Contenidos

CAPITULO 2

Sistemas de Ecuaciones

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

Este capitulo estará destinado esencialmente a: Representar matricialmente un sistema de ecuaciones lineales, a modo de filtro, Interpretar el rango de la matriz de coeficientes, como el grado de libertad de su sistema asociado, Resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden (n x m), y Resolver sistemas de ecuaciones lineales sujetos a condiciones de entorno.

1. Motivación

Consideremos las rectas $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$, y $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + 1\}$ cuyos gráficos son los siguientes:

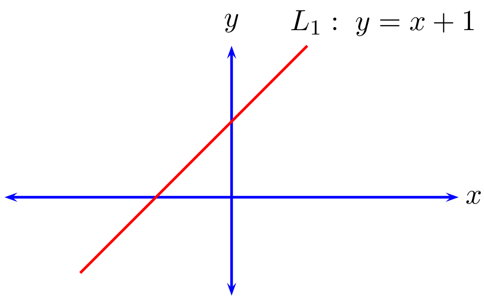


Figura 1: Gráfico de L_1

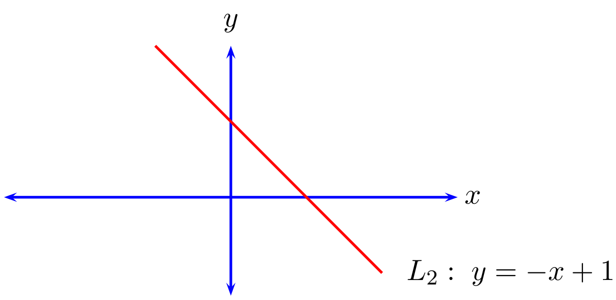


Figura 2: Gráfico de L_2

Juntando los gráficos de las rectas L_1 y L_2, obtenemos la nueva situación:

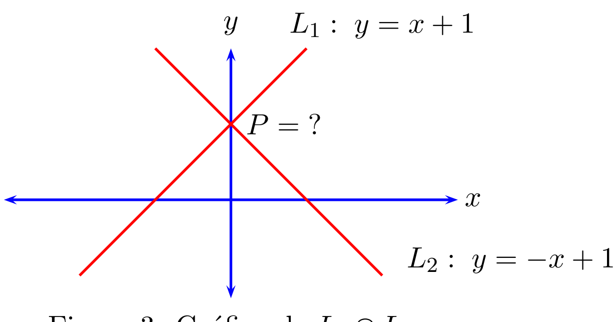


Figura 3: Gráfico de $L_1 \cap L_2$

Entonces la pregunta es:

¿Quién es el punto P, donde se "intersectan", ambas rectas.?

Para responder a esta pregunta podemos utilizar con seguridad varias estrategias, no obstante, antes de usar cualesquiera de ellas debemos aclarar y entender lo mejor posible el problema.

Es claro, que P es un punto común a ambas rectas, es decir, $P \in L_1 \cap L_2$ entonces

$$\begin{aligned} P \in L_1 \cap L_2 &\iff P \in L_1 \ \wedge \ P \in L_2 \\ &\iff P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge [y = x+1 \wedge y = -x+1] \quad (*) \\ &\iff P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \left.\begin{array}{rcr} x-y &=& -1 \\ x+y &=& 1 \end{array}\right| \quad (**) \end{aligned}$$

[1] A partir de $(*)$, Generamos una tabla para buscar coincidencias:

x	$x+1$
1	$1+1=2$
0	$0+1=1$

x	$-x+1$
1	$-1+1=0$
0	$-0+1=1$

Luego, $P = (0,1) \in L_1 \cap L_2$, es un de los deseados. Esta forma de aproximarse a la solución del problema tiene un inconveniente, ¿ cómo saber si hay más intersecciones ?

[2] A partir de $(**)$, podemos hacer lo siguiente,

$$\left.\begin{array}{lrcr} (1) & x-y &=& -1 \\ (2) & x+y &=& 1 \end{array}\right| \overset{(2)+(1)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcrcr} x &-& y &=& -1 \\ 2x &+& 0y &=& 0 \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x &-& y &=& -1 \\ x &+& 0 &=& 0 \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} 0 &-& y &=& -1 \\ x &+& 0 &=& 0 \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} 0 &+& y &=& 1 \\ x &+& 0 &=& 0 \end{array}\right|$$

Luego, $P = (0,1) \in L_1 \cap L_2$, es el punto buscado.

[3] A partir de $(**)$, podemos repensar el problema, a la luz de lo que hemos aprendido.

$$\left.\begin{array}{lrcr} (1) & x-y &=& -1 \\ (2) & x+y &=& 1 \end{array}\right| \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(l_2 \to l_2 - l_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(l_2 \to \tfrac{1}{2} l_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(l_1 \to l_1 + l_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $P = (0,1) \in L_1 \cap L_2$, es el punto buscado.

