Rudimentos 3: Inducción Matemática
Profesor Ricardo Santander

El capitulo de Inducción Matemática, esta destinado a presentar contenidos y actividades que permitirán al estudiante operar con simbología matemática, describir analizar y aplicar el principio de Inducción Matemática, en particular usando esta técnica ”comprobará rápida y eficientemente, la veracidad o falsedad de fórmulas proposicionales definidas en los números naturales”

1. Axiomas de Peano: Una Construcción Axiomática de los Números Naturales

Si aceptamos que una teoría, se construye esencialmente en base a dos objetos:

- Conceptos primitivos, en el sentido que no son definidos, pero de una simple interpretación intuitiva y,
- Axiomas o verdades reveladas que se aceptan sin demostrar, y que rigen el comportamiento de los conceptos primitivos, y de ellos se deducen proposiciones y teoremas

Un muy buen ejemplo de una construcción axiomática que obedece este patrón, es la de los Números Naturales, a través de los geniales Axiomas de Peano, los que pasamos a enunciar y analizar sólo con la profundidad necesaria, para situar y resolver nuestro objetivo de estudiar más en detalle el Principio de Inducción

1.1. Axiomas de Peano.

El Concepto Primitivo aquí es la idea de sucesor. Es decir para cada $n \in \mathbb{N}$, el símbolo $\mathbf{n+1}$ se entenderá como el sucesor de dicho número n

Ejemplo 1.2. 3 *es el sucesor de* 2*, pues* $3 = 2 + 1$

Ejemplo 1.3. 7 *es el sucesor de* 6*, pues* $7 = 6 + 1$

Ejemplo 1.4. 33 *es el sucesor de* 32*, pues* $33 = 32 + 1$

El Cuerpo Axiomático consiste en los siguientes cinco Axiomas:

$\mathbf{Ax_1}$: 1 es un número natural

◦ Esto significa que existe al menos un número natural

$\mathbf{Ax_2}$: Si $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbf{n+1} \in \mathbb{N}$

∘ Todo número natural tiene un sucesor

∘ $n+1$ debe ser entendido como el símbolo sucesor de n

Ax$_3$: No existe un número natural n, tal que su sucesor sea 1

∘ Esto significa que $\mathbb{N}$ posee un primer elemento

Ax$_4$: Si $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{n+1 = m+1}$ entonces $\mathbf{n = m}$

∘ Esto significa que podemos escribir sin ambigüedad $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$

Ax$_5$: Si $\mathbb{S} \subset \mathbb{N}$ es tal que verifica simultáneamente las dos siguientes propiedades:

- $\mathbf{1} \in \mathbb{S}$
- $\mathbf{n} \in \mathbb{S} \Longrightarrow \mathbf{n+1} \in \mathbb{S}$

entonces $\mathbb{S} = \mathbb{N}$

∘ Ax$_5$ se conoce como el axioma de inducción o principio de inducción

∘ Es una de las más bellas estrategias que utiliza el intelecto humano, para ”hacer finito lo infinito”

∘ La idea expresada en el comando $1 \in \mathbb{S}$, es simbólica sólo dice que a partir de un cierto momento, comienza a realizarse sistemáticamente, (quizás la idea intuitiva del nacimiento) un algoritmo.

∘ En nuestro contexto, reinterpretaremos la idea de sucesor, para obtener un método para validar fórmulas proposicionales definidas en los naturales

2. Formalización y Verificación de Fórmulas Usando el Axioma de Inducción

En esta sección transformaremos el axioma de inducción de Peano, en una formidable herramienta para verificar el valor de verdad de fórmulas proposicionales, para ello procederemos como sigue

∘ Realizaremos en primer lugar la adecuación del axioma para la validación de fórmulas proposicionales, para ello enunciaremos y probaremos el teorema central de la sección, al cual lo llamaremos ”Peano y las fórmulas proposicionales”

∘ En Segundo lugar, construiremos en forma concreta, ayudados por la intuición y conocimientos geométricos básicos algunas fórmula proposicionales

∘ Finalmente, construiremos un ”macro” llamado sumatoria que nos permitirá comprimir, simplificar y comprender de mejor forma la información representada por estas fórmulas proposicionales

Teorema 2.1. Peano y las fórmulas proposicionales *Sea $F(n)$ una fórmula proposicional para cada $n \in \mathbb{N}$. Si*

∘ *$F(1)$ es verdadera, y*
∘ *$F(n)$ verdadera $\Longrightarrow F(n+1)$ verdadera*

Entonces $F(s)$ *es verdadera* $(\forall s; s \in \mathbb{N})$

Demostración

Para aplicar el axioma de inducción Ax_5 *definimos el conjunto*

$$\boxed{\mathbb{S} = \{n \in \mathbb{N} \mid F(n) \text{ es verdadera}\}}$$

Y entonces

- $F(1)$ *verdadera* $\Longleftrightarrow 1 \in \mathbb{S}$
- $[F(n)$ *verdadera* $\Longrightarrow F(n+1)$ *verdadera* $] \Longleftrightarrow [n \in \mathbb{S} \Longrightarrow (n+1) \in \mathbb{S}]$

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in \mathbb{S} \\ n \in \mathbb{S} \Longrightarrow (n+1) \in \mathbb{S} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{S} = \mathbb{N} \Longrightarrow F(n) \text{ es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

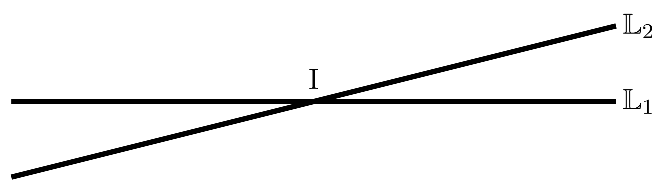
Usaremos la siguiente Notación: La etapa n*, es decir* $F(n)$ *la llamaremos "Hipótesis de Inducción", y a la etapa* $n+1$*, la llamaremos "Tesis de Inducción."*

