Rudimentos 4: Progresiones
Profesor Ricardo Santander

Este capitulo esta destinado a presentar contenidos y actividades que permitirán al estudiante, verificar que un conjunto de números satisface las propiedades que definen a una progresión aritmética o geométrica, y que en forma natural observe que el ordenamiento de los elementos de un conjunto en esta forma, permite generar un algoritmo para obtener rápida y eficientemente cada término en forma independiente, y determinar la suma de sus elementos en cualquier instante.

1. Progresiones Aritméticas

Extenderemos las ideas de Peano aprovechando la operatoria que poseen los Números Reales ($\mathbb{R}$), para construir listados de estos números que emulen el comportamiento de los números naturales.

Motivación 1.1. *Supongamos que una persona deposita 50.000 pesos en un banco a un interés del 3% anual.*

[1] *¿Cuánto dinero gana esa persona en un año?*

- ♦ *Como el interés que produce 1 peso en 1 año es de* $\dfrac{3}{100} = 0.03$ *pesos entonces el interés total en el año es de* $50.000 \cdot 0,03 = 1.500$ *pesos*

- ♦ *Luego, la persona al cabo de un año, posee en total la cantidad de* $50.000 + 1.500 = 51.500$ *pesos*

[2] *¿Cuánto dinero gana esa persona en dos años. Si deposita al segundo año los mismos 50.000 pesos?*

- ♦ *Al final del primer año si se retiran los intereses, el capital sigue siendo el mismo: 50.000 pesos. Luego, el capital vuelve a producir 1.500 pesos. Así que en los dos años el interés producido es de* $1.500 + 1.500 = 3.000$ *pesos*

- ♦ *Luego, la persona al cabo de 2 años, posee en total la cantidad de* $50.000 + 3.000 = 53.000$ *pesos*

[3] *¿Cuánto gana a los t años. Si cada año retira los intereses.?*

- ♦ *La situación hasta aquí es la siguiente*

$$\left.\begin{array}{lcl} \textit{Capital inicial} & : & 50.000 \\ \textit{Primer año} & : & 51.500 \\ \textit{Segundo año} & : & 53.000 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \{50.000, 50.000 + 1500, 50.000 + 2 \cdot 1500\}$$

- ♦ *Sí el proceso continua en el tiempo debemos tener un listado como el siguiente*

$$A = \{50.000, 50.000 + 1 \cdot 1.500, 50.000 + 2 \cdot 1.500, 50.000 + 3 \cdot 1.500, \dots\} \tag{1}$$

Es decir, la constante del listado es fijada por las identidades

- $(50.000 + (t+1)\cdot 1.500) - (50.000 + t\cdot 1.500) = 1.500$
- $50.000 + t\cdot 1.500 = 50.000 + \dfrac{3}{100}\cdot 50.000\cdot t = 50.000\left(1 + \dfrac{3}{100}\cdot t\right) \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$

[4] *En general, si notamos*

- a_1 *al capital inicial*
- $i = \dfrac{r}{100}\cdot a_1$ *interés anual simple*
- t *tiempo en años*

Entonces el listado y las propiedades que se intuyen son las siguientes

1. $A = \{a_1, a_1 + i, a_1 + 2i, a_1 + 3i, a_1 + 4i, \dots,\}$
2. $a_k = a_1 + (k-1)i$, *o bien,* $a_k = a_1\left[1 + (k-1)\dfrac{r}{100}\right]$, *para cada* $k = 1, 2, 3, \dots$
3. *La suma de los* t *primeros términos, para cada* $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_t &= \sum_{k=1}^{t}(a_1 + (k-1)i) \\ &= a_1\sum_{k=1}^{t} 1 + i\sum_{k=1}^{t}(k-1) \\ &= a_1 t + i\,\frac{(t-1)t}{2} & \textit{Ver } (\textbf{??}) \\ &= \frac{t}{2}\,(2a_1 + (t-1)\,i) \end{aligned}$$

3'. *Equivalentemente, por nuestra definición tenemos,* $S_t = \dfrac{t}{2}\,(a_1 + a_t)$

Definición 1.2. $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots,\} \subset \mathbb{R}$ *será llamada una Progresión Aritmética. Si existe* $d \in \mathbb{R}$*, tal que* $a_{n+1} = a_n + d \quad (\forall m; m \in \mathbb{N})$*;* d *se llama la diferencia de la progresión aritmética*