2. Formalización

Definición 2.1. *Llamaremos Sistema Lineal de n-ecuaciones y m-incógnitas o de orden* $(n \times m)$ *a una expresión del tipo:*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right| \qquad (1)$$

Equivalentemente llamaremos notación matricial de (1) *a la ecuación matricial:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \qquad (2)$$

En fin, de ahora en adelante nos referiremos a un sistema lineal genérico poniendo

$$A \cdot X = B$$

donde A, X *y* B *son como en* (2)*.*

En particular, si $B = (0)$ *entonces llamamos al sistema, "Sistema Lineal Homogéneo". Es decir, este es de la forma:*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}z_1 & + & a_{12}z_2 & + & \dots & + & a_{1m}z_m & = & 0 \\ a_{21}z_1 & + & a_{22}z_2 & + & \dots & + & a_{2m}z_m & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}z_1 & + & a_{n2}z_2 & + & \dots & + & a_{nm}z_m & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Ejemplo 2.1.1. *Un sistema lineal de orden 3×4:*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 4y & + & z & + & w & = & 18 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & - & 2w & = & 24 \\ 3x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 4 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sistema lineal homogéneo asociado.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 4y & + & z & + & w & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & - & 2w & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Solución de un sistema lineal de ecuaciones

Observación 3.1. *Si graficamos las rectas* $L_1 :\ x + 2y = 6$ *y* $L_2 :\ 3x - y = 4$ *entonces tenemos.*

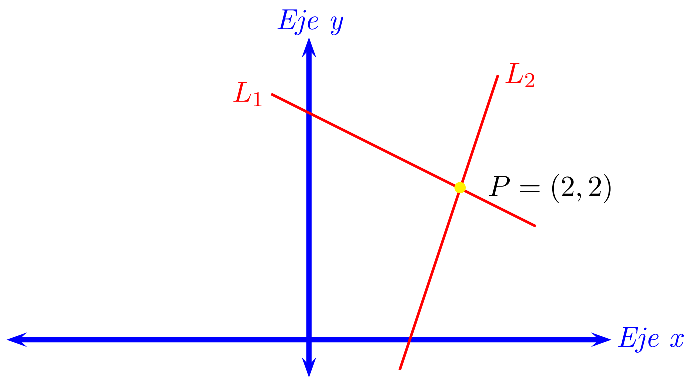


Figura 4: Intersección de rectas

[1] *De la figura encima se concluye directamente que el punto* $P = (2,2)$*, es la intersección de las dos rectas dadas, es decir;*

$$\left.\begin{array}{lll} (2,2) \in L_1 & (\ \textit{Pues} & 1\cdot 2 + 2\cdot 2 = 6) \\ (2,2) \in L_2 & (\ \textit{Pues} & 3\cdot 2 - 1\cdot 2 = 4) \end{array}\right\} \Longrightarrow (2,2) \in L_1 \cap L_2$$

[2] *Motivados por lo anterior podemos buscar una estrategia para determinar el punto de intersección o el punto que satisface ambas ecuaciones.*

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{lrcrcr} (ec_1) & x & + & 2y & = & 6 \\ (ec_2) & 3x & - & y & = & 4 \end{array} & \left[\begin{array}{rrcr} 1 & 2 & | & 6 \\ 3 & -1 & | & 4 \end{array}\right] \\
ec_2 \longrightarrow ec_2 - 3ec_1 & L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\
\begin{array}{lrcrcr} (ec_1) & x & + & 2y & = & 6 \\ (ec_2) & 0 & - & 7y & = & -14 \end{array} & \left[\begin{array}{rrcr} 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & -7 & | & -14 \end{array}\right] \\
ec_2 \longrightarrow -\frac{1}{7}ec_2 & L_2 \longrightarrow -\frac{1}{7}L_2 \\
\begin{array}{lrcrcr} (ec_1) & x & + & 2y & = & 6 \\ (ec_2) & 0 & + & y & = & 2 \end{array} & \left[\begin{array}{rrcr} 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{array}\right] \\
ec_1 \longrightarrow ec_1 - 2ec_2 & L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \\
\begin{array}{lrcrcr} (ec_1) & x & + & 0y & = & 2 \\ (ec_2) & 0 & + & y & = & 2 \end{array} & \left[\begin{array}{rrcr} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{array}\right] \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
\begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ y & = & 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{array} \qquad (4)$$

[3] *Ahora para fijar ideas debemos definir lo que entenderemos por una solución de un sistema lineal en general.*

Definición 3.2. *Diremos que Z es una solución del sistema (2) $A \cdot X = B$. Si*

(1) $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times 1)$, *y*

(2) $A \cdot Z = B$, *es decir*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}z_1 & + & a_{12}z_2 & + & \dots & + & a_{1m}z_m & = & b_1 \\ a_{21}z_1 & + & a_{22}z_2 & + & \dots & + & a_{2m}z_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}z_1 & + & a_{n2}z_2 & + & \dots & + & a_{nm}z_m & = & b_n \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.2.1. *Si consideramos el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 6 \\ 3x & - & y & = & 4 \end{array}\right|$$

entonces $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *es una solución de este.*

En efecto

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 \cdot 2 & + & 2 \cdot 2 & = & 6 \\ 3 \cdot 2 & - & 1 \cdot 2 & = & 4 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.3. *Si $A \cdot X = B$ es un sistema lineal entonces*

$$A \cdot Z = B \iff Z = U + H \text{ donde } A \cdot U = B \quad \wedge \quad A \cdot H = (0)$$

