Rudimentos 1: Bases Numéricas y Polinomios
Profesor Ricardo Santander Baeza

Profesor Ricardo Santander Baeza

1. Introducción

El capitulo, "Bases numéricas y Polinomios" está destinado a presentar contenidos y actividades que deberían haber sido expuestos y discutidas, por los profesores y estudiantes en los correspondientes cursos de Segundo, Tercero y Cuarto de su Enseñanza Media, razón por la cual deseo abordar tópicos que permitan al estudiante, dentro de lo posible y en directa proporción a su trabajo, fortalecer y mejorar su operatoria básica. La herramienta escogida para el efecto son los polinomios, y la idea es introducir informalmente el concepto, el cual será abordado posteriormente desde el punto de vista de las estructuras algebraicas.

El punto de partida será escoger el fundamento natural de los polinomios en el número. El cual satisface todos los atributos de un buen axioma, porque buscando una buena respuesta para ¿ qué es un número?, podemos pasar por todas las épocas citando personajes fabulosos como: Pitágoras, Hermes, Hiram, entre otros, sin encontrar una respuesta satisfactoria, sin embargo todos tenemos, una idea que nos deja tranquilo respecto de lo que un número es, probablemente la más común de las interpretaciones, es asociar un número con la idea de cantidades de cosas, por ejemplo un maestro, tres malos albañiles, nueve escogidos caballeros, etc. Así que para una primera aproximación nos contentaremos con lo que él para nosotros representa, claro esta del punto de vista que nos conviene para nuestro propósito, y en ese tenor podemos citar algunos ejemplos.

[1] $33 = 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

[2] $987 = 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

La idea es que en la representación en potencias del número 10 (objetos del tipo 10^n), aceptamos como coeficientes (los números que multiplican a las potencias de 10) números mayores o iguales a 0 y menores que 10.

Para el caso del 33, lo hacemos así,

$$\begin{array}{rcccc} & 33 & : & 10 & = & 3 \\ - & 30 & & & & \\ & --- & & & & \\ & 3 & & & & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad 33 = 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Para el número 987 tenemos que

$$\begin{array}{rcc} & 987 & : \; 100 = 9 \\ - & 900 & \\ & --- & \\ & 87 & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad 987 = 9 \cdot 10^2 + 87 \quad \wedge \quad \begin{array}{rcc} & 87 & : \; 10 = 8 \\ - & 80 & \\ & -- & \\ & 7 & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad 87 = 8 \cdot 10^1 + 7$$

Sustituyendo, la representación de 87 obtenemos que:

$$987 = 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Definición 1.1. *Si* $(n \in \mathbb{N})$ *tal que*

$$n = a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0; \quad (0 \leq a_j \leq 9); (0 \leq j \leq s)$$

entonces

$$n = a_s a_{s-1} a_{s-2} a_{s-3} \cdots a_2 a_1 a_0 \tag{1}$$

La llamaremos representación del número n en base 10 o en el sistema decimal

Observación 1.1.1. *La idea de representar un número de la forma (1) no es una exclusividad de la base 10 (del número 10), más aún, si uno se fija en la idea central obtiene un algoritmo o procedimiento para representar números en cualquier base entera mayor o igual a 2.*

[1] *Por ejemplo $n = 10$ lo podemos representar en base "2", como sigue,*

$$\begin{aligned} 10 &= 8 + 2 \\ &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 \\ &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

Así que,

$$10 = 1010 \qquad (\ \textit{base } 2)$$

[2] *Para $n = 33$ tenemos que*

$$\begin{aligned} 33 &= 2 \cdot 16 + 1 \\ &= 2 \cdot 2^4 + 1 \\ &= 2^5 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

Luego,

$$33 = 100001 \qquad (\textit{base } 2)$$

[3] *Para $n = 10$ en base 3 tenemos*

$$\begin{aligned} 10 &= 9 + 1 \\ &= 3^2 + 1 \\ &= 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^0 \\ &= 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \end{aligned}$$

Así que,

$$10 = 101 \qquad (\ \textit{base } 3)$$

[4] *Para $n = 33$ también en base 3, tenemos que*

$$\begin{aligned} 33 &= 27 + 6 \\ &= 3^3 + 2 \cdot 3 \\ &= 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 \end{aligned}$$

Luego,

$$33 = 1020 \qquad (\textit{base } 3)$$

2. Ejercicios Propuestos de Bases Numéricas

[1] Exprese en base 2, los siguientes números:

- $x = 45$
- $x = 318$
- $x = 2402$

[2] Exprese en el sistema decimal los números:

- $x = 24512$ (base 7)
- $x = 1231231$ (base 4)

[3] Sin pasar por el sistema decimal, realice las siguientes conversiones:

- Escriba en base 8: $x = 321322$ (base 4), $x = 2122$ (base 4); $x = 12321$ (base 4)
- Escriba en base 3: $x = 666666$ (base 9)

3. Construcción Informal de polinomios

Hemos observado que es posible representar un número n, $(n \in \mathbb{N})$ en base m, $(m \in \mathbb{N})$, es decir,

$$n = a_q a_{q-1} \cdots a_1 a_0 \quad \text{(base m)} \Longleftrightarrow n = a_q m^q + \cdots + a_1 m^1 + a_0 m^0 \quad (0 \leq a_i < m)$$

porque,

- Las potencias de m están definidas, es decir, $m^0 = 1$ y $m^r \cdot m^t = m^{r+t}$
- Los coeficientes a_i de la representación en base m verifican la propiedad $0 \leq a_i \leq m$, esta propiedad permite ver a m, no como el número que es, sino como un "símbolo "
- Por tanto, para obtener una estructura similar, no podemos dejar de llevar en consideración estas propiedades...