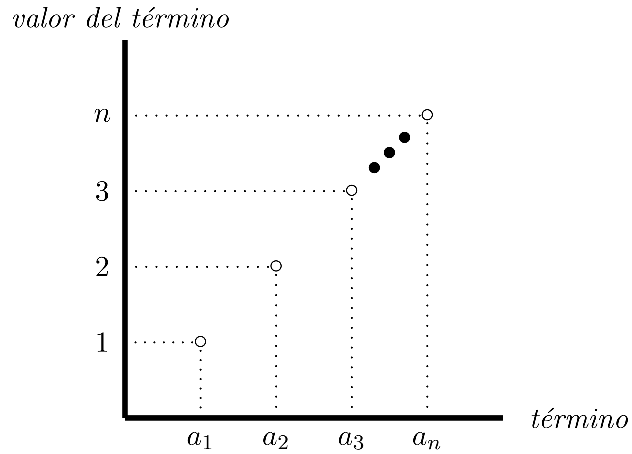
Ejemplo 1.2.1. *Si definimos* $a_n = n \in \mathbb{N}$ *y* $d = 1$ *entonces* $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots,\} = \{1, 2, 3, \cdots,\} = \mathbb{N}$. *Luego,* $\mathbb{N}$ *es una progresión aritmética, con diferencia* $d = 1$

Ejemplo 1.2.2. $A = \{-1,\ -2,\ -3,\ -3,\ -7, \cdots\}$ *es una progresión aritmética con* $a_1 = -1$ *y* $d = -1$

Ejemplo 1.2.3. $A = \left\{\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2} + \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2}, \cdots\right\}$ *es una progresión aritmética con* $a_1 = \sqrt{2}$ *y* $d = \dfrac{1}{2}$

Observación 1.3. *Del ejemplo* **1.2.1**, *sabemos que*

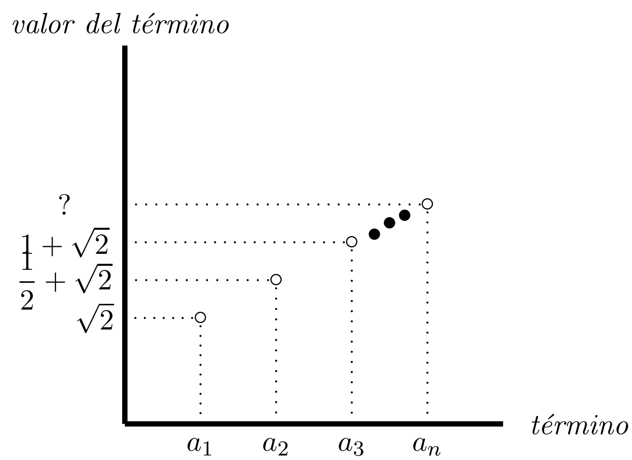
- *El término de orden o posición* n *en el listado es exactamente* n*. Es decir en un sistema gráfico que involucre a cada término versus su valor numérico, tenemos que*



- *La suma de los n primeros términos es* $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$*, como lo obtuvimos en la fórmula* (**??**)

  Sin embargo, en el ejemplo **1.2.3***, no es tan claro:*

- *¿Cuál es el término de orden o posición n en el listado?. Porque si procedemos como en la situación anterior la situación gráfica es la siguiente*



- *Y menos sabemos, ¿Cuál es la suma de los n primeros términos* S_n*?*

Ahora, estas cuestiones son importantes para nosotros toda vez, que estos son los problemas que debemos aprender a resolver

1.4. Propiedades de las progresiones aritméticas.

[1] Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, \} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Aritmética de diferencia d entonces el término de orden n se obtiene como

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d\,; \quad n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

En efecto

- Por demostrar que $a_{n+1} = a_1 + n \cdot d\,; \quad n \in \mathbb{N}$
- Gestión de la información. Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, \} \subset \mathbb{R}$, una Progresión Aritmética de diferencia d entonces de la **Definición 1.2** tenemos que

$$\begin{array}{rcl} a_2 &=& a_1 + d \\ a_3 &=& a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &=& a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\ &\vdots& \end{array}$$

- Luego, el método sugerido es Inducción, para probar que la fórmula

$$F(n): \qquad a_{n+1} = a_1 + n \cdot d\,; \quad n \in \mathbb{N}, \text{ es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

  - F(1) es verdadera, pues $a_{1+1} = a_2 = a_1 + d$.
  - Hipótesis de Inducción: Suponemos que F(k) es verdadera, es decir

$$a_k = a_1 + (k-1)d \qquad (H)$$

  - Tesis de Inducción: Por demostrar que $F(k+1)$ es verdadera

$$\begin{array}{rcl} a_{k+1} &=& a_k + d \\ &\stackrel{(H)}{=}& a_1 + (k-1)d + d \\ &=& a_1 + kd \end{array}$$

  Así F(k+1) es verdadera y $F(n)$ entonces es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

[2] Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, \} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Aritmética de diferencia d entonces la suma de los n-primeros términos se obtiene de la fórmula.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) & (\forall n; n \in \mathbb{N}) \\ \quad \vee & \\ \frac{n}{2}(a_1 + a_n) & (\forall n; n \in \mathbb{N}) \end{cases} \qquad (2)$$

En efecto

Para demostrar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$, haremos uso de la información $a_n = a_1 + (n-1)d$, y aplicaremos Inducción para concluir que la fórmula

$$F(n): \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d), (n \in \mathbb{N}) \text{ es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

- Iniciamos mostrando que F(1) es verdadera, porque

$$\left[\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}(2a_1 + (1-1)d) = \frac{1}{2} \cdot 2a_1 = a_1\right] \Longrightarrow \sum_{i=1}^{1} a_i = \frac{1}{2}(2a_1 + (1-1)d)$$

♦ Seguimos con la Hipótesis de inducción: Suponiendo que F(k) es verdadera, es decir:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) \qquad (H)$$

♦ Y como Tesis de inducción debemos demostrar que $F(k+1)$ es verdadera.