En efecto,

[1] *Si el sistema tiene solución única Z, es decir $A \cdot Z = B$ entonces $Z = Z + (0)$, donde $A \cdot (0) = (0)$, ya verifica las condiciones pedidas.*

Si el sistema tiene más de una solución, digamos que Z_1 y Z_2 son dos tales soluciones del sistema $A \cdot X = B$ entonces debe suceder por definición lo siguiente:

$$\begin{aligned} A \cdot Z_1 = B \wedge A \cdot Z_2 = B &\implies A \cdot Z_1 = A \cdot Z_2 \\ &\implies A \cdot Z_1 - A \cdot Z_2 = (0) \\ &\implies A \cdot (Z_1 - Z_2) = (0) \text{ (Distributividad del producto)} \end{aligned}$$

Luego, $Z_1 - Z_2 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ *es una solución del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = (0)$, es decir.*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}z_1 & + & \dots & + & a_{1m}z_m & = & 0 \\ a_{21}z_1 & + & \dots & + & a_{2m}z_m & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}z_1 & + & \dots & + & a_{nm}z_m & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y en este caso $Z_1 = Z_2 + (Z_1 - Z_2)$ *y* $Z_2 = Z_1 + (Z_2 - Z_1)$ *es una solución con las condiciones específicadas.*

[2] *Recíprocamente, si* U *es una solución del sistema lineal* $A \cdot X = B$ *y* H *es una solución del sistema homogéneo asociado entonces* $Z = U + H$ *es una solución del sistema lineal.*

En efecto

$$A \cdot (U + H) \;=\; A \cdot U + A \cdot H = B + (0) = B$$

Ejemplo 3.3.1. *Consideremos el sistema lineal de orden* (2×3).

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & 1 \\ 4x + 6y - 2z & = & 2 \end{array}\right| \qquad (*)$$

entonces $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *y* $Z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ *son soluciones del sistema* $(*)$, *y* $H = Z_1 - Z_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ *es una solución del sistema homogéneo asociado a* $(*)$.

En efecto

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 & = & 1 \\ 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 4 & = & 2 \end{array}\right| \Longrightarrow Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ es solución del sistema}$$

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 6 & = & 1 \\ 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 6 & = & 2 \end{array}\right| \Longrightarrow Z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ es solución del sistema}$$

Además,

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) & = & 0 \\ 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow H = Z_1 - Z_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ es solución del sistema homogéneo}$$

Observación 3.3.2. *Las operaciones elementales realizadas para resolver un sistema de ecuaciones permiten observar dos cuestiones claves:*

[1] *Para solucionar un sistema los cálculos se realizan en los coeficientes (matrices* A *y* B*) y no intervienen (gracias a la notación matricial) las variables.*
[2] *Las operaciones realizadas son funciones, más aún, son isomorfismos del grupo de matrices correspondiente.*

4. Resolución de sistemas y Operaciones Elementales: Un Algoritmo Base

Dado un sistema lineal de orden $n \times m$:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n
\end{array}\right| \tag{5}$$

Entonces de acuerdo a lo estudiado podemos, considerar las siguientes etapas para nuestro algoritmo:

4.1. Notación matricial de un sistema lineal. Ponemos (5) en notación matricial, es decir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}
\end{pmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \tag{6}$$

4.2. Matriz Ampliada asociada a un sistema lineal. Ya observamos que lo que interesa para resolver el sistema son los coeficientes de las variables e incluso podemos hacer abstracción de ellas, es decir definimos una nueva matriz que contenga toda la información numérica del sistema para ello hacemos la siguiente equivalencia:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
\equiv
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & | & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & | & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & | & b_n
\end{pmatrix}$$

A estas alturas conviene hacer una definición para bautizar a esta nueva matriz:

Definición 4.2.1. *Llamaremos Matriz Ampliada asociada al sistema* (6) *ó al sistema* (5) *a la matriz*

$$(A|B) \quad = \quad \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & | & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & | & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & | & b_n
\end{pmatrix} \tag{7}$$

Ejemplo 4.2.2. *Si Consideramos el sistema lineal de orden* 2×4*:*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
x & + & 2y & + & z & + & t & = & 1 \\
x & + & 3y & - & z & + & 2t & = & 1
\end{array}\right| \tag{8}$$

(1) *La notación matricial para* (8)*, es dada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) *La matriz ampliada asociada es:*

$$(A|B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

4.3. Rango de la matriz ampliada. Calculamos $\rho(A|B)$, el rango de la matriz ampliada entonces tenemos calculados en realidad dos rangos, a saber: El propio $\rho(A|B)$ y $\rho(A)$, para lo cual basta mirar la matriz escalonada reducida por filas asociada a $(A|B)$ eliminando la última columna.

