff (u,v) \in \mathbb{R}^2 \wedge (u,v)R(1,1)\\
&\iff (u,v) \in \mathbb{R}^2 \wedge (\exists\lambda;\lambda \in \mathbb{R}) \ : \ (u-1, v-1) = \lambda\ (a,b)\\
&\iff (u,v) \in \mathbb{R}^2 \wedge (\exists\lambda;\lambda \in \mathbb{R}) \ : \ (u = \lambda a + 1) \wedge (v = \lambda b + 1)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\overline{(1,1)} \quad = \quad \{(\lambda a + 1, \lambda b + 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (*)$$

[c] Decida si la clase del par (1-a , 1-b) es igual a la clase del par (1,1).

De $(*)$, sigue que $(1-a, 1-b) = ((-1)a+1, (-1)b+1) \in \overline{(1,1)}$, o sea que basta tomar en $(*)$ $\lambda = -1$. De donde sigue que $\overline{(1,1)} = \overline{(1-a, 1-b)}$

Contenidos