Definición 3.1. *Una expresión se llama un polinomio en la variable "x", y con coeficientes en los números reales si:*

[1] *Es de la forma;*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \tag{2}$$

[2] *Los números a_s, donde $s = 0, 1, 2, \ldots, n$, se llaman los coeficientes del polinomio y son en este caso numeros reales.*

[3] *La variable x satisface las propiedades:*

(a) *x no es un número complejo*

(b) $x^0 = 1$

(c) $x^s \cdot x^t = x^{s+t}$

[4] *Los exponentes son números enteros no negativos, es decir* $n \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$

Ejemplo 3.1.1. *Algunos ejemplos de polinomios son:*

[1] $p(x) = 0+0x+0x^2+0x^3+\cdots+0x^n$; *se llama el polinomio nulo y lo escribiremos de la forma abreviada:* $p(x) = 0$

[2] $p(x) = 1 - 3 \cdot x^2 + x^5$

[3] $q(x) = \sqrt{3}\, x + \dfrac{5}{7}x^3$

[4] *De acuerdo a estudios hechos por la policía la cantidad de robos por cada 100.000 habitantes, a partir de 1990 puede calcularse aproximadamente por el polinomio:*

$$r(x) = 251 - 17.24 \cdot x + 1.76 \cdot x^2$$

- *¿Cuántos robos por cada 100.000 habitantes hubo aproximadamente en 1990?*

  Para este caso, tenemos el siguiente análisis del problema: 1990 es el primer año así que en $r(x)$ *hacemos* $x = 0$, *y obtenemos ;*

$$\begin{aligned} r(0) &= 251 - 17.24 \cdot 0 + 1.76 \cdot 0^2 \\ &= 251 \end{aligned}$$

- *¿Cuántos robos por cada 100.000 habitantes hubo aproximadamente en 2000?*

  Para este caso, debemos hacer en $r(x)$, $x = 10$, *y obtenemos;*

$$\begin{aligned} r(10) &= 251 - 17.24 \cdot 10 + 1.76 \cdot 10^2 \\ &= 251 - 172.4 + 176 \\ &\approx 255 \end{aligned}$$

- *¿Cuántos robos por cada 100.000 habitantes habrá aproximadamente en 2010?*
  Para este caso, haciendo en $r(x)$, $x = 20$, *obtendremos;*

$$\begin{aligned} r(20) &= 251 - 17.24 \cdot 20 + 1.76 \cdot 20^2 \\ &\approx 610 \end{aligned}$$

- *¿Será posible que en algún instante los robos se aproximen a cero por cada 100000 habitantes?*
  Para este caso, debemos hacer $r(x) = 0$, *es decir;*

$$\begin{aligned} 251 - 17.24 \cdot x + 1.76 \cdot x^2 &= 0 \Longrightarrow \\ x &= \frac{17.24 \pm \sqrt{(17.24)^2 - 4 \cdot 1.76 \cdot 251}}{2 \cdot 1.76} \\ &= \frac{17.24 \pm \sqrt{297.2176 - 1767.04}}{3.52} \\ &= \frac{17.24 \pm \sqrt{-1463.8224}}{3.52} \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

- *La conclusión es que no existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $r(x) = 0$, *es decir, esta fórmula indica que es necesario tomar otras medidas adicionales, caso contrario la delincuencia triunfará.!!!*

Definición 3.2. *Llamaremos grado de un polinomio al mayor exponente de la variable x, cuyo coeficiente es distinto de cero.*

Notación: $\partial(p(x)) =$ *grado del polinomio* $p(x)$

Ejemplo 3.2.1. *Algunos ejemplos del grado de un polinomio son:*

[1] $\partial(1 + 3x^3 - 2x^7) = 7$

[2] $\partial(a_0) = 0 \quad a_0 \in (\mathbb{R} - \{0\})$

[3] $\partial(2 + 3x - 5x^2 + x^4) = 4$

4. Adición de Polinomios

Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ entonces diremos que estos polinomios son iguales si poseen el mismo grado y coinciden todos sus coeficientes. Es decir

$$p(x) = q(x) \Longleftrightarrow n = m \quad \wedge \quad a_i = b_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Sabemos que la adición o suma de números se realiza en la forma usual, es decir

$$+\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ \hline 7 \end{array} \qquad +\begin{array}{c} 31 \\ 02 \\ \hline 33 \end{array} \qquad +\begin{array}{c} 3285 \\ 0015 \\ \hline 3300 \end{array}$$

Esta forma de disponer los números para sumarlos no es al azar, en realidad corresponde a un ordenamiento lógico, por ejemplo en base 10

$$+\begin{array}{c} 3 \cdot 10^0 \\ 4 \cdot 10^0 \\ \hline 7 \cdot 10^0 \end{array} \qquad +\begin{array}{c} 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 \\ 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \\ \hline 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \end{array} \qquad +\begin{array}{c} 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \\ 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \\ \hline 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 \end{array}$$

Otra posible escritura, que emule la escritura en base 10 es por ejemplo:

- $2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \Longrightarrow 2 = 10 \quad (base2)$
- $10 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1010 \quad (base2)$
- $12 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1100 \quad (base2)$

y podemos sumarlos como antes en su base...

$$+\begin{array}{rcccccccccl} 2 & = & 0 \cdot 2^3 & + & 0 \cdot 2^2 & + & 1 \cdot 2^1 & + & 0 \cdot 2^0 & (base2) \\ 10 & = & 1 \cdot 2^3 & + & 0 \cdot 2^2 & + & 1 \cdot 2^1 & + & 0 \cdot 2^0 & (base2) \\ \hline 12 & = & 1 \cdot 2^3 & + & 1 \cdot 2^2 & + & 0 \cdot 2^1 & + & 0 \cdot 2^0 & (base2) \end{array}$$

Para concluir esta motivación observen que nuestros polinomios se escriben " en base x ", aunque ya dijimos que x no es un número, sin embargo podemos imitar el procedimiento para sumar representaciones numéricas con las debidas precauciones.