3. Construcción de Algunas Fórmulas Proposicionales

3.1. Una fórmula para "La suma de los n primeros números naturales": Generemos una fórmula que permita calcular el número máximo de intersecciones de n líneas rectas distintas, para cada $n \in \mathbb{N}$

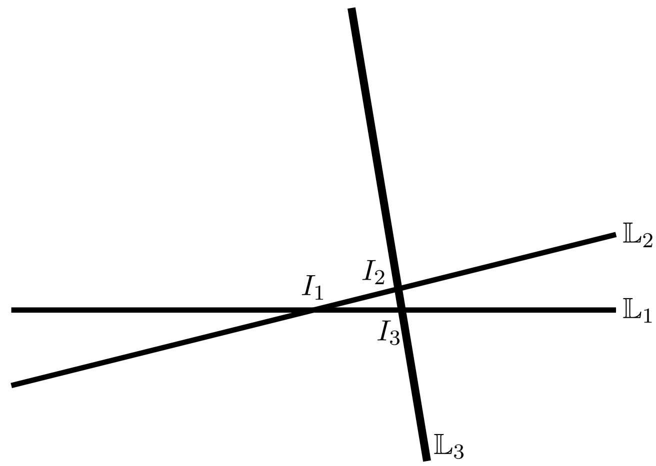
♦ Para entender el problema, llamaremos n al número de rectas e I al número de intersecciones de ellas

◇ Si $n = 2$ tenemos la situación:



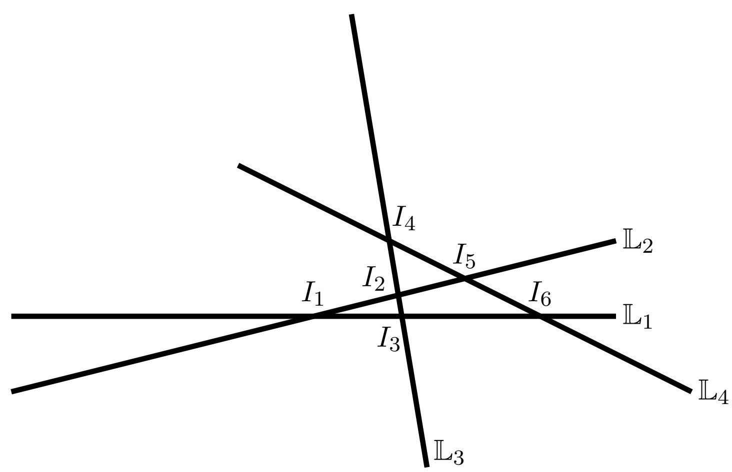
Lo que nos hace concluir que: $n = 2 \Longrightarrow I = 1$

◇ Para $n = 3$ tenemos que la situación, es la siguiente:



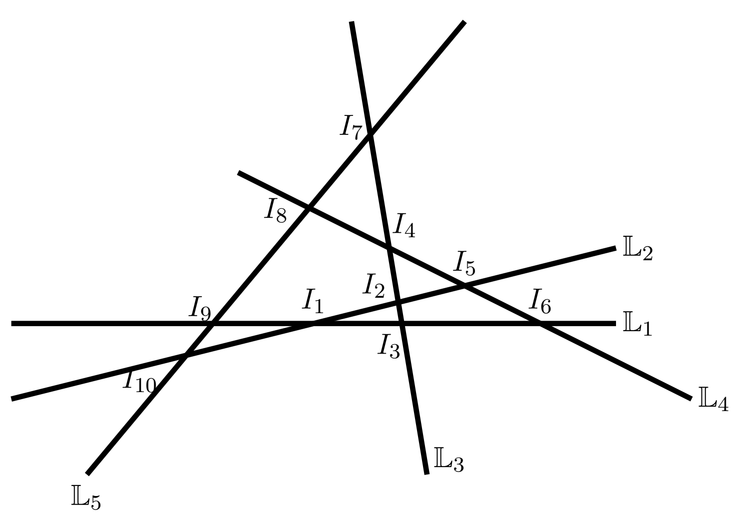
De donde concluimos que: $n = 3 \Longrightarrow I = 3 = (1) + 2$

$\diamond$ Para $n = 4$ tenemos que:



En este caso tenemos que: $n = 4 \Longrightarrow I = 6 = (1 + 2) + 3$

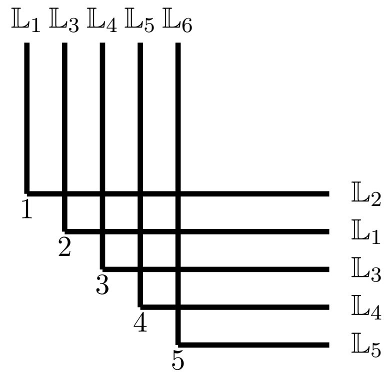
$\diamond$ Ahora para $n = 5$



La situación es la siguiente: $n = 5 \Longrightarrow I = 10 = (1 + 2 + 3) + 4$

⧫ Podemos intentar seguir realizando la intersección de más rectas, pero se ve que cada vez será más difícil graficar como lo hemos hecho hasta ahora, por tanto es el momento de intentar un modelamiento más abstracto del problema

◇ Partamos con $n = 6$



Aquí como antes tenemos que: $n = 6 \Longrightarrow 15 = (1 + 2 + 3 + 4) + 5$

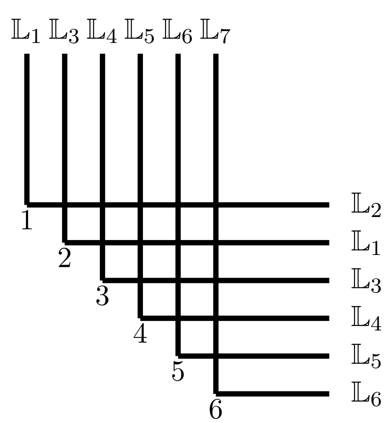
Desde el punto de vista algebraico tenemos la siguiente situación para analizar:

$$\begin{aligned}
15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
&= 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
&= 5 + (5 - 1) + (5 - 2) + (5 - 3) + (5 - 4) \\
&= (5 + 1) - 1 + (5 + 1) - 2 + (5 + 1) - 3 + (5 + 1) - 4 + (5 + 1) - 5 \\
&= 5(5 + 1) - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 \\
&= 5(5 + 1) - 15
\end{aligned}$$