Ejemplo 4.3.1. *En el caso del sistema* (8) *para calcular el* $\rho(A|B)$ *y* $\rho(A)$ *procedemos como sigue:*

$$(A|B) = \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & | & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 0 & 5 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \end{array}\right]$$

Luego, $\rho(A|B) = 2 = \rho(A)$

4.4. Teorema del rango. Un sistema lineal del tipo $AX = B$, como (6), tiene solución si y sólo si $\rho(A) = \rho(A|B)$, donde $(A|B)$ representa la matriz ampliada asociada al sistema. ver (8)

En efecto

Es inmediato que $\rho(A) \leq \rho(A|B) \leq m$, pues una fila no nula de A es una fila no nula de $(A|B)$, y m es el número de incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_m$. Esto sugiere entonces estudiar los casos:

Caso 1. $\rho(A) < \rho(A|B)$ entonces de acuerdo a nuestra equivalencia, (7), tenemos que debería suceder al menos una situación como la siguiente (después de escalonar por supuesto):

$$(A|B) \quad \cong \quad \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1m} & | & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2m} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a'_{(n-1)1} & a'_{(n-1)2} & \dots & a'_{(n-1)m} & | & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & b'_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

donde $b'_n \neq 0$, lo cual implicaría que $0 \cdot x_m = 0 = b_n$, lo cual es una contradicción. Así que en este caso concluimos que

$$\boxed{\text{Si } \rho(A) \neq \rho(A|B) \text{ entonces el sistema (5) no tiene solución.}}$$

Caso 2. $\rho(A) = \rho(A|B)$ entonces aplicando nuestra equivalencia (7), a la matriz escalonada reducida por filas obtenida de la matriz $(A|B)$, tenemos al menos una solución. Bajo estas condiciones nos queda analizar los últimos dos casos:

Caso 2.1 Si $\rho(A) = \rho(A|B) = m$ entonces la matriz escalonada reducida por filas $E_{A|B}$ es de la forma

$$E_{A|B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & | & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & | & r_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

Es decir, el sistema (5) tiene solución única de la forma.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

Caso 2.2 Si $\rho(A) = \rho(A|B) = s < m$ entonces la matriz escalonada reducida por filas $E_{A|B}$ es de la forma

$$E_{A|B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1^{(s+1)} & c_1^{(s+2)} & \cdots & c_1^{(m)} & | & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2^{(s+1)} & c_2^{(s+2)} & \cdots & c_2^{(m)} & | & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_s^{(s+1)} & c_s^{(s+2)} & \cdots & c_s^{(m)} & | & r_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, el sistema (5) tiene infinitas soluciones de la forma.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \\ x_{s+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-s} c_1^{s+i} x_{s+i} \\ r_2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-s} c_2^{s+i} x_{s+i} \\ \vdots \\ r_s - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-s} c_s^{s+i} x_{s+i} \\ x_{s+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\text{Solución general}} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Solución} \\ \text{particular}}} + \begin{pmatrix} r_1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-s} c_1^{s+i} x_{s+i} \\ r_2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-s} c_2^{s+i} x_{s+i} \\ \vdots \\ r_s - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-s} c_s^{s+i} x_{s+i} \\ x_{s+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

En este, caso decimos que el sistema (5) tiene un grado de libertad de orden $n - s$, y esta representado por los valores que pueden tomar $(x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-s}$

Ejemplo 4.4.1. *En el ejemplo* (8) *tenemos que* $\rho(A|B) = 2 = \rho(A) < 4$ *y podemos leer las infinitas soluciones de la matriz,*

$$(A|B) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1 - 5z + t \\ y & = & 2z - t \end{array}$$

Es decir, las infinitas soluciones son de la forma:

$$X \quad = \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5z + t \\ 2z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (z \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R})$$

5. Ejercicios Propuestos

[1] Resuelva los siguientes sistemas usando el Teorema del Rango:

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right|$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \end{array}\right|$$

(c) $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ 2x & - & 3y & = & 7 \\ 3x & + & 2y & = & 8 \end{array}$$

(d) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

(e) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

(f) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right|$$

[2] Considere el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & a \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & b \\ -5x_1 & - & 5x_2 & + & 21x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine los conjuntos

- $S = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución } \}$
- $S = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ no tiene solución } \}$

[3] Considere el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & a \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & b \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine los conjuntos

- $S = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución } \}$
- $S = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ no tiene solución } \}$

[4] Considere el sistema lineal $AX = B$, de orden 3

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Demuestre que $(\star)$ tiene solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$ y que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

[5] Considere el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 5y & + & 12z & - & w & = & -3 \\ 2x & + & 2y & + & 8z & - & 2w & = & -12 \\ & & 6y & + & 6z & + & 3w & = & 15 \\ & & & & 2z & + & k(k+1)w & = & 9k \end{array}\right| \quad (\star)$$

Determine los siguientes conjuntos:

- $S_1 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \ \textit{tiene} \text{ solución}\}$
- $S_2 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \ \textit{no tiene} \text{ solución}\}$
- $S_3 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \ \textit{tiene} \text{ solución única}\}$

[6] Fueron estudiados tres tipos de alimentos. Fijada la misma cantidad (1gr), se determino que:

[a] El alimento I tiene 1 unidad de vitamina A, 3 unidades de vitamina B y 4 unidades de vitamina C.

[b] El alimento II tiene 2 unidad de vitamina A, 3 unidades de vitamina B y 5 unidades de vitamina C.

[c] El alimento III tiene 3 unidad de vitamina A, no tiene vitamina B y tiene 3 unidades de vitamina C.

Si se necesitan 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B y 20 de vitamina C.

[a] Determine las posibles cantidades de alimentos I, II y III que contienen la cantidad de vitaminas deseadas.