En efecto

$$\begin{aligned}
s_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} \\
&\overset{(H)}{=} \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) + a_{k+1} \\
&= \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) + (a_1 + kd) \\
&= \frac{2ka_1 + k^2d - kd + 2a_1 + 2kd}{2} \\
&= \frac{2a_1(k+1) + k(k+1)d}{2} \\
&= \frac{(k+1)}{2}[2a_1 + kd]
\end{aligned}$$

Así, F(k+1) es verdadera, y efectivamente

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \qquad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

En particular, como $a_1 + (n-1)d = a_n$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + [a_1 + (n-1)d]) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)
\end{aligned}$$

[3] Como aplicación inmediata tenemos que la suma de los n-primeros naturales es:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n}{2}(1 + (n-1)\cdot 1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

[4] Finalmente para la progresión del **Ejemplo 1.2.3**, tenemos que

- $a_n = \sqrt{2} + \dfrac{n-1}{2}$, y
- $S_n = \dfrac{n}{2}\left(2\sqrt{2} + \dfrac{n-1}{2}\right)$

2. Progresiones Geométricas

Motivación 2.1. *Supongamos que una persona deposita 50.000 pesos en un banco a un interés del 3% anual, al igual que en la motivación (1.1)*

[1] *¿Cuánto dinero gana en dos años?*

♦ *Como ya sabemos, el interés que produce 1 peso en 1 año es de* 0.03 *pesos entonces el interés total en el año es,* $50.000 \cdot 0,03 = 1.500$ *pesos*

♦ *Sin embargo la diferencia esta en que, al no retirar los intereses ganados en el año, se genera un aumento en el capital, y por ende el interés de este periodo debe cambiar, y es,* $51.500 \cdot 0,03 = 1.545$ *pesos. Así que el interés acumulado al fin de los dos años es* $1.500 + 1.545 = 3.045$ *pesos, y el dinero acumulado es entonces* $50000 + 3.045 = 53.045$ *pesos*

[2] *¿Cuánto gana a los t años. Si cada año retira no los intereses.?*

♦ *La situación en los periodos anuales es la siguiente*

$$\begin{array}{lcl} \textit{Capital Inicial} & : & 50.000 \\ \textit{Primer año} & : & 50.000 + 1500 = 50.000\left(1+\dfrac{3}{100}\right) \\ \textit{Segundo año} & : & 51.500 + 1545 = 50.000\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^2 \end{array}$$

♦ *Sí el proceso continua en el tiempo debemos tener un listado como el siguiente*

$$A = \left\{50.000,\ 50.000 \cdot \left(1+\frac{3}{100}\right),\ 50.000 \cdot \left(1+\frac{3}{100}\right)^2,\ 50.000 \cdot \left(1+\frac{3}{100}\right)^3, \dots\right\}$$

♦ *Luego, tenemos que el año t tiene el siguiente comportamiento*

$$\textit{año } t \ : \ 50.000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{t-1}$$

[3] *En el caso general si modelamos la situación como,*

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & \textit{capital inicial} \\ i & = & \dfrac{r}{100} \cdot a_1 \ \textit{interés anual compuesto(sin retirar los intereses)} \\ t & : & \textit{tiempo en años} \end{array}$$

Entonces obtenemos

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & a_1 \\ a_2 & = & a_1 + i = a_1\left(1+\dfrac{r}{100}\right) \\ a_3 & = & a_1 + i + (a_1+i)\dfrac{r}{100} = a_1\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_t & = & a_1\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{t-1} \end{array}$$

Definición 2.2. *$G = \{a_1, a_2, \cdots, \} \subset \mathbb{R}$ es una Progresión Geométrica. Si existe $r \in \mathbb{R}$,tal que $r \neq 0$ y $r \neq 1$, y $a_{m+1} = a_m \cdot r \quad (\forall m; m \in \mathbb{N})$; r se llama la razón de la progresión geométrica*

Ejemplo 2.2.1. *$G = \{2, 4, 8, 10, \cdots\}$ es una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 2$*

Ejemplo 2.2.2. *$G = \{\sqrt{3}, -3, 3\sqrt{3}, -9, \cdots\}$ es una progresión geométrica con $a_1 = \sqrt{3}$ y $r = -\sqrt{3}$*

2.3. Propiedades de las progresiones geométricas. Si $G = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, \} \subset \mathbb{R}$, es una Progresión Geométrica de razón r entonces:

[1] El término de orden n se obtiene directamente de la fórmula

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

Para mostrar, (3), usaremos Inducción Matemática

♦ $a_1 = a_1 \cdot r^{1-1}$, así que nuestra fórmula es verdadera en su primera etapa.