Luego, $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5(5 + 1)$, o sea que

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5 + 1)}{2}$$

◇ Para $n = 7$



En este caso tenemos que: $n = 7 \Longrightarrow 21 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 6$

Procediendo en forma análoga al caso anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
21 &= 6+5+4+3+2+1\\
&= 6+(6-1)+(6-2)+(6-3)+(6-4)+(6-5)\\
&= (6+1)-1+(6+1)-2+(6+1)-3+(6+1)-\\
&\quad 4+(6+1)-5+(6+1)-6\\
&= 6(6+1)-1-2-3-4-5-6\\
&= 6(6+1)-21
\end{aligned}$$

Luego, $2(1+2+3+4+5+6)=6(6+1)$, de donde,

$$1+2+3+4+5+6 = \frac{6(6+1)}{2}$$

Pero, también podemos obtener el mismo resultado, razonando como sigue

$$\begin{aligned}
21 &= 1+2+3+4+5+6\\
&= \frac{5(5+1)}{2}+6\\
&= \frac{5(5+1)}{2}+(5+1)\\
&= \frac{5(5+1)+2(5+1)}{2} \qquad [\maltese]\\
&= \frac{7(5+1)}{2}\\
&= \frac{6\cdot 7}{2}\\
&= \frac{6(6+1)}{2}
\end{aligned}$$

♦ En el caso general emulando la primera forma de razonar tenemos que

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+n &= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-n+1)\\
&= (n+1)-1+(n+1)-2+\cdots+(n+1)-n\\
&= n(n+1)-1-2-3-\cdots-n\\
&= n(n+1)-(1+2+\cdots+n)
\end{aligned}$$

Así que,

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Luego, la fórmula $F(n)$, que define el número máximo de intersecciones de n rectas, para cada $n\in\mathbb{N}$ es de la forma

$$\boxed{F(n): \qquad 1+2+3+\cdots+n \;=\; \frac{n(n+1)}{n}} \tag{1}$$

Ahora aprovechando la idea obtenida en [✠], y aplicando el **Teorema** (2.1), podemos hacer lo siguiente:

- Mostremos inicialmente que $F(1)$ es verdadera

  Como $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ entonces $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$, y $F(1)$ es verdadera.

- Si suponemos que $F(n)$ es verdadera debemos mostrar que $F(n+1)$ es verdadera

  En primer lugar, $F(n)$ verdadera si y sólo si

  $$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (H)$$

  Ahora, $F(n+1)$ será verdadera si y sólo si

  $$1+2+3+4+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  Entonces

  $$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \underbrace{[1+2+3+\cdots+n]}_{(H)}+(n+1) \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

  Así, $F(n+1)$ es verdadera, y $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid F(n) \text{ es verdadera}\}$

3.2. Una fórmula para "La suma de los n primeros números naturales impares": Si notamos por $\mathbb{N}_{\mathbb{I}} = \{1, 3, 5, \cdots\}$ a los números impares entonces ¿Será posible obtener una fórmula para la suma de los n primeros impares?. Es decir

$$1+3+\cdots+(2n-1) \;=\; ?$$

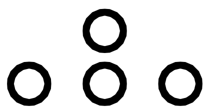
⧫ Estudiemos en abstracto el problema:

$$
\begin{array}{rcl}
1+3 & = & 1+2\cdot 1+1=(1+1)^2=2^2 \\
1+3+5 & = & 2^2+2\cdot 2+1=(2+1)^2=3^2 \\
1+3+5+7 & = & 3^2+2\cdot 3+1=(3+1)^2=4^2 \\
1+3+5+7+9 & = & 4^2+2\cdot 4+1=(4+1)^2=5^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

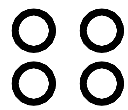
♦ Estudiemos ahora el problema en concreto:

Teoría | Diseño | Análisis | Fórmula

$1+3=4$



$1+3$

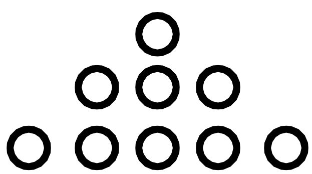


2^2

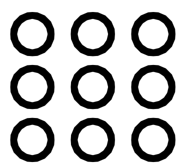
$\Longrightarrow$ $1+3=2^2$

Teoría | Diseño | Análisis | Fórmula

$1+3+5=9$



$1+3+5$

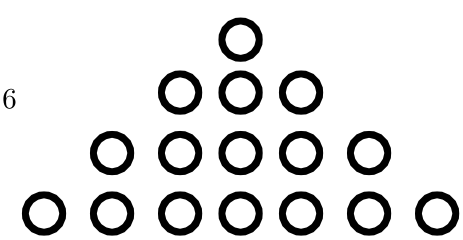


3^2

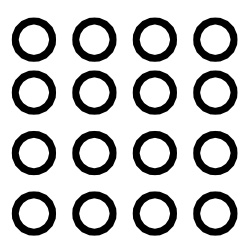
$\Longrightarrow$ $1+3+5=3^2$

Teoría | Diseño | Análisis | Fórmula

$1+3+5+7=16$



$1+3+5+7$



4^2

$\Longrightarrow$ $1+3+5+7=4^2$

♦ En el caso general deberíamos mostrar en concordancia con nuestra intuición que

$$1+3+\cdots+(2n-1) \quad = \quad n^2$$

$\diamond$ Si notamos por $F(n): \quad 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$, para cada $n\in\mathbb{N}$ entonces tenemos por calculo directo que $F(n)$ es verdadera o falsa.