[b] Si el alimento I cuesta 600 pesos por gramo y los otros dos cuestan 100 por gramo,¿ existe una solución del sistema cuyo costo sea 10000 pesos ?

6. Algunos sistemas lineales particulares y sus soluciones

6.1. El método de Cramer. Un método muy conocido para resolver sistemas lineales es el **Método de Cramer**, el cual se basa en los siguientes hechos: El sistema debe ser cuadrado, es decir $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$, o sea A debe ser invertible.

En estas condiciones tenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Pero,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{adjunta de } A}$$

Luego, sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \\ x_t &= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{tj} b_j \qquad (t = 1, 2, \dots, n) \Longleftrightarrow \\ x_t &= \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \underbrace{b_n}_{\text{columna t}} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.1.1. *Consideremos el sistema lineal pequeño, sólo para ejemplificar*

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y &=& 1 \\ x - y &=& 3 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces verificamos las hipótesis del método de Cramer:

[1] $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$. *Así que el método es aplicable y la solución es la siguiente:*

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (-4) = 2 \\ y &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1 \end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

6.1.2. Ejercicios Propuestos del Método de Cramer.

[1] Resuelva usando el método de Cramer los siguientes sistemas:

(a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & -1 \\ -7x_1 & + & 4x_2 & = & 47 \end{array}\right|$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ 8x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 11 \end{array}\right|$$

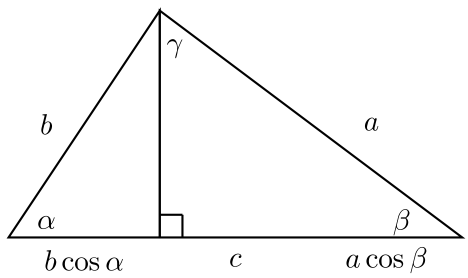
(c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right|$$

(d) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}\right|$$

(e) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 7 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ 4x_1 & - & x_2 & & & & & = & -3 \\ & & & & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 2 \end{array}\right|$$

(f) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & 5 \end{array}\right|$$

[2] Considere el triángulo de la figura



[a] Demuestre usando trigonometría que

$$\left.\begin{array}{rcl} c\cos\alpha + a\cos\gamma & = & b \\ b\cos\alpha + a\cos\beta & = & c \\ c\cos\beta + b\cos\gamma & = & a \end{array}\right| \qquad (10)$$

[b] Interprete (10), como un sistema de ecuaciones en las variables, $\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$, y demuestre que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

[c] Utilice la regla de Cramer para despejar $\cos\gamma$

[d] Demuestre la Ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

6.2. Factorización LU. Considera un sistema clásico de la forma $A \cdot X = B$ tal que $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ es una matriz triangular superior invertible, es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (\text{Con } a_{ii} \neq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n) \qquad (11)$$

El tipo de matriz, nos permite resolver el sistema, (11) iteradamente, como sigue:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\
x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}} \\
&\vdots \\
x_s &= \frac{b_s - \displaystyle\sum_{i=s+1}^{n} a_{si}x_i}{a_{ss}}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
x_s = \frac{b_s - \displaystyle\sum_{i=s+1}^{n} a_{si}x_i}{a_{ss}} \quad (s = 1, 2, \dots, n-1) \tag{12}
$$

Un comportamiento análogo, obtenemos si, $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ es una matriz triangular inferior invertible, pues en este caso:

$$
\begin{pmatrix}
c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\
c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
\quad (\text{Donde } c_{ii} \neq 0 \ (1 \leq i \leq n) \tag{13}
$$

Y,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{c_{11}} \\
x_2 &= \frac{b_2 - c_{21}x_1}{c_{22}} \\
&\vdots \\
x_s &= \frac{b_s - \displaystyle\sum_{i=1}^{s-1} c_{si}x_i}{a_{ss}}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
x_s = \frac{b_s - \displaystyle\sum_{i=1}^{s-1} c_{si}x_i}{a_{ss}} \quad (s = 2, 3, \dots, n) \tag{14}
$$

Ejemplo 6.2.1. *Resolver el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & & & & & = & 10 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & & & = & 28 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 26 \end{array}\right|$$

Solución

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{5} = 2 \\ x_2 &= \frac{28-4x_1}{-2} = -10 \\ x_3 &= \frac{26-2x_1-3x_2}{4} = 13 \end{aligned}$$

Observación 6.2.2. *Considera un sistema clásico de la forma* $A \cdot X = B$ *tal que*

[1] $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$

[2] $A = L \cdot U$, *donde* L *es una matriz triangular inferior y* U *es una matriz triangular superior.*

entonces

$$A \cdot X = B \iff (L \cdot U) \cdot X = B \Longrightarrow L \cdot \underbrace{(U \cdot X)}_{Z} = B \Longrightarrow L \cdot Z = B \tag{15}$$

Así que: Usando la fórmula (14) *calculamos* Z *y usando la fórmula* (12) *calculamos* X

Ejemplo 6.2.3. *Consideremos el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ -12x_1 & + & 8x_2 & + & 21x_3 & - & 8x_4 & = & 8 \\ -6x_1 & & & - & x_3 & + & 7x_4 & = & -43y \end{array}\right| \tag{16}$$

entonces para la matriz A *de coeficientes del sistema* (16),

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

usemos la descomposición LU (verifiquelo!!);