Si $p(x) = 5 + 2x + 3 \cdot x^3 + x^5$ y $q(x) = 4x + 3x^2 - 7x^4$ entonces aplicando el formato utilizado para la representación de los números en las diversas bases tenemos que:

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
+ & p(x) & = & 5x^0 & + & 2x^1 & + & 0x^2 & + & 3x^3 & + & 0x^4 & + & 1 \cdot x^5 \\
 & q(x) & = & 0x^0 & + & 4x^1 & + & 3x^2 & + & 0x^3 & + & (-7)x^4 & + & 0x^5 \\ \hline
 & p(x)+q(x) & = & (5+0)x^0 & + & (2+4)x^1 & + & (0+3)x^2 & + & (3+0)x^3 & + & (0+(-7))x^4 & + & (1+0)x^5
\end{array}$$

Luego,

$$p(x)+q(x) \;=\; 5 \;+\; 6x^1 \;+\; 3x^2 \;+\; 3x^3 \;-\; 7x^4 \;+\; x^5$$

Definición 4.1. *Si consideramos los polinomios* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n$ *y* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n$ *entonces*

$$p(x)+q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3 + \cdots + (a_n+b_n)x^n \tag{3}$$

representará la adición de polinomios o la forma de sumar dos polinomios.

Ejemplo 4.1.1. *Si* $p(x) = x^2 + 5x - 2$ *y* $q(x) = 3x^2 + 7x + 4$ *entonces* $p(x) + q(x) = 4x^2 + 12x + 2$

Ejemplo 4.1.2. *Si* $p(x) = 4x^3 + 2x + 21$ *y* $q(x) = x^2 + x$ *entonces* $p(x) + q(x) = 4x^3 + x^2 + 3x + 21$

Observación 4.1.3. *Si recordamos que la resta de dos reales puede ser interpretada como la operación inversa de la adición, esto es,* $a - b = a + (-b)$ *entonces en nuestra óptica tenemos*

$$\begin{aligned}
45 - 12 &= (4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) - (1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0) \\
&= 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + (-1) \cdot 10^1 + (-2) \cdot 10^0 \\
&= 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \\
&= 33
\end{aligned}$$

Así que la resta de polinomios la definimos como sigue

Definición 4.2. *Si* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ *y* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n$ *entonces*

$$p(x)-q(x) = (a_0-b_0) + (a_1-b_1)x + (a_2-b_2)x^2 + (a_3-b_3)x^3 + \cdots + (a_n-b_n)x^n \tag{4}$$

representará la sustracción de polinomios o la forma de restar dos polinomios.

Ejemplo 4.2.1. *Si* $p(x) = x^2 + 5x - 2$ *y* $q(x) = 3x^2 + 7x + 4$ *entonces* $p(x) - q(x) = -2x^2 - 2x - 6$

Ejemplo 4.2.2. *Si* $p(x) = 4x^3 + 2x + 21$ *y* $q(x) = x^2 + x$ *entonces* $p(x) - q(x) = 4x^3 - x^2 + x + 21$

Definición 4.3. *Notaremos al conjunto de polinomios como:*

[1] $\mathbb{R}[x] \;=\; \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}; (0 \le i \le n) \wedge n \in \mathbb{N}\}$

[2] $\mathbb{R}_s[x] \;=\; \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \partial(p(x)) \le s\}$

4.4. Propiedades de la Adición de Polinomios. Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ y $r(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ entonces

[1] Verifican la llamada Propiedad Asociativa, la cual permite sumar un número finito de polinomio

$$p(x) + [q(x) + r(x)] = [p(x) + q(x)] + r(x)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
p(x) + [q(x) + r(x)] &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + [(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n)] \\
&= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \cdots + (b_n + c_n)x^n] \\
&= (a_0 + [b_0 + c_0]) + (a_1 + [b_1 + c_1])x + \cdots + (a_n + [b_n + c_n])x^n) \\
&= ([a_0 + b_0] + c_0) + ([a_1 + b_1] + c_1)x + \cdots + ([a_n + b_n] + c_n)x^n) \\
&= ([a_0 + b_0] + [a_1 + b_1]x + \cdots + [a_n + b_n]x^n) + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\
&= [(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)] + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\
&= [p(x) + q(x)] + r(x)
\end{aligned}$$

[2] Existe el polinomio 0 que llamaremos neutro aditivo tal que

$$p(x) + 0 = p(x) = 0 + p(x)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
p(x) + 0 &= (a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n) + (0 + 0x + \cdots + 0x^n) \\
&= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + \cdots (a_n + 0)x^n \\
&= a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n \\
&= p(x)
\end{aligned}$$

[3] Para $p(x)$ existe el polinomio inverso aditivo $-p(x)$ tal que

$$p(x) + (-p(x)) = 0$$

En efecto

$$\begin{aligned}
p(x) + (-p(x)) &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (-[a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n]) \\
&= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (-a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n]) \\
&= 0 + 0x + \cdots + 0x^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

[4] Verifican la llamada Propiedad Conmutativa

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
p(x)+q(x) &= (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)\\
&= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n\\
&= (b_0+a_0)+(b_1+a_1)x+\cdots+(b_n+a_n)x^n\\
&= (b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)+(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\\
&= q(x)+p(x)
\end{aligned}$$

5. Producto de Polinomios

La multiplicación usual de números nos dice que $3\cdot 11=33$, pero conforme a lo que observamos antes, también tenemos que:

$$\begin{aligned}
3\cdot 11 &= (3\cdot 10^0)\cdot(1\cdot 10^1+1\cdot 10^0)\\
&= (3\cdot 10^0)\cdot((1\cdot 10^1)+(3\cdot 10^0)\cdot(1\cdot 10^0)\\
&= (3\cdot 1)\cdot 10^{0+1}+(3\cdot 1)\cdot 10^{0+0}\\
&= 3\cdot 10^1+3\cdot 10^0
\end{aligned}$$