$\diamond$ Si concordamos en que $\mathbb{S}=\{n\in\mathbb{N}\mid F(n)$ es verdadera$\}$ entonces tenemos lo siguiente:

$\circ$ $1\in\mathbb{S}$, pues $F(1)$ es verdadera, ya que $1=1^2$

$\circ$ Si suponemos que $n\in\mathbb{S}$, es decir asumimos que $F(n)$ es verdadera, o equivalentemente

$$1+3+\cdots+(2n-1) = n^2 \qquad (H)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) &= \underbrace{[1+3+\cdots+(2n-1)]}_{(H)}+\\
&\quad (2(n+1)-1)\\
&= n^2+(2(n+1)-1)\\
&= n^2+2n+1\\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

$F(n+1)$ es verdadera y luego, $(n+1)\in\mathbb{S}$, y entonces para cada $n\in\mathbb{N}$ es verdadera la fórmula

$$\boxed{1+3+\cdots+(2n-1) = n^2} \qquad (2)$$

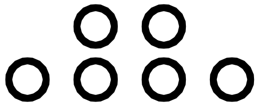
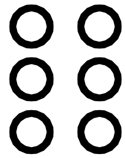
3.3. Una fórmula para "La suma de los n primeros números naturales pares": Si notamos ahora por $\mathbb{N}_{\mathbb{P}}=\{2,4,6,\cdots\}$ entonces ¿Será posible obtener una fórmula para la suma de los n primeros números pares?. Es decir

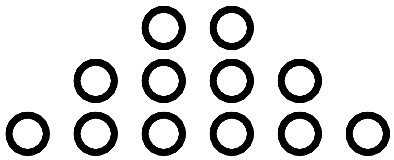
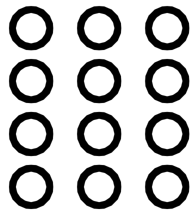
$$2+4+\cdots+2n = ?$$

⧫ Estudiemos intuitivamente el problema:

$$\begin{aligned}
2 &= 1\cdot 2\\
2+4 &= 1\cdot 2+(2\cdot 2)=2\cdot 3\\
2+4+6 &= 2\cdot 3+(2\cdot 3)=3\cdot 4\\
2+4+6+8 &= 3\cdot 4+(2\cdot 4)=4\cdot 5\\
2+4+6+8+10 &= 4\cdot 5+(2\cdot 5)=5\cdot 6\\
2+4+6+8+10+12 &= 5\cdot 6+(2\cdot 6)=6\cdot 7\\
2+4+6+8+10+12+14 &= 6\cdot 7+(2\cdot 7)=7\cdot 8\\
2+4+6+8+10+12+14+16 &= 7\cdot 8+(2\cdot 8)=8\cdot 9\\
\vdots\ &\ \vdots\ \ \vdots
\end{aligned}$$

⧫ Estudiemos ahora el problema en concreto:

Teoría	Diseño	Análisis		Fórmula
$2+4=6$	 $2(1+2)$	 $2\cdot 3$	$\Longrightarrow$	$2+4=2\cdot 3$

Teoría	Diseño	Análisis		Fórmula
$2+4+6=12$	 $2(1+2+3)$	 $3\cdot 4$	$\Longrightarrow$	$2+4+6=3\cdot 4$

♦ Estudiemos en abstracto el problema:

Si llamamos $F(n):\ 2+4+6+\cdot+2n=n(n+1)$ para cada $n\in\mathbb{N}$ entonces aplicando nuestro procedimiento formal, tenemos que definir el conjunto $\mathbb{S}=\{n\in\mathbb{N}\mid F(n)\text{ es verdadera}\}$, y verificar si este conjunto satisface o no el axioma 5

⋄ Por demostrar que $F(1)$ es verdadera, es decir $1\in\mathbb{S}$. Esto se verifica porque,

$$2 = 1(1+1)$$

⋄ Supongamos que $F(n)$ es verdadera, es decir, $n\in\mathbb{S}$, y

$$2+4+6+\cdot+2n = n(n+1) \qquad (H)$$

⋄ Por demostrar que $F(n+1)$ es verdadera, es decir por demostrar que $(n+1)\in\mathbb{S}$

En efecto

$$\begin{aligned}\underbrace{2+4+6+\cdot+2n}_{(H)}+2(n+1) &= n(n+1)+2(n+1)\\ &= (n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{N}=\mathbb{S}$ y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n\in\mathbb{N})$, es decir,

$$\boxed{2+4+6+\cdot+2n=n(n+1)} \qquad (3)$$

♦ Podemos responder en forma alternativa, con lo que hemos aprendido:

$$\begin{aligned} 2+4+\cdots+2n &= 2(1+2+3+\cdot+n) \\ &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \quad \text{(Aplicando la fórmula (1))} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

4. Sumatorias

En esta etapa construiremos y estudiaremos las propiedades de una herramienta matemática que nos permita comprimir, presentar y manipular eficientemente fórmulas proposicionales, que involucran sumas de una cantidad finita de números reales. Para ver una construcción de los Números Reales les sugiero ver [**?**]

Definición 4.1. *Dada la lista* $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ *definimos para cada* $n \in \mathbb{N}$, *el nuevo listado de números reales:*

$$S = \{S_1, S_2, S_3, \cdots\}$$

donde,

- $S_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$, *y*
- $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = S_n + a_{n+1}$

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n} \tag{4}$$

será llamada la "Sumatoria" de los n primeros elementos de la lista A

Observación 4.1.1. *La lista S ha sido construida, a partir de una nueva forma de usar el Axioma 5. de Peano pues, lo que hemos hecho en realidad es lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1} a_i &= a_1 \\ \sum_{i=1}^{2} a_i &= S_1 + a_2 = a_1 + a_2 \\ \sum_{i=1}^{3} a_i &= S_2 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i &= S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.2. *Si* $a_i = i$ *para* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \iff \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Así que, usando la fórmula (1) *tenemos que*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 4.1.3. *Si* $a_i = 2i - 1$ *para* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \iff \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$$

Usando la fórmula (2) *tenemos que*

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Ejemplo 4.1.4. *Si* $a_i = 2i$ *para* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \iff \sum_{i=1}^{n} 2i = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$$