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

entonces (16)*, se escribe como:*

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Y lo resolvemos según las etapas descritas en (15)*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Es decir:

[1] *Realizamos el producto*

$$\left[\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

[2] *Determinamos el producto anterior vía* (14)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} z_1 & = & 2 \\ z_2 & = & -4 - \frac{1}{2}z_1 = -5 \\ z_3 & = & 8 + 2z_1 + 2z_2 = 2 \\ z_4 & = & -43 + z_1 - z_2 + 2z_3 = -32 \end{array}$$

[3] *Resolvemos el sistema vía* (12)

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ -32 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_4 & = & \dfrac{-32}{8} = -4 \\ x_3 & = & \dfrac{2 + 2x_4}{5} = -1.2 \\ x_2 & = & \dfrac{-5 + 4x_3 + x_4}{-2} = 6.9 \\ x_1 & = & \dfrac{2 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4}{6} = 4.5 \end{array}$$

6.3. Ejercicios Propuestos. Resuelva los sistemas lineales $AX = B$ y $A = LU$ si:

[1] $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[2] $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -36 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[3] $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -16 \\ -66 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. Situaciones de Desempeño: Sistemas de Ecuaciones Lineales

7.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

7.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

7.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

[1] Si consideramos $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 3)$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1) \mid A \cdot X = (0)\}$$

[2] Verifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

[2.1] Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que:

[i] S_1 es el conjunto solución del sistema homogéneo $AX = 0$

[ii] S_2 es el conjunto solución del sistema homogéneo $BX = 0$

entonces $S_1 \cap S_2$ es el conjunto solución del sistema $(A - B)X = 0$

[2.2] Si S es el conjunto solución del sistema

$$\begin{array}{ccccccc|} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \\ \hline \end{array} \qquad (*)$$

entonces $a = -2 \Longrightarrow S = \emptyset$

[3] Dado el sistema lineal; $AX = B$ tal que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(10)$, y $a_{ij} = i$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{10} \end{pmatrix}$

Determine el conjunto, $S = \{(b_2, b_3, \dots, b_{10}) \in \mathbb{R}^9 \mid AX = B \text{ tiene solución}\}$

[4] Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x + y + az & = & 1 \\ by + cz & = & c \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

[a] $\mathbb{S}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$

[b] $\mathbb{S}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$

[c] $\mathbb{S}_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ no tiene solución}\}$

[5] Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 2a - 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a^2 \\ x & + & y & + & az & = & 3 - 2a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos:

$S_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$

$S_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$

$S_3 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ no tiene solución}\}$

[6] El Departamento de pesca y caza proporciona tres tipos de comidas a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del alimento 3. Cada semana se suministran al lago 25000 unidades del alimento 1, 20000 unidades del alimento 2 y 55000 unidades del alimento 3. Si se supone que los peces se comen todo el alimento. ¿Cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

8. Solución de Situaciones de Desempeño: Sistemas de Ecuaciones Lineales

[1] Si consideramos $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 3)$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;\; = \;\; \{X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1) \mid A \cdot X = (0)\}$$

Solución

Etapa 1. Observamos en primer lugar que:

$$\begin{aligned} X \in \mathbb{S} \;\; &\Longleftrightarrow \;\; X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \; \wedge \; A \cdot X = (0) \\ &\Longleftrightarrow \;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \; \wedge \; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*) \end{aligned}$$

Es decir, $X \in \mathbb{S}$ si y sólo si X es solución del sistema homogéneo $(*)$

En segundo lugar, un sistema homogéneo siempre tiene solución !!!. Pues, como

$(A|(0)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 4 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 8 & 0 & 7 & | & 0 \end{pmatrix}$, sigue que $\rho(A) = \rho(A|(0))$, y entonces $\mathbb{S} \neq \emptyset$

Etapa 2. Escalonamos $(A|(0))$

$$\begin{aligned} (A|(0)) \;\; &= \;\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 4 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 8 & 0 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 - L_1) \\ (L_4 \longrightarrow L_4 - 4L_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & -5 & | & 0 \\ 0 & 4 & -5 & | & 0 \\ 0 & 4 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \\ &\begin{matrix} (L_3 \longrightarrow L_3 - L_2) \\ (L_4 \longrightarrow L_4 - L_2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1 \longrightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ (L_2 \longrightarrow \frac{1}{4}L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ &(L_1 \longrightarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{8} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que $\rho(A) = 2$ y existen infinitas soluciones, y estas son de la siguiente forma:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{8} \cdot x_3 \\ \\ \dfrac{5}{4} \cdot x_3 \\ \\ 1 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{8} \cdot x_3 \\ \\ \dfrac{5}{4} \cdot x_3 \\ \\ 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

[2] Verifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

[2.1] Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que:

[i] S_1 es el conjunto solución del sistema homogéneo $AX = 0$

[ii] S_2 es el conjunto solución del sistema homogéneo $BX = 0$

entonces $S_1 \cap S_2$ es el conjunto solución del sistema $(A - B)X = 0$

Solución. La afirmación es falsa.