Del mismo modo, $231\cdot 27=6237$, y en base 10

$$\boxed{\begin{aligned}
231\cdot 27 &= (2\cdot 100+3\cdot 10+1\cdot 10^0)\cdot(2\cdot 10+7\cdot 10^0)\\
&= (2\cdot 10^2+3\cdot 10^1+1\cdot 10^0)\cdot(2\cdot 10+7\cdot 10^0)\\
&= (2\cdot 10^2)\cdot(2\cdot 10+7\cdot 10^0)+(3\cdot 10^1)\cdot(2\cdot 10+7\cdot 10^0)+(1\cdot 10^0)\cdot(2\cdot 10+7\cdot 10^0)\\
&= (2\cdot 10^2)\cdot(2\cdot 10)+(2\cdot 10^2)(7\cdot 10^0)+(3\cdot 10^1)\cdot(2\cdot 10)+(3\cdot 10^1)(7\cdot 10^0)+\\
&\quad (1\cdot 10^0)\cdot(2\cdot 10)+(1\cdot 10^0)(7\cdot 10^0)\\
&= 4\cdot 10^3+14\cdot 10^2+6\cdot 10^2+21\cdot 10^1+2\cdot 10+7\cdot 10^0\\
&= 4\cdot 10^3+(10^1+4\cdot 10^0)\cdot 10^2+6\cdot 10^2+(2\cdot 10^1+1\cdot 10^0)\cdot 10^1+2\cdot 10+7\cdot 10^0\\
&= 4\cdot 10^3+10^3+4\cdot 10^2+6\cdot 10^2+2\cdot 10^2+1\cdot 10^1+2\cdot 10+7\cdot 10^0\\
&= 5\cdot 10^3+12\cdot 10^2+3\cdot 10^1+7\cdot 10^0\\
&= 5\cdot 10^3+(10^1+2\cdot 10^0)\cdot 10^2+3\cdot 10^1+7\cdot 10^0\\
&= 5\cdot 10^3+10^3+2\cdot 10^2+3\cdot 10^1+7\cdot 10^0\\
&= 6\cdot 10^3+2\cdot 10^2+3\cdot 10^1+7\cdot 10^0\\
&= 6237
\end{aligned}}$$

La forma de multiplicar los números en base 10, sugiere definir el producto de polinomios en un caso pequeño como sigue:

Si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ y $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$ son dos polinomios de grado 3 y 2 respectivamente entonces imitando la idea podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
p(x)\cdot q(x) &= (a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2)\\
&= (a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)b_0+(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)b_1x+(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)b_2x^2\\
&= (a_0b_0+a_1b_0x+a_2b_0x^2+a_3b_0x^3)+(a_0b_1x+a_1b_1x^2+a_2b_1x^3+a_3b_1x^4)+\\
&\quad (a_0b_2x^2+a_1b_2x^3+a_2b_2x^4+a_3b_2x^5)\\
&= a_0b_0x^0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+(a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2)x^3+\\
&\quad (a_3b_1+a_2b_2)x^4+a_3b_2x^5
\end{aligned}$$

La idea anterior nos permite generar una definición de producto de polinomios:

Definición 5.1. *Si* $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ *y* $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$ *entonces*

$$p(x)\cdot q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots+c_{n+m}x^{n+m}$$

donde

$$\begin{array}{lcl}
c_0 & = & a_0b_0\\
c_1 & = & a_1b_0+a_0b_1\\
c_2 & = & a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2\\
c_3 & = & a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3\\
c_4 & = & a_4b_0+a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3+a_0b_4\\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

En general

$$c_s=a_sb_0+a_{s-1}b_1+a_{s-2}b_2+\cdots+a_2b_{s-2}+a_1b_{s-1}+a_0b_s \qquad 0\le s\le n+m$$

Ejemplo 5.1.1. *Si* $p(x)=2+5x-4x^3$ *y* $q(x)=x-7x^2+6x^4$ *entonces el producto es el siguiente:*

$$\begin{aligned}
p(x)q(x) &= c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+c_7x^7\\
&= 0+2x-9x^2-35x^3+8x^4+2x^5+0x^6-24x^7\\
&= 2x-9x^2-35x^3+8x^4+2x^5-24x^7
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{array}{lclcr}
c_0 & = & a_0b_0 & = & 0\\
c_1 & = & a_1b_0+a_0b_1 & = & 2\\
c_2 & = & a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2 & = & -9\\
c_3 & = & a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3 & = & -35\\
c_4 & = & a_4b_0+a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3+a_0b_4 & = & 8\\
c_5 & = & a_5b_0+a_4b_1+a_3b_2+a_2b_3+a_1b_4+a_0b_5 & = & 2\\
c_6 & = & a_6b_0+a_5b_1+a_4b_2+a_3b_3+a_2b_4+a_1b_5+a_0b_6 & = & 0\\
c_7 & = & a_7b_0+a_6b_1+a_5b_2+a_4b_3+a_3b_4+2_1b_5+a_1b_6+a_0b_7 & = & -24
\end{array}$$

5.2. Algunas Propiedades del Producto de Polinomios.

Si $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots + p_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ $q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_mx^m \in \mathbb{R}[x]$ y $s(x) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \cdots + s_tx^t \in \mathbb{R}[x]$ donde $n \leq m \leq t$ entonces

[1] Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la adición

$$p(x)[q(x) + s(x)] = p(x)q(x) + p(x)s(x)$$

En efecto, siguiendo el protocolo descrito en la definición de producto de polinomios tenemos por una parte, que:

$$\begin{array}{rcl} p(x)\cdot q(x) & = & c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m} \\ p(x)\cdot s(x) & = & d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots + d_{n+t}x^{n+t} \end{array}$$

donde,

$$\begin{array}{rcl} c_r & = & p_rq_0 + p_{r-1}q_1 + p_{r-2}q_2 + \cdots + p_2q_{r-2} + p_1q_{r-1} + p_0q_r \quad (0 \leq r \leq n+m) \\ d_r & = & p_rs_0 + p_{r-1}s_1 + p_{r-2}s_2 + \cdots + p_2s_{r-2} + p_1s_{r-1} + p_0s_r \quad (0 \leq r \leq n+t) \end{array}$$