Usando la fórmula (3) *tenemos que*

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$

4.2. Algunas Propiedades de las Sumatorias.

Si $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ y $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \subset \mathbb{R}$ son dos listas de reales y $c \in \mathbb{R}$ es una constante entonces tenemos:

[1] **Suma y Resta de Listas**

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i} \qquad (5)$$

En efecto,

Si hacemos $c_i = a_i + b_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \\
&= c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n \\
&= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n) \\
&= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i
\end{aligned}
$$

Análogamente si hacemos $c_i = a_i - b_i$ obtenemos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

[2] **Multiplicación de una lista por una constante**

$$
\boxed{\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{6}
$$

En efecto,

Si hacemos $d_i = ca_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} ca_i &= \sum_{i=1}^{n} d_i \\
&= d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n \\
&= ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n \\
&= c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n) \\
&= c\sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

[3] **Suma de una constante**

$$
\boxed{\sum_{i=1}^{n} 1 = n} \tag{7}
$$

En efecto,

Si hacemos $c_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} 1 &= \sum_{i=1}^{n} c_i \\
&= c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n \\
&= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n-\text{veces}} \\
&= n
\end{aligned}
$$

Además, para $c \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} c \cdot 1 \overset{(6)}{=} c \sum_{i=1}^{n} 1 \overset{(7)}{=} c \cdot n$$

[4] **Sumas Parciales de una lista**

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i} \tag{8}$$

En efecto,

Si hacemos $c_i = a_i$, para $i = 1, 2, \ldots, s$ y $d_i = a_{s+i}$, para $i = 1, 2, \ldots, n-s$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{n-s} d_i &= (c_1 + c_2 + \cdots + c_s) + (d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-s}) \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_s) + (a_{s+1} + a_{s+2} + \cdots + a_{s+n-s}) \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + \cdots + a_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{n-s} d_i &= \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{n-s} a_{s+i} \qquad \text{Si hacemos } j = s + i \text{ entonces} \\
&= \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{j=s+1}^{n} a_j \\
&= \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i
\end{aligned}$$

[5] **Suma telescópica**[1]

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}} \tag{9}$$

En efecto,

[1] Observe que en un telescopio la imagen es traslada hacia su ojo a través de los lentes

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) &\overset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - (a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}) \\
&= a_1 - a_{n+1}
\end{aligned}$$

[6] **Propiedad del reloj**[2]

$$\boxed{\sum_{i=s}^{r} a_i = \sum_{i=s+t}^{r+t} a_{i-t}} \tag{10}$$

En efecto, si hacemos $i = j - t$

$$\sum_{i=s}^{r} a_i = \sum_{j=s+t}^{r+t} a_{j-t}$$

[2]Observe que por ejemplo las 2.00 horas más 45 minutos, es lo mismo que las 3 horas menos 15 minutos

5. Ejercicios Propuestos de Inducción Matemática

Demuestre usando Inducción Matemática que las siguientes fórmulas son verdaderas $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

[1] $F(n): \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

[2] $F(n): \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

[3] $F(n): \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2+i)} = \frac{n}{n+1}$

[4] $F(n): \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

[5] $F(n): \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

[6] $F(n): \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

[7] $F(n): \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\, 2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$

[8] $F(n): \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

[9] $F(n): (0 \leq r \leq n) \Longrightarrow \binom{n}{r} \in \mathbb{N}$

[10] $F(n): 2^{n-1} \leq n!$

[11] $F(n): 3n \leq 3^n$

[12] $F(n): 4n^3 + 5n$ es divisible por 3

[13] $F(n): n^3 - n$ es divisible por 6

[14] $F(n): 5n^3 + 7n$ es divisible por 6

[15] $F(n): 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9

[16] $F(n): 5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13

[17] $F(n): n \in \mathbb{N}$ impar $\Longrightarrow 7^n + 1$ es divisible por 8

[18] $F(n): 7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64

6. Situaciones de Desempeño: Sumatoria e Inducción

6.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

6.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

6.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

[1] Calcule el valor de $\mathbb{S} = \displaystyle\sum_{k=10}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

[2] Si sabemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(kn) = 10500$ entonces determine el valor de $\mathbb{S} = \displaystyle\sum_{k=10}^{n} k^3$

[3] Calcule $\mathbb{S} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$

[4] Demuestre sólo usando propiedades de Sumatorias que

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \qquad (\text{ para cada } n \in \mathbb{N})$$

Concluya que

$$\sum_{k=10}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) - 11880}{4}, \quad (\text{ para cada } n \in \mathbb{N})$$

[5] Si, $\sum\limits_{k=1}^{9} x_k = 50$, $\sum\limits_{k=1}^{9} x_k^2 = 100$ y $3\sum\limits_{k=1}^{10} x_k = 180$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{10} (2x_k - c)^2 = 1050 \right\}$$

[6] Demuestre usando Inducción Matemática que es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$ la fórmula:

$$F(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

[7] Demuestre usando Inducción Matemática que la siguiente fórmula es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

$$\sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$$

[8] Si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} \subset \mathbb{R}$ es tal que:

- $a_i = i$ para $i = 1, 2$
- $a_s = \sum\limits_{i=1}^{s-1} a_i \quad (s \geq 3)$

entonces demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$

$$F(n): \quad a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$$

[9] Demuestre usando Inducción Matemática que es verdadera $(\forall n : n \in \mathbb{N})$ la fórmula

$$F(n): \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ es divisible por } 9$$

[10] Demuestre usando Inducción Matemática que es verdadera la fórmula:

$$F(n): \quad (n \in \mathbb{N} : n \text{ impar }) \Longrightarrow n(n^2 - 1) \text{ es divisible por} 24$$

[11] Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ no nulos, demuestre usando Inducción Matemática que $(a+b) | ((a+b)^m - a^m - b^m)$, $(\forall m; m \in \mathbb{N}; m \text{ impar })$