♦ Supongamos que la fórmula es verdadera en la etapa n, es decir que,

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \qquad (*)$$

♦ Debemos para terminar, mostrar que

$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^n$$

En efecto

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \cdot r && \text{(Por definición de progresión geométrica)} \\ &= a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r && \text{(Usando la información provista por}(*)) \\ &= a_1 \cdot r^n \end{aligned}$$

[2] La suma de los n primeros términos se obtiene a través de la fórmula

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right] \quad (\forall n; n \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

Finalmente para mostrar, (4), hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot r^{i-1} \quad \text{(Usamos la información de (3))} \\ &= a_1 \sum_{i=1}^{n} r^{i-1} \\ &= a_1(1 + r + r^2 + \cdot + r^{n-1}) \\ &= a_1 \left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right] \end{aligned}$$

3. Ejercicios Propuestos de Progresiones

[1] Si el conjunto $A = \{ \frac{3}{2}, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{2n}\}$ es una Progresión Aritmética que satisface las siguientes condiciones:

- $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{2n-1} = 24$
- $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{2n} = 30$
- $a_{2n} = a_1 + \frac{21}{2}$

entonces determine, si es posible, el número de términos de la progresión aritmética.

[2] Si en una progresión geométrica $u_1 = 4$, $u_n = \dfrac{243}{8}$, $S_n = \dfrac{665}{8}$ entonces determine n y su razón r

[3] La suma de tres números en progresión aritmética es 27 y la suma de sus cuadrados es 293. Determine tales números

[4] Si en una progresión aritmética el quinto término es 15 y el décimo término es 30 entonces determine la progresión

[5] Si la suma de tres números en progresión geométrica es 26 y su producto es 216 entonces determine tales números.

[6] La suma de tres números en progresión aritmética es 30. Si al primero de ellos se le agrega 1, al segundo 5 y al tercero 29 se obtiene una progresión geométrica entonces determine ambas progresiones

[7] Determine 5 números reales en progresión geométrica, tales que la suma de los dos primeros es 24, y la razón es la cuarta parte del primer número.

[8] Si en una progresión aritmética A, se verifica que: El producto del segundo con el quinto término es 364, y además la diferencia de estos mismos términos es 15 entonces determine, si es posible la progresión A.

[9] Dada la progresión $T = \left\{ \dfrac{a+b}{2}, a, \dfrac{3a-b}{2}, \dots \right\}$.

(a) Calcule S_{21}. La suma de los primeros 21 términos.

(b) Exprese S_n usando el operador sumatoria.

[10] Sea $S = \{b_1, b_2, \dots \}$ una sucesión de numeros reales, tales que:

(a) $b_m = n$; $b_n = m$ y $n \neq m$

(b) Si además construimos una progresión aritmética $A = \{a_1, a_2, \dots, \}$ tal que $a_i = \dfrac{1}{b_i} \quad (\forall i; i \in \mathbb{N})$

entonces demuestre que la diferencia de la progresión es $d = \dfrac{1}{mn}$

[11] La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si se multiplican los números ubicados en los extremos por 4 y el número ubicado en el centro 5, se obtiene una progresión aritmética. Determine ambas progresiones.

[12] Si se tienen tres términos en progresión geométrica, y se resta 8 del segundo término se obtiene una progresión aritmética, y si en "esta" se resta 64 del tercer término resulta nuevamente una progresión geométrica. Determine, si es posible, todas las progresiones involucradas en el problema.

[13] Considere las progresiones

- ◇ $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ progresión geométrica
- ◇ $A = \{3, a_2, a_3, \dots\}$ progresión aritmética

tal que

- ○ $g_3 = 12$ y $g_7 = 192$
- ○ $\displaystyle\sum_{i=1}^{11} g_i = \sum_{i=1}^{50} a_i$

Determine la diferencia de la progresión A

4. Situaciones de Desempeño: Progresiones Aritméticas y Geométricas

4.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

4.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

(⋆) Lea cuidadosamente el problema.

(⋆) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

(⋆) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

(⋆) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

4.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

[1] Si $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ es una Progresión Aritmética que verifica simultáneamente las condiciones:

- d=40
- La suma de los 20 primeros términos es 650 (Es decir, $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} a_i = 650$)

entonces determine a_{10}

[2] Si $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$ una progresión aritmética entonces demuestre que

$$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right\}$$

Es también una progresión aritmética.

[3] Si $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que satisface las siguientes propiedades:

- A es una Progresión Aritmética
- a, b y c son los coeficientes de una ecuación cuadrática. es decir $ax^2 + bx + c = 0$
- $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{3}(a + b + c)$
- $x_1 \cdot x_2 + 7 = b$. Donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática

entonces determine los números a, b y c.