Por otra parte,

$$\begin{array}{rcl} p(x)[q(x) + s(x)] & = & (p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n)\cdot[(q_0 + s_0) + (q_1 + s_1)x + \cdots + (q_t + s_t)x^t] \\ & = & u_0 + u_1x + \cdots + u_{n+t}x^{n+t} \end{array} \qquad (*)$$

donde,

$$u_r = p_r(q_0 + s_0) + p_{r-1}(q_1 + s_1) + \cdots + p_0(q_t + s_t) \qquad 0 \leq r \leq n+t$$

Pero,

$$\begin{array}{rcl} u_r & = & p_r(q_0 + s_0) + p_{r-1}(q_1 + s_1) + \cdots + p_0(q_t + s_t) \\ & = & p_rq_0 + p_rs_0 + p_{r-1}q_1 + p_{r-1}s_1 + \cdots + p_0q_t + p_0s_t \\ & = & (p_rq_0 + p_{r-1}q_1 + \cdots + p_0q_t) + (p_rs_0 + p_{r-1}s_1 + \cdots + p_0s_t) \\ & = & c_r + d_r \quad 0 \leq r \leq n+t \end{array} \qquad (**)$$

Sustituyendo $(*)$ en $(**)$, tenemos finalmente que

$$\begin{array}{rcl} p(x)[q(x) + s(x)] & = & u_0 + u_1x + \cdots + u_{n+t}x^{n+t} \\ & = & (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \cdots + (c_{n+t} + d_{n+t})x^{n+t} \\ & = & (c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+t}x^{n+t}) + (d_0 + d_1x + \cdots + d_{n+t}x^{n+t}) \\ & = & p(x)q(x) + p(x)s(x) \end{array}$$

[2] Existe el elemento neutro multiplicativo, $e(x) = 1$ pues,

$$\begin{array}{rcl} p(x)e(x) & = & (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n)\cdot(1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n) \\ & = & p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n \\ & = & p(x) \end{array}$$

6. Divisibilidad en $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$

Sabemos que para polinomios, el proceso inverso de sumar es restar, es decir, si sumar significa hacer entonces restar significa deshacer y viceversa. Pregunta ¿el producto de polinomios tiene proceso inverso?

La pregunta tiene sentido, pues el concepto de inverso esta ligada directamente a la construcción de algoritmos (procedimientos, fórmulas) que permiten realizar operaciones en forma rápida y eficiente, por ejemplo la fórmula:

$$1 \text{ dólar} = 550 \text{ pesos} \Longleftrightarrow 1 \text{ peso} = \frac{1}{550} \text{ dólar}$$

Nos permite usar sin problemas las monedas dólar y peso indistintamente, pues a la hora de comprar podemos hacer lo siguiente:

Si un articulo vale 300 dólares entonces sacamos la calculadora y hacemos

$$300 \text{ dólares} = 300 \cdot 1\text{dólar} = 300 \cdot 550 \text{ pesos} = 165000 \text{ pesos}$$

Por el contrario si un articulo vale 165000 pesos y sólo tenemos dólares entonces sacamos la calculadora y hacemos

$$165000 \text{ pesos} \quad = \quad 165000 \cdot 1 \text{ peso} = 165000 \cdot \frac{1}{550} \text{ dólares} = \frac{165000}{550} \text{ dólares} = 300 \text{ dólares}$$

Como se ve la existencia de una operación inversa esta ligada a la "resolución de ecuaciones"´es decir, cuando vale la equivalencia en el caso aditivo

$$x + a = b \Longleftrightarrow x = b - a$$

O en el caso multiplicativo

$$ax = b \Longleftrightarrow x = \frac{b}{a} \qquad (a \neq 0)$$

Por ahora seguiremos actuando en forma intuitiva y haremos lo siguiente.

- ¿ Qué significa que $\dfrac{8}{2} = 4$?
  - Podemos interpretar concretamente así:

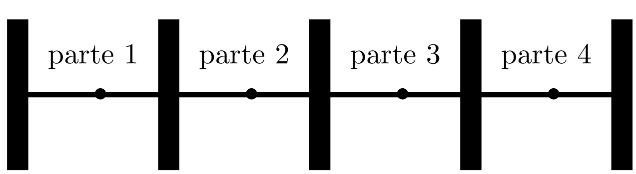


Figura 1: $8 \div 2$

◦ Podemos también interpretar simbólicamente como sigue:

$$\begin{array}{cccccc} & 8 & : & 2 & = & 4 \\ (-) & 4\cdot 2 & & & & \\ & --- & & & & \\ & 0 & (\text{resto}) & & & \end{array}$$

- ¿ Qué significa que $\dfrac{9}{2} = 4.5$?

◦ En concreto tenemos que,

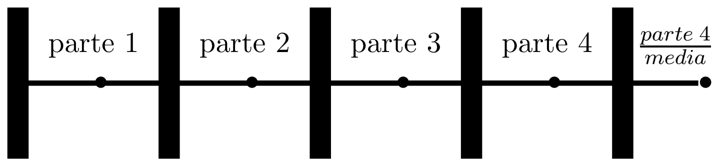


Figura 2: $9 \div 2$

◦ Simbólicamente tenemos:

$$\begin{array}{cccccc} & 9 & : & 2 & = & 4 \\ (-) & 4\cdot 2 & & & & \\ & - & & & & \\ & 1 & (\text{resto}) & & & \end{array}$$

En resumen, esto se representa normalmente como

$$8 = 2\cdot 4 + 0 \Longleftrightarrow \frac{8}{2} = 4 + \frac{0}{2} \qquad \wedge \qquad 9 = 2\cdot 4 + 1 \Longleftrightarrow \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Conclusión 6.1. *Si n y m son dos números enteros entonces diremos que n divide m si existe un número entero s tal que $m = n\cdot s$. En símbolos podemos escribir como sigue:*

$$n|m \iff (\exists s; s\in \mathbb{Z}) \ : \ m = n\cdot s$$

Motivados por el comportamiento de los números, preguntamos: ¿ Cómo generalizar estas ideas a los polinomios?.