7. Solución de Situaciones de Desempeño: Sumatoria e Inducción

[1] Calcule el valor de $\mathbb{S}$ si

$$\mathbb{S} = \sum_{k=10}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

Solución

Calculamos directamente, aplicando propiedades de: Racionalización, Telescópica y operatoria aritmética normal.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=10}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} &= \sum_{k=10}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}\right)\\
&= \sum_{k=10}^{n} \frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}\\
&= \sum_{k=10}^{n} \frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1}\right)^2-\left(\sqrt{k}\right)^2}\\
&= \sum_{k=10}^{n} \frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{k+1-k}\\
&= \sum_{k=10}^{80} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{80} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) - \sum_{k=1}^{9} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\\
&= \left(\sqrt{80+1}-\sqrt{1}\right) - \left(\sqrt{9+1}-\sqrt{1}\right)\\
&= \sqrt{81}-\sqrt{10}\\
&= 9-\sqrt{10}
\end{aligned}$$

[2] Si sabemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(kn) = 10500$ entonces determine el valor de $\mathbb{S} = \displaystyle\sum_{k=10}^{n} k^3$

Solución

Etapa 1. Debemos calcular $\mathbb{S} = \displaystyle\sum_{k=10}^{n} k^3$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Aplicando directamente la fórmula obtenida en los ejercicios propuestos para el cálculo de "la suma de cubos," obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(b) Aplicando propiedades de sumatoria obtenemos

$$\sum_{k=1}^{20}(kn) = n\sum_{k=1}^{20} k = n\left(\frac{20(20+1)}{2}\right) = 210n$$

(c) Además como

$$\sum_{k=1}^{20}(kn) = 10500$$

entonces

$$210n = 10500 \Leftrightarrow n = 50$$

(d) Finalmente para el valor de $n = 50$ obtenido

$$\sum_{k=1}^{50} k^3 = \left(\frac{50(50+1)}{2}\right)^2 = 1.625.625$$

Etapa 3. Conclusión

$$\sum_{k=10}^{n} k^3 = \sum_{k=10}^{50} k^3 = \sum_{k=1}^{50} k^3 - \sum_{k=1}^{9} k^3 = 1.625.625 - 2025 = 1.623.600$$

[3] Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)}$$

Solución

Calculamos directamente, aplicando propiedades de: Racionalización, Telescópica y operatoria aritmética normal.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)}\left[\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}(k+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

[4] Demuestre sólo usando propiedades de Sumatorias que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k[k^2+3k+2] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [k^3+3k^2+2k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 3\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] + 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= n(n+1)\left(\left[\frac{n(n+1)}{4}\right] + 3\left[\frac{(2n+1)}{6}\right] + 2\left[\frac{1}{2}\right]\right) \\
&= n(n+1)\left(\left[\frac{n(n+1)}{4}\right] + \left[\frac{(2n+1)}{2}\right] + 1]\right) \\
&= n(n+1)\left(\frac{n(n+1)+2(2n+1)+4}{4}\right) \\
&= n(n+1)\left(\frac{n^2+n+4n+2+4}{4}\right) \\
&= n(n+1)\left(\frac{n^2+5n+6}{4}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

Concluya que

$$\sum_{k=10}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) - 11880}{4}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=10}^{n} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - \sum_{k=1}^{9} k(k+1)(k+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{9(9+1)(9+2)(9+3)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{11880}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) - 11880}{4}
\end{aligned}$$

[5] Si, $\sum\limits_{k=1}^{9} x_k = 50$, $\sum\limits_{k=1}^{9} x_k^2 = 100$ y $3\sum\limits_{k=1}^{10} x_k = 180$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{10} (2x_k - c)^2 = 1050 \right\}$$

En efecto, en primer lugar

$$\begin{aligned}
c \in \mathbb{S} &\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, \sum_{k=1}^{10} (2x_k - c)^2 = 1050 \\
&\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, \sum_{k=1}^{10} (4x_k^2 - 4x_k c + c^2) = 1050 \\
&\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, 4\sum_{k=1}^{10} x_k^2 - 4c\sum_{k=1}^{10} x_k + \sum_{k=1}^{10} c^2 = 1050 \\
&\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, 4\sum_{k=1}^{9} x_k^2 + 4x_{10}^2 - 4c\sum_{k=1}^{9} x_k - 4cx_{10} + 10c^2 = 1050 \qquad (*)
\end{aligned}$$

En segundo lugar, de las hipótesis del problema tenemos que

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{10} x_k = 180 &\implies \sum_{k=1}^{10} x_k = 60 \\
&\implies \sum_{k=1}^{9} x_k + x_{10} = 60 \\
&\implies 50 + x_{10} = 60 \\
&\implies x_{10} = 10 \qquad (**)
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo la información obtenida en $(**)$ conseguimos que

$$\begin{aligned}
c \in \mathbb{S} &\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, 4\cdot 100 + 4\cdot 100 - 4c\cdot 50 - 4c\cdot 10 + 10c^2 = 1050 \\
&\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, 800 - 240c + 10c^2 = 1050 \\
&\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, 10c^2 - 240c - 250 = 0 \\
&\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, c^2 - 24c - 25 = 0 \\
&\iff c \in \mathbb{R} \,\wedge\, (c = -1 \vee c = 25)
\end{aligned}$$

De donde concluimos que:

$$\mathbb{S} = \{-1, 25\}$$

[6] Demuestre usando Inducción Matemática que es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$ la fórmula:

$$F(n): \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Solución

♦ Para demostrar que $F(1)$ es verdadera, observamos los hechos:

- Por una parte, $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{1(2)(3)} = \frac{1}{6}$
- y por otra parte, $\displaystyle\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1(4)}{4(2)(3)} = \frac{1}{6}$

Luego, comparando los resultados concluimos que

$$\sum_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$$

Por ende, $F(1)$ es verdadera.