[4] Si $A = \left\{\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

- A es una progresión aritmética.
- $a + b \neq 0$, $a - b \neq 0$, $a + c \neq 0$ y $a - c \neq 0$

entonces demuestre que $\dfrac{a(a - c)}{(a - b)(a + c)} = 1$

[5] Si la suma de tres números en progresión aritmética es 24. Si además al primero de ellos se le resta 1, al segundo se le suma 4, y al tercero se le suma 25, se obtiene una progresión geométrica. Determine ambas progresiones.

[6] Si $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ es una progresión aritmética entonces demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

[7] Sea $A = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$ una progresión aritmética, y $p(x) = x^3 - 4x^2 + \dfrac{44}{9}x - \dfrac{16}{9} \in \mathbb{R}[x]$. Determine explícitamente A si $p(x_i) = 0$ para $(i = 1, 2, 3)$.

[8] Si $G = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset (\mathbb{R} - \{0\})$ que verifica las condiciones

(a) G es una progresión geométrica

(b) $a_{m+n} = a$

(c) $a_{m-n} = b$

Entonces determine $A = \{a_n, a_m\}$

[9] Si $G = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $a_i = \underbrace{11 \cdots 1}_{i-\text{ unos}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ entonces calcule $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

[10] Determine, si es posible, una progresión geométrica tal que verifica las siguientes propiedades:

- La diferencia entre el tercer y el primer términos es igual a 9 y

- la diferencia entre el quinto y el tercero es 36.

[11] Determine las soluciones de la ecuación $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ si sus raíces están en P.G.

[12] Tres números forman una progresión geométrica. Si al tercero de ellos le restamos 64, se transforma en progresión aritmética. Y realizado esto, le restamos 8 al segundo, entonces volvemos a tener una progresión geométrica. Determine los tres números iniciales.

5. Solución de Situaciones de Desempeño: Progresiones

[1] Si $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ es una Progresión Aritmética que verifica simultáneamente las condiciones:

- d=40
- La suma de los 20 primeros términos es 650 (Es decir, $\sum_{i=1}^{20} a_i = 650$)

entonces determine a_{10}

Solución

♦ Sea $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ la Progresión Aritmética pedida.

♦ Gestión de la información

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$ es una Progresión Aritmética entonces

$$\begin{aligned} 650 &= \frac{20}{2}(2a_1 + 19 \cdot 40) = 10 \cdot (2a_1 + 760) \Longrightarrow \\ 65 &= (2a_1 + 760) \Longrightarrow \\ a_1 &= -\frac{695}{2} \end{aligned}$$

♦ Luego, $a_{10} = -\frac{695}{2} + 9 \cdot 40 = \frac{25}{2}$

[2] Si $G = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, es una progresión geométrica que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

- $a_2 = 4$
- $\frac{a_4}{a_6} = \frac{25}{4}$

entonces determine la progresión G

Solución

♦ Sea $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ la Progresión Geométrica pedida.

♦ Gestión de la información

◇ $a_2 \in G \Longrightarrow a_1 \cdot r = 4$
◇ $a_4 \in G \wedge a_3 \in G \Longrightarrow a_4 = a_1 \cdot r^3 \wedge a_6 = a_1 \cdot r^5$

Luego,

$$\frac{a_4}{a_6} = \frac{1}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{4}{25} \Longrightarrow r = \pm\frac{2}{5}$$

♦ Finalmente como, $a_1 \cdot r = 4$ entonces $a_1 = \pm 10$. Así las posibles progresiones son:

$$G = \left\{10, 4, \frac{8}{5}, \cdots\right\} \vee G = \left\{-10, 4, -\frac{8}{5}, \cdots\right\}$$

[3] Si $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que satisface las siguientes propiedades:

- A es una Progresión Aritmética
- a, b y c son los coeficientes de una ecuación cuadrática. es decir $ax^2 + bx + c = 0$
- $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{3}(a + b + c)$
- $x_1 \cdot x_2 + 7 = b$. Donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática

entonces determine los números a, b y c.

Solución

⧫ Sea $A = \{a, b, c\}$ el conjunto pedido.

⧫ Gestión de la información

◇ A es una progresión aritmética si:

$$a = b - d \quad \text{y} \quad c = b + d \qquad (*)$$

Donde d es la diferencia de la progresión aritmética.

