Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico Facultad de Ingeniería

Guía de Ejercicios N°1 : Matrices y Determinantes

Coordinación de Álgebra II

Profesores:Maritza Cuevas, Michael Yañez y Ricardo Santander Baeza

Octubre del 2015

El Trabajo dignifica
al ser humano

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente, operar con:

(1) Matrices y Determinantes

1. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema.
(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.
(3) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más.
(4) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

2. Matrices y Determinantes

(1) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Demuestre que

$$A \text{ matriz diagonal } \wedge B \text{ matriz diagonal } \quad \Longrightarrow \quad AB = BA$$

(2) Si llamamos traza de una matriz a la función Tr definida por

$$\begin{array}{rccl} Tr & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & (a_{ij}) & \longmapsto & Tr(a_{ij}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$$

entonces demuestre que

(a) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

(b) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$; $(\lambda \in \mathbb{R})$

(c) $Tr(AB) = Tr(BA)$

(3) Demuestre si es posible que

$$S \quad = \quad \{(A,B) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid AB - BA = I_2\} = \emptyset$$

(4) Demuestre si es posible que

$$A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \text{ tal que } A^2 = A \implies (I_3 - 2A) = (I_3 - 2A)^{-1}$$

(5) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ entonces muestre que

(a) $A^2 - 2A + 5I_2 = 0$

(b) $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I_2 - A))$

(6) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Ciertamente debe justificar sus respuestas:

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

(b) $\det \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & x^2 & x^3 \\ z & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = 0$

(c) $\det \begin{pmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

(7) Muestre usando exclusivamente propiedades provenientes de la definición de determinante que:

(a) $\det \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 0$

(b) $\det \begin{pmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+4 \end{pmatrix} = (a+4)(a^2-4)$

(c) $\det \begin{pmatrix} ax^2 & \frac{1}{a} & x \\ ay^2 & \frac{1}{a} & y \\ az^2 & \frac{1}{a} & z \end{pmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x), \quad a \neq 0$

(d) $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$

(e) $\det \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{pmatrix} = (c-a)^2(d-b)^2$

(f) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6-7x & 2x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5+x \\ 0 & 0 & 1 & -3+x & 2+3x \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1+x \end{pmatrix} = 1$

(8) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que para cada $(i = 1, 2, \ldots n)$ y $(j = 1, 2, \ldots n)$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & : \text{si } i \neq j \\ \\ \frac{i+j}{ij} & : \text{si } i = j \end{cases}$$

entonces calcule $\det(A)$

(9) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

(10) Demuestre usando Inducción matemática que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(11) Si $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ entonces calcule usando propiedades:

- $\det(Adj(A))$
- $\det(A^{-1})$
- $\det(A \cdot A^{-1})$

(12) Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{I} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)\}$$

(b) Para $u \in \mathbb{I}$, (si $\mathbb{I} \neq \emptyset$), determine A^{-1}

(13) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tales que $\det(A) = 5$ y $\det(B) = 3$ entonces determine

(a) $\det(AB)$

(b) $\det(A^3)$

(c) $\det(3B)$

(d) $det(AB)^t$

(e) $\det(A^{-1})$

(14) Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} = -1$ entonces calcule $\det \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix}$

(15) Demuestre usando propiedades que

$$\det\begin{pmatrix} x+y & y+z & z+x \\ a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix} z & x & y \\ c & a & b \\ r & p & q \end{pmatrix}$$

(16) Demuestre que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \tan\gamma \\ -\tan\gamma & \tan\beta & 1 \\ \tan\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

(17) Demuestre que

$$\det\begin{pmatrix} x+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & x+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & x+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & x+a^4 \end{pmatrix} = \frac{x^3(a(x+a^4)-(x+a))}{a-1}$$

(18) Si $A=\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$ entonces

- Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

- Grafique el conjunto $\mathbb{S}$

(19) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

(20) Si $A=\begin{pmatrix} (a-1) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (a-1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (a-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (a-1) \end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S}=\{a\in\mathbb{R}\mid A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

(21) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 1 \\ -1 & 1 & x-1 & -x-1 \\ 0 & 0 & x^2-4 & x+2 \\ 1 & -1 & x^2-x-3 & 2x+3 \end{pmatrix}\in\mathbb{M}_R(4)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S}=\{x\in\mathbb{R}\mid A\notin\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

(22) Si $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 & a+3 & a+4 \\ a-1 & a & a+1 & a+2 & a+3 \\ a-2 & a-1 & a & a+1 & a+2 \\ a-3 & a-2 & a-1 & a & a+1 \\ a-4 & a-3 & a-2 & a-1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{a \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5))\}$$

(23) Si $A = \begin{pmatrix} 1+x & x & x & x & x \\ x & 1+x & x & x & x \\ x & x & 1+x & x & x \\ x & x & x & 1+x & x \\ x & x & x & x & 1+x \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5))\}$$

(24) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces demuestre que

$$\left.\begin{array}{c} A \cdot X = X \cdot A \\ \wedge \\ B \cdot X = X \cdot B \end{array}\right\} \Longrightarrow (A \cdot B) \cdot X = X \cdot (A \cdot B)$$

(25) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces muestre que

$$A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I_n = (0) \quad \Longrightarrow \quad A^n = I_n$$

Donde I_n es la matriz identidad de orden n y (0) es la matriz nula o cero de orden n.

(26) Demuestre que

$$A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \text{ tal que } A^t = -A \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = (-1)^n \det(A)$$

(27) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. demuestre que

$$A = A^t \quad \Longrightarrow \quad Adj(A) = (Adj(A))^t$$

BUEN TRABAJO !!!