Podemos copiar el algoritmo anterior, en algunos casos conocidos:

[1] Como $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, pues $(x-1)(x+1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1$ entonces

$$\begin{array}{ll} & (x^2-1):(x-1) = \text{x+1} \\ \text{(-)} & \\ & \underline{x^2 - x} \\ & x - 1 \\ \text{(-)} & \\ & \underline{x-1} \\ & 0 \end{array}$$

Es decir,

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) + \frac{0}{x-1}$$

[2] Como $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, entonces las soluciones de la ecuación $x^2 - 1 = 0$ son $x = 1$ o $x = -1$

[3] Si escribimos $p(x) = x^2 - 1$ entonces este polinomio puede ser interpretado como una fórmula llamada función que estudiaremos más adelante, por ahora esta formula funciona como sigue:

$$p(a) = a^2 - 1, \qquad a \in \mathbb{R}$$

En particular,

$$\begin{array}{lclcl} p(2) & = & 2^2 - 1 & = & 3 \\ p(-2) & = & (-2)^2 - 1 & = & 3 \\ p(5) & = & 5^2 - 1 & = & 24 \\ p(1) & = & 1^2 - 1 & = & 0 \\ p(-1) & = & (-1)^2 - 1 & = & 0 \\ \textit{etc...} & & & & \end{array}$$

[4] Si consideramos el conjunto

$$Graf(p(x)) = \{(x, p(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x^2 - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

entonces el gráfico en el plano de este es el siguiente:

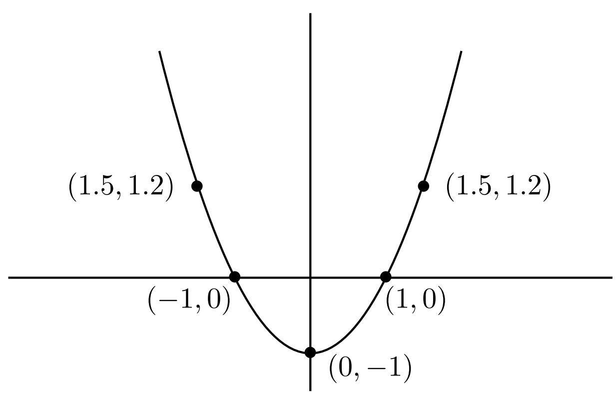


Figura 3: $p(x) = x^2 - 1$

Esto, nos permite adoptar por ahora, un convenio para evaluar polinomios:

Definición 6.2. *Si* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ *entonces*

[1] $p(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + a_3c^3 + \cdots + a_nc^n$, *para cada* $c \in \mathbb{R}$

[2] $p(c) = 0 \iff (x-c)|p(x) \iff$ *el resto de la división* $p(x) \div (x-c)$ *es* 0.

En tal caso decimos que c es una raíz ó un cero ó un valor de anulamiento del polinomio en el conjunto especificado.

Ejemplo 6.2.1. *La idea es descomponer en factores usando un pseudo algoritmo de la división.*

[1] *Si* $p(x) = x^3 - 1$ *entonces* $p(1) = 1^3 - 1 = 0$, *luego podemos dividir:*

$$\begin{array}{rl} & x^3 - 1 \quad : \quad x - 1 = x^2 + x + 1 \\ (-) & x^3 - x^2 \\ & --- \\ & x^2 - 1 \\ (-) & x^2 - x \\ & --- \\ & x - 1 \\ (-) & x - 1 \\ & --- \\ & 0 \end{array}$$

Y conseguimos, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

[2] *Si* $p(x, y) = x^3 - y^3$ *entonces* $p(y, y) = y^3 - y^3 = 0$, *luego podemos dividir:*

$$\begin{array}{rl} & x^3 - y^3 \quad : \quad x - y = x^2 + xy + y^2 \\ (-) & \\ & x^3 - x^2y \\ & --- \\ & x^2y - y^3 \\ (-) & \\ & x^2y - xy^2 \\ & --- \\ & xy^2 - y^3 \\ (-) & \\ & xy^2 - y^3 \\ & --- \\ & 0 \end{array}$$

Es decir, $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

[3] *En general,* $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$

[4] *Extendamos esta idea para el caso* $h(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, *como sigue*

- $a = \sqrt{x} \Longleftrightarrow x = a^2 \qquad \wedge \qquad b = \sqrt{y} \Longleftrightarrow y = b^2$
- $a^2 - b^2 \;=\; (a - b)(a + b) \;\Longrightarrow\; x - y \;=\; (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

[5] *Como,* $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$ *entonces para* $a = x^n$ *y* $b = y^n$ *tenemos la fórmula:*

$$a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})((\sqrt[n]{a})^{n-1} + (\sqrt[n]{a})^{n-2}(\sqrt[n]{b}) + (\sqrt[n]{a})^{n-3}(\sqrt[n]{b})^2 + \cdots + (\sqrt[n]{b})^{n-1})$$

7. Ejercicios Propuestos de Polinomios

7.1. Factorización directa de trinomios. Descomponga en factores

[1] $p(x) = x^5 - x$

[2] $p(x) = 2x^3 + 6x^2 + 10x$

[3] $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 10x$

[4] $p(x) = x^4 - 5x^2 - 36$

[5] $p(x, y) = 3xy + 15x - 2y - 10$

[6] $p(x) = 2xy + 6x + y + 3$

7.2. Factorización de trinomios usando sustitución. Ideas para resolver

Consideremos el trinomio; $p(x) = (x-2)^2 + 3(x-2) - 10$ entonces podemos desarrollar el siguiente procedimiento o algoritmo:

- Sea $u = x - 2$
- Sustituyendo en $p(x)$ tenemos que

$$p(x) = (x-2)^2 + 3(x-2) - 10 \Longleftrightarrow q(u) = u^2 + 3u - 10$$

- Resolvemos la ecuación de segundo grado para la variable u.