◇ Las raíces de una ecuación de segundo grado son de la forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

⧫ Así que,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Por tanto,

$$-\frac{b}{a} = \frac{1}{3}(b - d + b + b + d) \Longrightarrow -\frac{b}{a} = b \Longrightarrow a = -1$$

Luego, sustituyendo el valor de $a = -1$ en $(*)$ obtenemos que

$$b = d - 1 \quad \text{y} \quad c = 2d - 1 \qquad (**)$$

De la última información suministrada,

$$\left(\frac{c}{a} + 7 = b\right) \Longrightarrow \left(\frac{2d - 1}{-1} + 7 = d - 1\right) \Longrightarrow (8 - 2d = d - 1) \Longrightarrow d = 3$$

Finalmente sustituyendo los valores obtenidos en $(**)$ tenemos que: $a = -1; \quad b = 2 \quad$ y $\quad c = 5$

[4] Si $A = \left\{\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

- A es una progresión aritmética.
- $a + b \neq 0$, $a - b \neq 0$, $a + c \neq 0$ y $a - c \neq 0$

entonces demuestre que $\dfrac{a(a - c)}{(a - b)(a + c)} = 1$

Solución

♦ Debemos verificar que $\dfrac{a(a-c)}{(a-b)(a+c)} = 1$

♦ Gestión de la información

A es una progresión aritmética entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{b} = \frac{a+c}{ac} \\ &\Longleftrightarrow \quad b = \frac{2ac}{a+c} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{a(a-c)}{(a-b)(a+c)} &= \frac{a(a-c)}{(a - \frac{2ac}{a+c})(a+c)} \\ &= \frac{a(a-c)}{\left(\dfrac{a(a+c)-2ac}{a+c}\right)(a+c)} \\ &= \frac{a(a-c)}{(a^2+ac-2ac)} \\ &= \frac{a(a-c)}{(a^2-ac)} \\ &= \frac{a(a-c)}{a(a-c)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

[5] Si la suma de tres números en progresión aritmética es 24. Si además al primero de ellos se le resta 1, al segundo se le suma 4, y al tercero se le suma 25, se obtiene una progresión geométrica. Determine ambas progresiones.

Solución

♦ Sea $A = \{x, y, z\}$ la progresión aritmética pedida y $G = \{x-1, y+4, z+25\}$ la progresión geométrica pedida.

♦ Gestión de la información

⋄ A es una progresión aritmética si $x = y - d$ y $z = y + d$
Luego;

$$\begin{aligned} A &= \{y-d, y, y+d\} \\ G &= \{y-d-1, y+4, y+d+25\} \end{aligned}$$

$\diamond$ Ahora, $y - d + y + y + d = 24 \Longrightarrow y = 8$

Así que,

$$\begin{aligned} A &= \{8-d, 8, 8+d\} \\ G &= \{7-d, 12, 33+d\} \end{aligned}$$

$\diamond$ Además G es una progresión geométrica si:

$$\frac{12}{7-d} = \frac{33+d}{12}$$

Por tanto,

$$144 = (7-d)(33+d) \quad \Longrightarrow \quad d^2 + 26d - 87 = 0 \Longrightarrow d_1 = 3 \ \wedge \ d_2 = -29$$

$\blacklozenge$ Finalmente tenemos dos casos.

$\diamond$ $d = 3 \Longrightarrow \begin{cases} A & = \{8-3, 8, 8+3\} = \{5, 8, 11\} \\ G & = \{7-3, 12, 33+3\}\{4, 12, 36\} \end{cases}$

$\diamond$ $d = -29 \Longrightarrow \begin{cases} A & = \{8+29, 8, 8-29\} = \{37, 8, -21\} \\ G & = \{7+29, 12, 33-29\}\{36, 12, 4\} \end{cases}$

[6] Si $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$ una progresión aritmética entonces demuestre que

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \ \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}, \ \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right\}$$

Es también una progresión aritmética.

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que B es una progresión aritmética, es decir debemos mostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) A es una progresión aritmética entonces existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $b = a + d$ y $c = a + 2d$

(b) Usando esta información en los elementos de B obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} &= \frac{\sqrt{a+2d} - \sqrt{a+d}}{d} \\ \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} &= \frac{\sqrt{a+2d} - \sqrt{a}}{2d} \\ \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a+d} - \sqrt{a}}{d} \end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente de lo anterior podemos deducir que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{2\sqrt{a+d}-\sqrt{a}-\sqrt{a+2d}}{2d} \\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} &= \frac{2\sqrt{a+d}-\sqrt{a}-\sqrt{a+2d}}{2d} \end{aligned}$$

Y entonces B es una progresión aritmética

[7] Si $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ es una progresión aritmética entonces demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

En efecto

Como A es una progresión aritmética entonces existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_{i+1} = a_i + d$, para cada $i \in \mathbb{N}$, luego aplicando esta propiedad y otras de carácter algebraico obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}} \left(\frac{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}{a_i - a_{i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}{a_i - (a_i + d)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}{-d} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n-1} (\sqrt{a_{i+1}} - \sqrt{a_i}) \\ &= \frac{1}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) \\ &= \frac{1}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) \left(\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{(a_1)}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{(a_1)}}\right) \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{a_n - a_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}\right) \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}\right) \\ &= \frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}} \end{aligned}$$

[8] Sea $A = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$ una progresión aritmética, y $p(x) = x^3 - 4x^2 + \frac{44}{9}x - \frac{16}{9} \in \mathbb{R}[x]$. Determine explícitamente A si $p(x_i) = 0$ para $(i = 1, 2, 3)$.