♦ Hipótesis de Inducción: Suponemos que $F(n)$ es verdadera. Esto es

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \qquad (H)$$

♦ Tesis de Inducción: Por demostrar que $F(n+1)$ es verdadera, es decir debemos verificar que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \sum_{k=n+1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&\overset{(H)}{=} \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

Así que $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

[7] Demuestre usando Inducción Matemática que la siguiente fórmula es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

$$\sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$$

Solución
Etapa 1. Debemos demostrar que la fórmula

$$F(n): \sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1),$$

es verdadera para $n = 1$

En efecto

$$\left.\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{i=1}^{1} 5^{i-1} & = & 5^{1-1} & = & 1 \\ \frac{1}{4}(5^1 - 1) & = & \frac{1}{4}(4) & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{1} 5^{i-1} = \frac{1}{4}(5^1 - 1)$$

Luego, $F(1)$ es verdadera

Etapa 2. Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1) \qquad (H)$$

Etapa 3. Tesis de Inducción

Debemos mostrar que $F(n+1)$ es verdadera, es decir que

$$\sum_{i=1}^{n+1} 5^{i-1} = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} 5^{i-1} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 5^{i-1}}_{H} + 5^n \\
&= \frac{1}{4}(5^n - 1) + 5^n \\
&= \frac{5^n - 1 + 4 \cdot 5^n}{4} \\
&= \frac{5 \cdot 5^n - 1}{4} \\
&= \frac{5^{n+1} - 1}{4} \\
&= \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)
\end{aligned}$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

[8] Si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} \subset \mathbb{R}$ es tal que:

- $a_i = i$ para $i = 1, 2$
- $a_s = \sum_{i=1}^{s-1} a_i \quad (s \geq 3)$

entonces demuestre usando Inducción Matemática que es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$ la fórmula:

$$F(n): \quad a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$$

Solución

♦ Por demostrar que $F(3)$ es verdadera.

En efecto

$$a_1 = 1 \wedge a_2 = 2 \Longrightarrow a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 = 3 \cdot 2^{3-3}$$

♦ Hipótesis de Inducción: Supongamos que $F(n)$ es verdadera, es decir que

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-3} \qquad (H)$$

♦ Por demostrar que $F(n+1)$ es verdadera, esto es; Por demostrar que:

$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdot + a_3 + a_2 + a_1 \\
&\overset{(H)}{=} 3\cdot 2^{n-3} + 3\cdot 2^{n-4} + 3\cdot 2^{n-5} + 3\cdot 2^{n-6} + 3\cdot 2^{n-7} + \cdots + 3 + 3 \\
&= 3(2^{n-3} + 2^{n-4} + 2^{n-5} + 2^{n-6} + 2^{n-7} + \cdots + 1) + 3 \\
&= 3\cdot \frac{2^{n-2}-1}{2-1} + 3 \\
&= 3\cdot 2^{n-2} - 3 + 3 \\
&= 3\cdot 2^{n-2}
\end{aligned}$$

Así que, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

[9] Demuestre usando Inducción Matemática que es verdadera $(\forall n : n \in \mathbb{N})$ la fórmula

$$F(n): \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ es divisible por } 9$$

Solución

(a) Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

En efecto

$1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 36 = 9\cdot 4.$

Luego $F(1)$ es verdadera.

(b) Hipótesis de Inducción: Supongamos que $F(n)$ es verdadera. Es decir, existe q, tal que

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9\cdot q \qquad (H)$$

(c) Por demostrar que $F(n+1)$ es verdadera, es decir por demostrar que existe r, tal que

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 9\cdot r$$

En efecto

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= 3n^3 + 18n^2 + 42n + 36 \\
n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9
\end{aligned}$$

Realizando la división tenemos que:

$$
\begin{array}{llcll}
 & 3n^3+18n^2+42n+36 & : & 3n^3+9n^2+15n+9 & = \quad 1 \\
(-) & & & & \\
 & 3n^3+9n^2+15n+9 & & & \\
 & -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-- & & & \\
 & 9n^2+27n+27 & & &
\end{array}
$$

Es decir que:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 &= 1\cdot(3n^3+9n^2+15n+9)+9n^2+27n+27 \\
&\overset{(H)}{=} 9\cdot q+9\cdot(n^2+3n+3) \\
&= 9\underbrace{(q+n^2+3n+3)}_{r}
\end{aligned}
$$

Así que, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n : n \in \mathbb{N})$

[10] Demuestre usando Inducción Matemática que es verdadera la fórmula:

$$F(n): \quad (n\in\mathbb{N} : n \text{ impar }) \Longrightarrow n(n^2-1) \text{ es divisible por} 24$$

Solución

♦ Por demostrar que $F(1)$ es verdadera

$(1^2-1)=1\cdot 0=0=24\cdot 0 \Longrightarrow 1(1^2-1)=24\cdot 0 \Longrightarrow F(1)$ es verdadera.

♦ Hipótesis de Inducción: Supongamos que F(n) es verdadera. Esto es

$$
\begin{array}{rcl}
(n\in\mathbb{N} : n \text{ impar }) & \Longrightarrow & n(n^2-1) \text{ es divisible por } 24 \\
 & \Updownarrow & \\
(\exists s; s\in\mathbb{N})\wedge(\exists r; r\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge(2s-1)((2s-1)^2-1)=24\cdot r \\
 & \Updownarrow & \\
(\exists s; s\in\mathbb{N})\wedge(\exists r; r\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge(2s-1)(4s^2-4s)=24\cdot r \\
 & \Updownarrow & \\
(\exists s; s\in\mathbb{N})\wedge(\exists r; r\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge\underbrace{8s^3-12s^2+4s}_{*}=24\cdot r
\end{array}
$$

♦ Tesis de Inducción: Por demostrar que F$(n+2)$ es verdadera. Esto es, debemos mostrar que

$$(n+2\in\mathbb{N} : n \text{ impar }) \quad\Longrightarrow\quad (n+2)((n+2)^2-1) \text{ es divisible por } 24$$

Equivalentemente, hay que mostrar que

$$\begin{aligned}(n+2\in\mathbb{N}: n \text{ impar }) &\Longrightarrow (\exists s; s\in\mathbb{N})(\exists u; u\in\mathbb{N}) : n=(2s-1)\wedge (n+2)((n+2)^2-1)=24\cdot u\\ &\Longrightarrow (\exists s; s\in\mathbb{N})(\exists u; u\in\mathbb{N}) : n=(2s-1)\wedge \underbrace{8s^3+12s^2+4s}_{**}=24\cdot u \qquad (T)\end{aligned}$$