$$\begin{aligned} q(u) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad u = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad u = \frac{-3 \pm 7}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad u = \begin{cases} u = 2 \\ \quad \vee \\ u = -5 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad q(2) = 0 \vee q(-5) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad q(u) = (u-2)(u+5) \end{aligned}$$

- Volvemos a la variable original y obtenemos:

$$\begin{aligned} p(x) &= ((x-2)-2)((x-2)+5) \\ &= (x-4)(x+3) \end{aligned}$$

Usando el procedimiento anterior factorice los siguientes:

[1] $p(x) = (x-3)^2 + 10(x-3) + 24$

[2] $p(x) = (x+1)^2 - 8(x+1) + 15$

[3] $p(x) = (2x+1)^2 + 3(2x+1) - 28$

[4] $p(x) = (3x-2)^2 - 5(3x-2) - 36$

[5] $p(x) = 6(x-4)^2 + 7(x-4) - 3$

7.3. Planteamiento y resolución de ecuaciones polinomiales.

A modo de ejemplo, consideremos el problema:

Una sala de clases posee 78 sillas universitarias. Si el número de sillas por fila es uno más que el doble del número de filas entonces determine el número de filas y de sillas por fila.

- Planteamiento del problema

  Si x es la variable que representa el número de filas entonces $x(2x+1)$ representa el número de sillas por fila, así que

$$x(2x+1) = 78 \text{ representa el número total de sillas}$$

- Resolvemos la ecuación $2x^2 + x - 78 = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 78 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+624}}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm 25}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 6 \vee x = -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

- Decidimos la factibilidad de los resultados:

  Como el número de filas es un natural, así que desechamos $x = -\frac{13}{2}$ y $x = 6$ es el resultado posible y hay 13 sillas por fila.

Resuelva los siguientes problemas:

[1] Determine dos enteros consecutivos cuyo producto sea 72

[2] Determine dos enteros cuyo producto sea 105 y uno de ellos debe ser uno más que el doble del otro.

[3] El perímetro de un rectángulo mide 32 cm y su área es de 60 cm^2. Determine las dimensiones del rectángulo.

[4] Si el largo de un rectángulo excede en 2 cm al triple de su ancho y su área es 56 cm^2. Determine las dimensiones del rectángulo.

[5] La suma de las áreas de dos círculos es 65π centímetros cuadrados. Si el radio del círculo mayor mide un centímetro menos que el doble del radio del círculo menor entonces determine el radio de cada círculo.

7.4. División de polinomios. Realice las divisiones que se indican:

[1] $(x^2 - 7x - 78) \div (x + 6)$

[2] $(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \div (x^2 + x - 1)$

[3] $(5a^3 + 7a^2 - 2a - 9) \div (a^2 + 3a - 4)$

[4] $(2n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 3n - 4) \div (n^2 + 1)$

[5] $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

[6] $(x^5 - 1) \div (x - 1)$

7.5. Ecuaciones con radicales. Resuelva las ecuaciones

[1] $\sqrt{x+2} = 7 - \sqrt{x+9}$

[2] $\sqrt{x^2 + 13x + 37} = 1$

[3] $\sqrt[3]{x+1} = 4$

[4] $\sqrt[3]{3x-1} = -4$

[5] $\sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{2-5x}$

8. Situaciones de Desempeño: Polinomios

8.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.
(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.
(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.
(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.
(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

8.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.
($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.
($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.
($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

8.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

[1] Si $p(x) = 6(x-4)^3 + 7(x-4)^2 - 3(x-4) \in \mathbb{R}[x]$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}$$

[2] Determine el siguiente conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+19} - \sqrt{x+28} = -1\}$$

[3] Si $f(x) = \dfrac{x^4-16}{x^2-4}$ entonces grafique en el plano $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, el conjunto

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

[4] Si $p(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n$ entonces demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(x-1)^2 | p(x) \quad \wedge \quad (x-1)^3 \not| \, p(x)$$

[5] Demuestre que el polinomio $p(x) = (x-3)^{2n} + (x-2)^n - 1$ es divisible por $d(x) = x^2 - 5x + 6$.

[6] Determine m y n de modo que el polinomio $q(x) = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4$ sea un cuadrado perfecto

9. Solución de Situaciones de Desempeño: Polinomios

[1] Si $p(x) = 6(x-4)^3 + 7(x-4)^2 - 3(x-4)$ entonces

(a) Observamos que

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S} &\iff x \in \mathbb{R} \wedge p(x) = 0 \\ &\iff x \in \mathbb{R} \wedge 6(x-4)^3 + 7(x-4)^2 - 3(x-4) = 0 \end{aligned}$$

(b) Directamente vemos que $p(4) = 6(4-4)^3 + 7(4-4)^2 - 3(4-4) = 0$. Así que $4 \in \mathbb{S}$ y $(x-4)|p(x)$, es decir

$$(4 \in \mathbb{R} \wedge p(4) = 0) \wedge (\exists q(x); q(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = (x-4)q(x))$$

(c) Además del proceso de división sigue que:

$$\begin{aligned} 6(x-4)^3 + 7(x-4)^2 - 3(x-4) &= (x-4)\underbrace{(6(x-4)^2 + 7(x-4) - 3)}_{q(x)} \\ &= (x-4)(6x^2 - 48x + 96 + 7x - 28 - 3) \\ &= (x-4)(6x^2 - 41x + 65) \\ &= (x-4)\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{13}{3}\right) \end{aligned}$$