Solución

Analizando la información podemos observar lo siguiente:

(a) A es una progresión aritmética si y sólo si existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x_1 = x_2 - d \wedge x_3 = x_2 + d) \Longrightarrow 2x_2 = x_1 + x_3 \qquad (*)$$

(b) $p(x_i) = 0$, para $i = 1, 2, 3$ entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Luego,

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = x^3 - 4x^2 + \frac{44}{9}x - \frac{16}{9}$$

(c) De la definición de igualdad de polinomios, sigue que:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 &=& 4 \\ x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 &=& \frac{44}{9} \\ x_1x_2x_3 &=& \frac{16}{9} \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_2 + (x_1 + x_3) &=& 4 \\ x_1x_3 + (x_1 + x_3)x_2 &=& \frac{44}{9} \\ x_1x_2x_3 &=& \frac{16}{9} \end{array}\right| \qquad (**)$$

(d) Sustituyendo el resultado de $(*)$ en $(**)$ obtenemos la nueva relación y sus consecuencias

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x_2 &=& 4 \\ x_1x_3 + 2x_2^2 &=& \frac{44}{9} \\ x_1x_2x_3 &=& \frac{16}{9} \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_2 &=& \frac{4}{3} \\ x_1x_3 &=& \frac{4}{3} \\ x_1x_2x_3 &=& \frac{16}{9} \end{array}\right| \Longrightarrow x_1(2x_2 - x_1) = \frac{4}{3} \Longrightarrow x_1\left(\frac{8}{3} - x_1\right) = \frac{4}{3}$$

(e) Finalmente, tenemos una ecuación de grado 2, cuyas soluciones son:

$$\frac{8}{3}x_1 - x_1^2 = \frac{4}{3} \Longrightarrow 3x_1^2 - 8x_1 + 4 = 0 \Longrightarrow \left(x_1 = 2 \vee x_1 = \frac{2}{3}\right)$$

Por tanto,

$$A = \left\{2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

[9] Si $G = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset (\mathbb{R} - \{0\})$ que verifica las condiciones

(a) G es una progresión geométrica

(b) $a_{m+n} = a$

(c) $a_{m-n} = b$

Entonces determine $A = \{a_n, a_m\}$

Solución

Analizando la información tenemos los siguientes resultados:

(a) Como G es una progresión geométrica entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $a_k = a_1r^{k-1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Aplicando lo obtenido encima, a los términos a_{m+n} y a_{m-n} tenemos que

$$\begin{array}{|ll|}\hline a = a_{m+n} & = a_1 r^{m+n-1} \\ b = a_{m-n} & = a_1 r^{m-n-1} \\ \hline \end{array} \Longrightarrow r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2n}} \quad \wedge \quad a_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+n-1}{2n}}$$

(c) Sustituyendo en a_k tenemos que

$$a_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+n-1}{2n}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k-1}{2n}} \Longleftrightarrow a_k = a\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k-m-n}{2n}}$$

(d) Finalmente obtenemos que

$$A = \{a_n, a_m\} = \left\{ a\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{2n}}, a\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

[10] Si $G = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $a_i = \underbrace{11\cdots 1}_{i-\text{ unos}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ entonces calcule $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Solución

Observemos en primer lugar que

$$a_i = \underbrace{11\cdots 1}_{i-\text{ unos}} = 1\cdot 10^{i-1} + 1\cdot 10^{i-2} + 1\cdot 10^{i-3} + \cdots + 1\cdot 10^{i-(i-1)} + 1\cdot 10^{i-i}$$

Es decir

$$a_i = \sum_{i=1}^{i} 10^{i-1} = \frac{10^i - 1}{10 - 1} = \frac{10^i - 1}{9}$$

Luego, para responder al problema procedemos a sumar,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{10^i - 1}{9} \\ &= \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{n}(10^i - 1)\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{n} 10^i - \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} - 1 - n\right) \qquad (*) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n\right) \\ &= \frac{10^{n+1} - 10}{81} - \frac{n}{9} \end{aligned}$$

[11] Determine, si es posible, una progresión geométrica tal que verifica las siguientes propiedades:

(a) La diferencia entre el tercer y el primer términos es igual a 9 y

(b) la diferencia entre el quinto y el tercero es 36.

Solución

- Sea $G = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ la progresión geométrica pedida.
- Gestionando la información tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl|} a_3 - a_1 & = & 9 \\ a_5 - a_3 & = & 36 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lcl|} a_1r^2 - a_1 & = & 9 \\ a_1r^4 - a_1r^2 & = & 36 \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{lcl|} a_1(r^2-1) & = & 9 \\ a_1r^2(r^2-1) & = & 36 \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{9}{36}$$

$$\Longrightarrow r = \pm 2$$

Finalmente, sustituyendo el valor de r en una de las ecuaciones tenemos que $a_1 = 3$. Así que para $r = 2$ una progresión es: $G = \{3, 6, 12, 24, 48 \dots\}$, y para $r = -2$ otra progresión es $G = \{3, -6, 12, -24, 48 \dots\}$

[12] Determine las soluciones de la ecuación $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ si sus raíces están en P.G.