Entonces dividiendo (**) por (*) tenemos que

$$\begin{array}{rcccl} & 8s^3+12s^2+4s & : & 8s^3-12s^2+4s & = & 1\\ (-) & & & & & \\ & 8s^3-12s^2+4s & & & & \\ & --------- & & & & \\ & 24s^2 & & & & \end{array}$$

Así que,

$$\begin{aligned}8s^3+12s^2+4s &= 1\cdot(8s^3-12s^2+4s)+24s^2\\ &\overset{(*)}{=} 24r+24s^2\\ &= 24\underbrace{(r+s^2)}_{u}\end{aligned}$$

Luego, F$(n+2)$ es verdadera y por tanto la fórmula proposicional F(n) es verdadera, para cada número natural impar

[11] Dados $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}$ no nulos,

(a) Demuestre usando Inducción Matemática que $(a+b)|(a^m+b^m)$, $(\forall m; m\in\mathbb{N}; m \text{ impar })$

(b) Concluya que $(a+b)|((a+b)^m-a^m-b^m)$, $(\forall m; m\in\mathbb{N}; m \text{ impar })$

Solución

Antes de resolver el problema, analicemos a la luz de lo aprendido, el porque se pide que m sea impar.

(a) Si m es par entonces

- Debe existir $k\in\mathbb{Z}$ tal que $m=2k$ y

$$a^m+b^m=a^{2k}+b^{2k}$$

- Si $b=-a$ entonces

$$\begin{aligned}a^{2k}+b^{2k} &= a^{2k}+(-a)^{2k}\\ &= a^{2k}+[(-1)^2a^2]^k\\ &= a^{2k}+a^{2k}\\ &= 2a^{2k}\neq 0\end{aligned}$$

- Por tanto, la proposición es falsa, es decir, $(a+b) \nmid (a^m + b^m)$

(b) Si m es impar entonces

- debe existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k+1$ y

$$a^m + b^m = a^{2k+1} + b^{2k+1}$$

- Si $b = -a$ entonces

$$\begin{aligned} a^{2k+1} + b^{2k+1} &= a^{2k+1} + (-a)^{2k+1} \\ &= a^{2k+1} + [(-a)^{2k}(-a)^1] \\ &= a^{2k+1} - a^{2k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Por tanto, la proposición es verdadera, es decir $(a+b) \mid (a^m + b^m)$ para cada número natural impar, y podemos verificar su veracidad para todos los naturales impares, usando la técnica de Inducción Matemática

Ahora apliquemos nuestra técnica "operacionalizada."

Etapa 1. Por demostrar que para $m = 1$ la afirmación es verdadera.

$$\left.\begin{aligned} a^1 + b^1 &= a + b \\ &= 1 \cdot (a-b) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (a-b)|(a^1 + b^1)$$

Y, se verifica la afirmación para $m = 1$

Etapa 2. Hipótesis de Inducción

Supongamos que la afirmación se verifica para $m = 2n+1$, esto es supongamos que $(a+b)|(a^{2n+1}+b^{2n+1})$, o sea que existe Q_{2n+1}, (es decir, Q_{2n+1} depende de n) tal que

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)Q_{2n+1} \qquad (H)$$

Etapa 3. Tesis de Inducción

Por demostrar que la afirmación es verdadera para $m = 2n+3$, esto es debemos mostrar que existe Q_{2n+3} tal que

$$a^{2n+3} + b^{2n+3} = (a+b)Q_{2n+3} \qquad (T)$$

En efecto

Es claro que, si queremos aplicar la hipótesis (H) entonces tenemos que "manipular algebraicamente" la tesis (T). En esta dirección tenemos que

$$
\begin{aligned}
a^{2n+3}+b^{2n+3} &= a^2a^{2n+1}+b^2b^{2n+1}\\
&\overset{(H)}{=} a^2\left[(a+b)Q_{2n+1}-b^{2n+1}\right]+b^2b^{2n+1}\\
&= a^2(a+b)Q_{2n+1}-a^2b^{2n+1}+b^2b^{2n+1}\\
&= a^2(a+b)Q_{2n+1}+(b^2-a^2)b^{2n+1}\\
&= a^2(a+b)Q_{2n+1}+(b+a)(b-a)b^{2n+1}\\
&= (a+b)\underbrace{\left[a^2Q_{2n+1}+(b-a)b^{2n+1}\right]}_{Q_{2n+3}}
\end{aligned}
$$

Luego, (T) es verdadera y la afirmación es verdadera para todo número natural impar.

Podríamos también demostrar la afirmación usando la siguiente variante. Dividimos directamente lo siguiente

$$
\begin{array}{lll}
 & a^{2n+3}+b^{2n+3} & : \ a^{2n+1}+b^{2n+1}=a^2\\
(-) & & \\
 & a^{2n+3}+a^2b^{2n+1} & \\
 & -------- & \\
 & b^{2n+3}-a^2b^{2n+1} &
\end{array}
$$

Luego del proceso de división sigue que:

$$
\begin{aligned}
a^{2n+3}+b^{2n+3} &= a^2(a^{2n+1}+b^{2n+1})+b^{2n+3}-a^2b^{2n+1}\\
&\overset{(H)}{=} a^2(a+b)Q_{2n+1})+b^{2n+3}-a^2b^{2n+1}\\
&= (a+b)\underbrace{\left[a^2Q_{2n+1}+(b-a)b^{2n+1}\right]}_{Q_{2n+3}}
\end{aligned}
$$

Entonces el resultado es el mismo, y efectivamente $(a+b)\mid(a^{2n+1}+b^{2n+1})$. Finalmente para conseguir la conclusión que nos pide el problema observamos que:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{2n+1}-a^{2n+1}-b^{2n+1} &= (a+b)^{2n+1}-(a^{2n+1}+b^{2n+1})\\
&= (a+b)[(a+b)^{2n}-Q_{2n+1}]
\end{aligned}
$$

Indice Alfabético

Contenidos