Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico Facultad de Ingeniería

Guía de Ejercicios N°3 : Espacios Vectoriales
Coordinación de Álgebra II
Diciembre del 2015

La persistencia en el Trabajo
caracteriza al estudiante "Usachino"

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente, operar con:

(1) Espacios Vectoriales: Subespacios y Subespacios Generados

(2) Base y Dimensión: Sistema de Generadores y Dependencia e independencia lineal

(3) Sistemas de Coordenadas: Matriz cambio de base.

Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema.
(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.
(3) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más.
(4) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

1. Espacios Vectoriales: Subespacios Vectoriales

(1) Demuestre que $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 0 \wedge x - y + z - 2t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$

(2) Demuestre que $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A - 3A = (0)\} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(3) Demuestre que $\mathbb{W} = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\} \leq \mathbb{R}_2[x]$

(4) Demuestre que $\mathbb{W} = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0 \wedge p(1) = 0\} \leq \mathbb{R}_3[x]$

(5) Demuestre que $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + a_1 - 2a_2 - a_3 = 0\} \leq \mathbb{R}_3[x]$

(6) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, donde ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$ entonces demuestre que

(a) $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in \mathbb{W}_1 \wedge w_2 \in \mathbb{W}_2\} \leq \mathbb{V}$

(b) $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$

(c) $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \not\leq \mathbb{V}$

(d) $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V} \Longleftrightarrow \mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2 \vee \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{W}_1$

Definición Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$ entonces diremos que $\mathbb{V}$ es "Suma Directa "de los subespacios encima mencionados si satisface simultáneamente las propiedades:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 &= \mathbb{V} \\ \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 &= \{0_{\mathbb{V}}\} \end{aligned}$$

El prototipo de ejemplo de este tipo lo encontramos en el Plano cartesiano. Pues si

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \text{ Es el conocido "Eje } x \text{ "} \\ \mathbb{W}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \text{ Es el conocido "Eje } y \text{ "} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} (x,y) &= \underbrace{(x,0)}_{\in \mathbb{W}_1} + \underbrace{(0,y)}_{\in \mathbb{W}_2} \in \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \\ \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 &= (0,0) \end{aligned}$$

Con este acuerdo en mente, ejecute los siguientes ejercicios.

(7) Sea $\mathbb{V} = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función}\}$. Si consideramos los subconjuntos de $\mathbb{V}$;

$\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$ y $\mathbb{W}_2 = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$.

(8) Sea $\mathbb{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 3z = 0\}$

(a) Muestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3$

(b) Determine $\mathbb{U} \leq \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$

(9) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid 2a_0 - a_1 + 3a_2 = 0\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

(b) Determine $\mathbb{U} \leq \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathbb{R}_2[x] = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$

(10) Si $\mathbb{W} = \left\{ A = (a_{ii}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid \sum_{i=1}^{2} a_{ii} = 0 \right\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq M_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Determine $\mathbb{U} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$

2. Base de un Espacio Vectorial: Sistemas de Generadores e Independencia Lineal

(1) Considere el conjunto $\alpha = \{1+2x+3x^2, 2+4x+6x^2, 3+cx+4x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S}_1 = \{c \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ sea linealmente independiente}\}$$

(2) Considere el conjunto $\alpha = \{1+2x+3x^2, 2+4x+6x^2, 3+cx+4x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S}_2 \quad = \quad \{c \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ sea un sistema de generadores}\}$$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{V}$. Si $\beta = \{v_1+2v_2, v_1-3v_3, v_1-2v_2+3v_3\} \subset \mathbb{V}$ entonces

(a) Demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \implies \beta \text{ base de } \mathbb{V}$$

(b) Recíprocamente demuestre que

$$\beta \text{ base de } \mathbb{V} \implies \alpha \text{ base de } \mathbb{V}$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Define el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{j}(-1)^i v_i$, para $1 \leq j \leq n$..

(a) Demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \implies \beta \text{ base de } \mathbb{V}$$

(b) Recíprocamente demuestre que

$$\beta \text{ base de } \mathbb{V} \implies \alpha \text{ base de } \mathbb{V}$$

(5) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n)$. Demuestre que A invertible si y sólo si sus filas son linealmente independientes en $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(1 \times n)$

(6) Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ entonces demuestre que $\beta = \{v_1, \dots, v_n, u\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{V}$.

(7) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que α linealmente independiente $\mathbb{V} \iff \alpha$ es un sistema de generadores $\mathbb{V}$

3. Sistemas de Coordenadas: Matriz Cambio de Base

(1) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, Considere los conjuntos $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ y $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $u_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} v_{s+1-i}$, para $s = 1, 2, \dots n$.

(a) Demuestre que α base de $\mathbb{V} \implies \beta$ base de $\mathbb{V}$

(b) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(2) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si $[I]_{c(3)}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ entonces determine la base α

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$. Si A es una matriz cambio de base entonces $\det(A) \neq 0$

(4) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. ¿Es $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ una base de $\mathbb{V}$?. Si $w_i = av_1 + v_i$, para $(i = 1, 2, \dots n)$ y $a \neq -1$ es un escalar fijo. Si sus respuesta es afirmativa determine la matriz $[I]_\alpha^\beta$

(5) Si $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ entonces determine, si es posible, una base β de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ tal que

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) Sea $\beta = \{1, 1 - x, 1 - x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$, y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine, si es posible, una base α de $\mathbb{R}_2[x]$ del tal forma que $A = [I]_\alpha^\beta$. Si es posible exhiba una tal base α, si no justifique con precisión meridiana su respuesta.

(7) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si definimos la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ tal que $a_{ij} = i$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Determine, si es posible, una base β de $\mathbb{V}$ tal que $A = [I]_\alpha^\beta$

(8) Define en $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ la siguiente relación

$$A \,\Re\, B \iff (\exists P; P \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))): \; B = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

(b) Demuestre que $A \,\Re\, B \Longrightarrow \det(A) = \det(B)$

BUEN TRABAJO !!!