En efecto

Etapa 1. $S_1 \cap S_2$ es el conjunto solución del sistema $(A - B)X = 0$ si y sólo si

$$S_1 \cap S_2 = \{Z \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \mid (A - B)Z = 0\}$$

Etapa 2. Análisis de los datos.

$$\begin{aligned} Z \in S_1 \cap S_2 &\iff Z \in S_1 \wedge Z \in S_2 \\ &\iff Z \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \wedge AZ = 0 \wedge BZ = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Caso 1. De $(*)$, sigue que:

$$\begin{aligned} Z \in S_1 \cap S_2 &\iff Z \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \wedge AZ = 0 \wedge BZ = 0 \\ &\iff Z \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \wedge AZ - BZ = 0 \\ &\implies Z \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \wedge (A - B)Z = 0 \\ &\Downarrow \\ S_1 \cap S_2 &\subset \{Z \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1) \mid (A - B)Z = 0\} \end{aligned}$$

Caso 2. Si $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ (A y B invertibles) entonces por el teorema del rango $\rho(A) = \rho(B) = n$. Así que

$$S_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\} = S_2 \Longrightarrow S_1\cap S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

Pero la matriz $A-B$ no necesariamente es invertible. Luego el sistema $(A-B)X=0$ no tiene como solución única la solución trivial.

Para un ejemplo particular del caso expuesto encima basta tomar, para $n=2$:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 0 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

.

Pues,

$$\begin{aligned}
AX=(0) &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
BX=(0) &\iff \begin{pmatrix} 0 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,

$$S_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\right\} = S_2 \Longrightarrow S_1\cap S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

Pero para $A-B$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(A-B)X=(0) &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (\text{ Ojo } A-B \text{ no es invertible})\\
&\iff X=\begin{pmatrix} x\\ -x\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subsetneq \{Z \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid (A-B)Z = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

[2.2] Si S es el conjunto solución del sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \end{array}\right| \quad (*)$$

entonces $a = -2 \Longrightarrow S = \emptyset$

Solución. La afirmación es verdadera.

En efecto

Alternativa 1. Si $a = -2$ entonces directamente de $(*)$ sigue que,

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & ((-2)^2-5)z & = & -2 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & -z & = & -2 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{rcl} & \Downarrow & \\ x+y-z=2 & \wedge & x+y-z=-2 \\ & \Downarrow & \\ 2 & = & -2 \text{ Contradicción} \\ & \Downarrow & \\ S & = & \emptyset \end{array}$$

Alternativa 2. Aplicamos el teorema del rango, para determinar S.

(i) Escalonando la matriz ampliada del sistema $(A|B)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & (\alpha^2-5) & \alpha \end{array}\right) & \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right) \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (\alpha-2)(\alpha+2) & \alpha-2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

(ii) Si hacemos $a = -2$ obtenemos que:

$$(A|B) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Así que $\rho(A) = 2 < \rho(A|B) = 3$, y el sistema no tiene solución.

[3] Dado el sistema lineal; $AX = B$ tal que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(10)$, $a_{ij} = i$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{10} \end{pmatrix}$

Determine el conjunto, $S = \{(b_2, b_3, \dots, b_{10}) \in \mathbb{R}^9 \mid AX = B \text{ tiene solución}\}$

Solución

Etapa 1. Procedemos a calcular el rango de la matriz ampliada asociada al sistema.

$$
\begin{aligned}
(A|B) \quad &= \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & | & b_2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 10 & 10 & 10 & \dots & 10 & | & b_{10} \end{array}\right) \begin{array}{c} (l_2 \to l_2 - 2l_1) \\ (l_3 \to l_3 - 3l_1) \\ \vdots \\ (l_{10} \to l_{10} - 10l_1) \end{array} \\
&= \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_2 - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_3 - 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_{10} - 10 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Etapa 2. Procedemos al análisis de la situación para responder a los requerimientos:

Como $\rho(A) = 1$ entonces $AX = B$ tiene solución si y sólo si $\rho(A|B) = 1$

Pero, $\rho(A|B) = 1 \Longleftrightarrow (b_2, b_3, \dots, b_{10}) = (2, 3, \dots, 10)$. Así que

$$S = \{(2, 3, \dots, 10)\}$$

[4] Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$
\left.\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 1 \\ x + y + az &=& 1 \\ by + cz &=& c \end{array}\right| \qquad (*)
$$

Determine los siguientes conjuntos

[a] $\mathbb{S}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$

[b] $\mathbb{S}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$

[c] $\mathbb{S}_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ no tiene solución}\}$

Solución

Etapa 1. Construimos la matriz ampliada $(A|B)$ del sistema:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & b & c & c \end{array}\right)$$

Etapa 2. Realizando operaciones elementales obtenemos la matriz E:

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & c \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Etapa 3. Análisis de la matriz E

Si $a = 1$:

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{ccc} x+y+z & = & 1 \\ by & = & c(1-z) \end{array}$$

Luego $a = 1 \Longrightarrow (1, b, c) \in \mathbb{S}_1$

Si $a \neq 1$:

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{ccc} x+y & = & 1 \\ by & = & c \\ z & = & 0 \end{array}$$

Luego,

$a \neq 1 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0 \Longrightarrow (a, 0, c) \in \mathbb{S}_3$

$a \neq 1 \wedge b = 0 \wedge c = 0 \Longrightarrow (a, 0, 0) \in \mathbb{S}_1$

$a \neq 1 \wedge b \neq 0 \Longrightarrow (a, b, c) \in \mathbb{S}_2$

[5] Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 2a-1 \\ x & + & ay & + & z & = & a^2 \\ x & + & y & + & az & = & 3-2a \end{array} \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos:

$S_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$

$S_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$

$S_3 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ no tiene solución}\}$

Solución

Aplicamos el teorema del rango en el sistema (*).