(d) Así que el conjunto pedido es

$$\mathbb{S} = \left\{\frac{5}{2},\ 4,\ \frac{13}{3}\right\}$$

[2] Observamos que $x \in \mathbb{S} \iff x \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{x+19} - \sqrt{x+28} = -1$. Así que

$$\begin{aligned} \sqrt{x+19} - \sqrt{x+28} = -1 &\implies (\sqrt{x+19} - \sqrt{x+28})^2 = (-1)^2 \\ &\implies (x+19) - 2\sqrt{x+19}\sqrt{x+28} + (x+28) = 1 \\ &\implies 2\sqrt{x+19}\sqrt{x+28} = 2x + 46 \\ &\implies \sqrt{x+19}\sqrt{x+28} = x + 23 \\ &\implies (\sqrt{x+19}\sqrt{x+28})^2 = (x+23)^2 \\ &\implies (x+19)(x+28) = x^2 + 46x + 529 \\ &\implies x^2 + 47x + 532 = x^2 + 46x + 529 \\ &\iff x = -3 \end{aligned}$$

Así que el conjunto pedido es

$$\mathbb{S} = \left\{\frac{5}{2},\ 4,\ \frac{13}{3}\right\}$$

[3] Si $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^2-4}$ entonces

(a) Para graficar $\mathbb{S}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=f(x)\}$ entramos al conjunto aplicando su definición

$$\begin{aligned}
(x,y)\in\mathbb{S} &\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \wedge\ y=f(x)\\
&\iff (x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \wedge\ y=\frac{x^4-16}{x^2-4}\\
&\iff \left(x,\frac{x^4-16}{x^2-4}\right) \ \wedge\ x\in\mathbb{R}\wedge x^2-4\neq 0\\
&\iff \left(x,\frac{x^4-16}{x^2-4}\right) \ \wedge\ x\in(\mathbb{R}-\{-2,2\})
\end{aligned}$$

(b) ahora como, $2^4-16=0$ y $(-2)^4-16=0$ entonces $(x-2)(x+2)=(x^2-4)|(x^4-16)$. Así que dividimos seguros de obtener un resto nulo !!!

$$\begin{array}{rcl}
x^4-16 & \div & x^2-4=x^2+4\\
\underline{x^4-4x^2} & & \\
4x^2-16 & & \\
\underline{4x^2-16} & & \\
0 & &
\end{array}$$

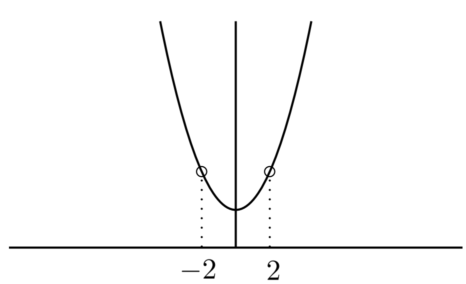
De donde sigue que,

$$\frac{x^4-16}{x^2-4} \ = \ x^2+4 \quad (x\neq\pm 2)$$

Por tanto

$$(x,y)\in\mathbb{S} \iff \left(x,x^2+4\right) \ \wedge\ x\in(\mathbb{R}-\{-2,2\})$$

(c) Su gráfico es de la forma



[4] Si $p(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos aplicar las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^{n+1} - (n+1)x + n \\
&= x^{n+1} - nx - x + n \\
&= x^{n+1} - nx + n - x \\
&= x^{n+1} + n(1-x) - x \\
&= x(x^n - 1) + n(1-x) \\
&= x(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdots + x + 1) + n(1-x) \\
&= x(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdots + x + 1) - n(x-1) \\
&= (x-1)x(x^{n-1} + x^{n-2} \cdots + x + 1) - n(x-1) \\
&= (x-1)(x^n + x^{n-1} \cdots + x^2 + x) - n(x-1) \\
&= (x-1)(x^n + x^{n-1} \cdots + x - n) \\
&= (x-1)(x^n + x^{n-1} \cdots + x - \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n-\text{ veces el } 1}) \\
&= (x-1)\big((x^n - 1) + (x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1) + \cdots + (x-1)\big) \\
&= (x-1)\,((x-1)q_1(x) + (x-1)q_2(x) + (x-1)q_3(x) + \cdots + (x-1)\cdot 1) \\
&= (x-1)^2 \underbrace{(q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) + \cdots + 1)}_{\text{no divisible por } (x-1)}
\end{aligned}
$$

[5] Demuestre que el polinomio $p(x) = (x-3)^{2n} + (x-2)^n - 1$ es divisible por $d(x) = x^2 - 5x + 6$.

En efecto

Etapa 1. Sabemos que, $d(x)|p(x)$ si y sólo si existe un polinomio $q(x)$ tal que $p(x) = d(x)q(x)$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Observamos directamente que

$$p(3) = (3-3)^{2n} + (3-2)^n - 1 = 0 \Longrightarrow p(x) = (x-3)q_1(x)$$

(b) Análogamente,

$$p(2) = (2-3)^{2n} + (2-2)^n - 1 = 0 \Longrightarrow p(x) = (x-2)q_2(x)$$

Etapa 3. Conclusiones

(a) Como $p(x) = (x-3)q_1(x)$ y $p(2) = 0$ entonces
$$0 = p(2) = (2-3)q_1(2) \Longrightarrow -q_1(2) = 0 \Longrightarrow q_1(2) = 0$$

(b) Luego, existe $q_3(x)$ tal que $q_1(x) = (x-2)q_3(x)$. Así que juntando la información obtenemos que
$$p(x) = (x-3)(x-2)q_3(x) = (x^2 - 5x + 6)q_3(x)$$

En cualquier caso, $(x^2 - 5x + 6)|p(x)$

[6] Determine m y n de modo que el polinomio $q(x) = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4$ sea un cuadrado perfecto

En efecto

Etapa 1. Debemos determinar si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(x^2 + ax + 2)^2 = q(x)$.

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Observemos que un tal a existe si y sólo si

$$x^4 + (4 + a^2)x^2 + 2ax^3 + 4ax + 4 = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4 \qquad (*)$$

(b) $(*)$ es posible si y sólo si

$$\left.\begin{array}{ll} 2a & = m \\ 4a & = n \\ 4 + a^2 & = 29 \end{array}\right|$$

(c) Si escogemos $a = 5$ entonces debemos tener que $m = 10$ y $n = 20$. Si escogemos $a = -5$ entonces debemos tener que $m = -10$ y $n = -20$

Contenidos