Solución

(a) Observamos que

$$3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0 \Longleftrightarrow x^3 - \frac{26}{3}x^2 + 14x - 8 = 0$$

(b) Si llamamos $p(x) = x^3 - \frac{26}{3}x^2 + 14x - 8$ entonces

$$p(a) = 0 \Longleftrightarrow a^3 - \frac{26}{3}a^2 + 14a - 8 = 0$$

(c) Si a, b, c son las raíces de $P(x)$ entonces tenemos que,

$$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+c+b)x^2 + (ac+ab+bc)x - abc$$

Y, de la igualdad de polinomios sigue que

$$\begin{array}{rcr|} a+c+b & = & \frac{26}{3} \\ ac+ab+bc & = & 14 \\ abc & = & 8 \\ \hline \end{array} \qquad (*)$$

(d) Como las raíces están en progresión geométrica entonces

$$b = ar \wedge c = br \Longrightarrow abc = aarbr = a^2r^2b = b^3$$

Luego, reemplazando esta relación en $(*)$ nos queda que

$$\left.\begin{array}{rcr} a+c+b & = & \dfrac{26}{3} \\ ac+ab+bc & = & 14 \\ b^3 & = & 8 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} a+c+2 & = & \dfrac{26}{3} \\ ac+2a+2c & = & 14 \\ b & = & 2 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} a+c & = & \dfrac{20}{3} \\ ac+2(a+c) & = & 14 \\ b & = & 2 \end{array}\right|$$

De donde hasta ahora, concluimos que

$$b = 2 \wedge a + c = \frac{20}{3} \wedge ac = \frac{2}{3}$$

(e) Usando una vez más las relaciones que presentan los elementos de la progresión geométrica tenemos que

$$\begin{aligned} a + c = \frac{20}{3} &\Longrightarrow \frac{2}{r} + 2r = \frac{20}{3} \\ &\Longrightarrow 6 + 6r^2 = 20r \\ &\Longrightarrow 3r^2 - 10r - 3 = 0 \\ &\Longrightarrow r = 3 \quad \vee \quad \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(f) Finalmente las soluciones de la ecuación son

$$A = \left\{\frac{2}{3}, 2, 6\right\}$$

[13] Tres números forman una progresión geométrica. Si al tercero de ellos le restamos 64, se transforma en progresión aritmética. Y realizado esto, le restamos 8 al segundo, entonces volvemos a tener una progresión geométrica. Determine los tres números iniciales.

Solución

(a) Sea $G = \{x, xr, xr^2\}$ la progresión geométrica pedida.

(b) Gestionando la información tenemos lo siguiente:

- $G_1 = \{x, xr, xr^2 - 64\}$ es una progresión aritmética si y sólo si $xr - x = xr^2 - 64 - xr$, pero

$$\begin{aligned} xr - x = xr^2 - 64 - xr &\Longrightarrow xr^2 - 2xr + x = 64 \\ &\Longrightarrow x(r^2 - 2r + 1) = 64 \\ &\Longrightarrow x = \frac{64}{(r-1)^2} \qquad (*) \end{aligned}$$

- $G_2 = \{x, xr - 8, xr^2 - 64\}$ es una progresión geométrica si y sólo si $\dfrac{xr-8}{x} = \dfrac{xr^2-64}{xr-8}$, pero

$$\begin{aligned} \frac{xr-8}{x} = \frac{xr^2-64}{xr-8} &\Longrightarrow (xr-8)^2 = x^2r^2 - 64x \\ &\Longrightarrow x^2r^2 - 16xr + 64 = x^2r^2 - 64x \\ &\Longrightarrow -16xr + 64 = -64x \\ &\Longrightarrow 4x - xr + 4 = 0 \\ &\Longrightarrow x = \frac{4}{r-4} \qquad (**) \end{aligned}$$

- De $(*)$ y $(**)$ sigue que $\dfrac{64}{(r-1)^2} = \dfrac{4}{r-4}$, equivalentemente $\dfrac{16}{(r-1)^2} = \dfrac{1}{r-4}$. De donde sigue que

$$\begin{aligned}
16r - 64 = r^2 - 2r + 1 \quad &\Longrightarrow \quad r^2 - 18r + 65 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad r = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 260}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad r = \frac{18 \pm \sqrt{64}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad r = \frac{18 \pm 8}{2} \\
&\Longrightarrow \quad r = 5 \vee r = 13
\end{aligned}$$

(c) Sustituyendo el valor de $r = 5$ en $(*)$ tenemos que $x = 4$ y $G = \{4, 20, 100\}$

En el otro caso para $r = 13$ tenemos que $x = \dfrac{4}{9}$ y $G = \left\{\dfrac{4}{9}, \dfrac{52}{9}, \dfrac{676}{9}\right\}$

Contenidos