Etapa 1. Escalonamos la matriz ampliada asociada al sistema (*)

$$
\begin{aligned}
(A|B) &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & | & 2a-1 \\ 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 1 & 1 & a & | & 3-2a \end{pmatrix} \quad (l_1 \leftrightarrow l_2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ a & 1 & 1 & | & 2a-1 \\ 1 & 1 & a & | & 3-2a \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (l_2 \rightarrow l_2 - al_1) \\ (l_3 \rightarrow l_3 - l_1) \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \end{pmatrix} \quad (l_2 \leftrightarrow l_3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{pmatrix} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Caso 1. Si $a = 1$ entonces sustituyendo en (**), tenemos que

$$
(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}
$$

Así que $\rho(A|B) = \rho(A) = 1 < 3$. Por tanto (*) tiene infinitas soluciones.

Caso 2. Si $a \neq 1$ entonces podemos seguir operando en (**), y tenemos

$$
\begin{aligned}
(A|B) &= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{pmatrix} \quad (l_2 \leftrightarrow \frac{1}{1-a}\, l_2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & a+3 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (l_1 \rightarrow l_1 - al_2) \\ (l_3 \rightarrow l_3 - (1-a^2)l_2) \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a & | & -3a \\ 0 & 1 & -1 & | & a+3 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & | & 3a^2+a-4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Caso 2.1 Si $a \neq 1$ y $a = -2$ entonces $\rho(A) = 2$ y $\rho(A|B) = 3$, pues $3(-2)^2 - 2 - 4 = 6$. Así que (*) no tiene solución

Caso 2.2 Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, y (*) tiene solución única.

Conclusión

$S_1 = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$
$S_2 = \{1\}$
$S_3 = \{-2\}$

[6] El Departamento de pesca y caza proporciona tres tipos de comidas a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del alimento 3. Cada semana se suministran al lago 25000 unidades del alimento 1, 20000 unidades del alimento 2 y 55000 unidades del alimento 3. Si se supone que los peces se comen todo el alimento. ¿Cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

[a] Planteamiento del problema. Si denotamos por

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{cantidad de peces de la especie 1} \\ x_2 &= \text{cantidad de peces de la especie 2} \\ x_3 &= \text{cantidad de peces de la especie 3} \end{aligned}$$

entonces de acuerdo a los datos, el sistema asociado es le siguiente:

$$\begin{array}{rcrcrcr|} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 25000 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 20000 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 55000 \\ \hline \end{array} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25000 \\ 20000 \\ 55000 \end{pmatrix}$$

[b] Calculamos el rango a la matriz ampliada asociada al sistema. $\rho(A|B)$, es decir debemos reducir por filas la matriz $(A|B)$:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25000 \\ 1 & 4 & 1 & | & 20000 \\ 2 & 5 & 5 & | & 55000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (L_2 \longrightarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5000 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_2) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 + L_2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 40000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5000 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

[c] Ahora comparamos los rangos para verificar las **hipótesis del teorema del rango**.

(i) $\rho(A|B) = \rho(A) = 2$. Así que existe solución para el problema de administración de recursos.

(ii) Como $\rho(A|B) = \rho(A) = 2 < 3$ entonces existen infinitas soluciones

[d] Ahora determinamos las soluciones aplicando nuestra equivalencia (7) es decir traducimos al sistema:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & = & 40000 & - & 5x_3 & \quad (1) \\ x_2 & = & -5000 & + & x_3 & \quad (2) \end{array}$$

Probablemente un problema teórico terminaría aquí, pero este es un problema práctico y real así hay que estudiar las posibilidades o restricciones:

[i] En primer lugar, debemos tener que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$, pues se trata de cantidades de peces.

[ii] De la ecuación (2): $x_3 = x_2 + 5000$ y de $x_2 \geq 0$ sigue que $x_3 \geq 5000$

[iii] De la ecuación (1): $40000 - 5x_3 = x_1$ y $x_1 \geq 0$ sigue que $8000 \geq x_3$

[e] Luego para concluir las soluciones teóricas posibles son del tipo:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40000 - 5x_3 \\ x_3 - 5000 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40000 \\ -5000 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (x_3 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Aplicando las restricciones obtenidas tenemos que:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40000 \\ -5000 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (5000 \leq x_3 \leq 8000)$$

No obstante esta sea una buena descripción de las posibilidades, lamentablemente ninguna especie de peces tiene como miembro una mitad de pez, así que la soluciones son a lo más 3001, pues como dicho, x_3 tiene que ser entero y $x_1 \leq 15000$, por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40000 \\ -5000 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}; (5000 \leq x_3 \leq 8000 \quad \wedge \quad x_3 \in \mathbb{Z})$$

Bibliografía

[1] Bello, I. "álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético