Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico Facultad de Ingeniería

Guía N°4: Espacios Vectoriales con Producto Interno
Coordinación de álgebra II
Diciembre del 2015

La persistencia en el Trabajo
caracteriza al estudiante "Usachino"

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente, operar con Espacios Vectoriales con Producto Interno.

1. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema.
(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.
(3) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más.
(4) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

2. Ejercicios: Producto Interno

(1) Demuestre que en $\mathbb{R}^2$

$$\langle (u_1,\, u_2), (v_1, v_2)\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2$$

Es un producto interior.

(2) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces demuestre que

$$\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

Es un producto interno.

(3) Sea $\mathbb{V} = \langle \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}\rangle$. Define en $\mathbb{V}$ el producto interno

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\, dx$$

Demuestre que $\mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n. Si $\{v, w\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal de vectores unitarios entonces

(a) Pruebe que el conjunto $\mathbb{U} = \{2v + 2w,\ v - w\}$ es un conjunto ortogonal

(b) Calcule $d(v,\ \langle U\rangle)$

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 5y = 0\}$, usando el producto usual de $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine una base ortogonal de $\mathbb{W}$

(b) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(c) $d((x, y, z), \mathbb{W})$

(6) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z - t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$.

(b) $d((x, y, z, t), \mathbb{W})$

(7) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0 \wedge 2x + 4y - 2z + 2t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(b) Calcule $d((1, 1, 0, 0), W)$

(8) Sea $\mathbb{W} = \{(1, 1, 2, 0), (0, -1, 4, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) ¿Es posible determinar $P_{\mathbb{W}}$?. Si es posible exhiba una tal proyección, caso contrario, justifique su respuesta

(b) ¿Es posible determinar $P_{\langle\mathbb{W}\rangle}$?. Si es posible exhiba una tal proyección, caso contrario, justifique su respuesta

(9) Consideremos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ con el producto interno usual, es decir, $\langle A, B\rangle = tr(B^t \cdot A)$.

(a) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $d\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{W}\right)$

(b) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{W}\right)$

(c) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid tr(A) = 0\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{W}\right)$

(10) Si en el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ consideramos para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) \tag{1}$$

Y el subespacio $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 + a_1 - 3a_2 = 0\}$ entonces respecto de (1)

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(b) Calcule $d(1 + x + x^2, \mathbb{W})$

(11) En $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios hasta grado 2, considere el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)\,dx \tag{2}$$

(a) Determine una base ortonormal respecto del producto interno definido en (2) a partir de la base $\alpha = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$

(b) Si $\mathbb{W} = \langle\{1, 1 + x\}\rangle$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $d(x, \mathbb{W})$

(12) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

(a) $P_{\mathbb{W}} \circ P_{\mathbb{W}} = P_{\mathbb{W}}$

(b) $P_{\mathbb{W}}$ es sobreyectiva

(c) $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

(d) $P_{\mathbb{W}}(w) = w \Longleftrightarrow w \in \mathbb{W}$

(13) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

(a) $d(u, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow u \in \mathbb{W}$

(b) $d(u, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow P_{\mathbb{W}}(u) = u$

(14) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n con producto interno $\langle , \rangle$, y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ conjunto ortogonal respecto de } \langle , \rangle \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ conjunto linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

BUEN TRABAJO !!!