Contenidos

CAPITULO 8

Funciones Trigonométricas

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

1. Relaciones Trigonométricas Básicas

1.1. Introducción. Consideremos la siguiente situación geométrica:

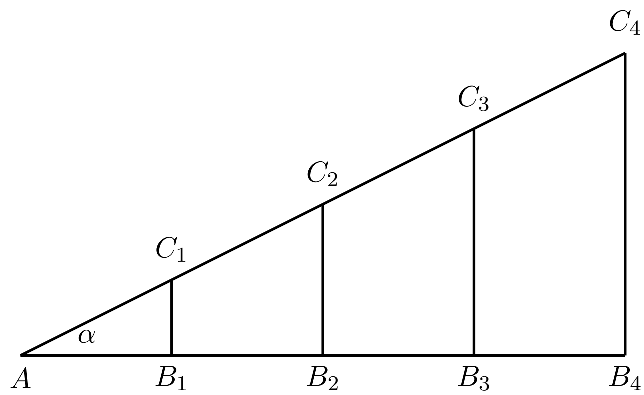


Figura 1

En la figura todos los triángulos son rectángulos y valen las relaciones:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{AB_4}}{\overline{AC_4}} = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AB_4}} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Definición 1.2. *(Definición Básica de las funciones trigonométricas) Denominaremos:*

Seno del ángulo α al cuociente	$\operatorname{sen}\,\alpha$	$=$	$\dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$
Coseno del ángulo α al cuociente	$\cos\,\alpha$	$=$	$\dfrac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$
Tangente del ángulo α al cuociente	$\tan\,\alpha$	$=$	$\dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$
Cotangente del ángulo α al cuociente	*cot* α	$=$	$\dfrac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}}$
Secante del ángulo α al cuociente	$\sec\,\alpha$	$=$	$\dfrac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}}$
Cosecante del ángulo α al cuociente	*csc* α	$=$	$\dfrac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}}$

2. Funciones Trigonométricas

2.1. Medición de ángulos: Usaremos para nuestras definiciones un círculo de radio 1 y con centro en el origen, es decir tenemos el conjunto:

$$S^1 \quad : \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \tag{1}$$

Su diseño es:

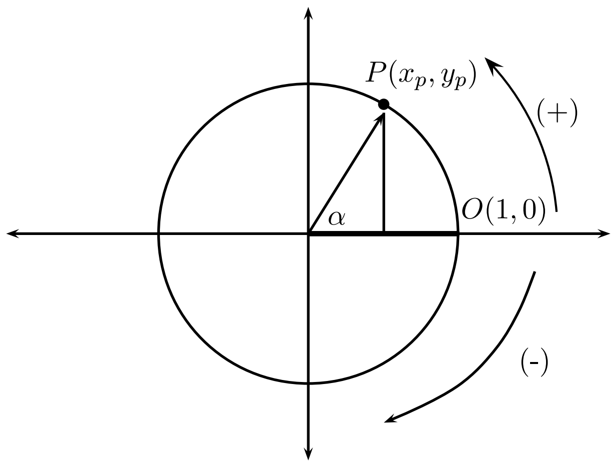


Figura 2

Algunas observaciones:

(1) Fijaremos el origen o punto de partida (es imprescindible hacerlo) del círculo S^1 en el punto $(0,1)$, para poder contar las vueltas. De acuerdo a esto tenemos que una vuelta corresponde a 360 grados, es decir:

$$\text{Una vuelta} \quad = \quad 360 \cdot 1^\circ \tag{2}$$

(2) Consideraremos un ángulo positivo si se toma en como en la figura (contrario a los minuteros del reloj !!!), y negativo en el otro sentido.

(3) Existe otra alternativa para medir ángulos; esta tiene que ver con el perímetro del circulo:

   (a) El ángulo α mide un radián si la longitud del arco que subtiende $\overline{PO}$ es un radio

   (b) Una vuelta corresponde a 2π radianes, es decir:

$$\text{Una vuelta} \quad = \quad 2\pi \cdot 1rad \tag{3}$$

(4) Comparando (2) y (3) tenemos que:

$$360 \cdot 1^\circ = 2\pi \cdot 1rad \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1^\circ = \dfrac{2\pi}{360} \cdot 1rad \\ Y \\ 1rad = \dfrac{360}{2\pi} \cdot 1^\circ \end{cases} \tag{4}$$

(5) Luego, tenemos por ejemplo que:

- $1rad \approx 57.29^\circ$
- $180^\circ = \pi rad$
- $90^\circ = \dfrac{\pi}{2} rad$
- $60^\circ = \dfrac{\pi}{3} rad$
- $45^\circ = \dfrac{\pi}{4} rad$
- $30^\circ = \dfrac{\pi}{6} rad$
- $15^\circ = 15 \cdot 1^\circ = 15 \cdot \dfrac{2\pi}{360} \cdot 1rad = \dfrac{\pi}{12} rad$

2.2. Definición de las Funciones Trigonométricas. De acuerdo a la definición (1.2) tenemos que en el círculo S^1 podemos hacer las definiciones de las funciones trigonométricas como sigue:

(1) Función Seno:

$$\begin{array}{ccccc} sen & : & \mathbb{R} & \longmapsto & [-1,1] \\ & & x & \longmapsto & sen(x) = y_p \end{array} \tag{5}$$

(2) Función Coseno:

$$\begin{array}{ccccc} \cos & : & \mathbb{R} & \longmapsto & [-1,1] \\ & & x & \longmapsto & \cos(x) = x_p \end{array} \tag{6}$$

Tal que $x_p^2 + y_p^2 = 1$

(3) Función Tangente:

$$\tan(x) \quad = \quad \frac{sen x}{\cos x} \quad \text{definida para los } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \cos x \neq 0 \tag{7}$$

2.3. Algunos valores de las funciones Seno, Coseno y Tangente.

(1) Ángulos $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3}{2}\pi, 2\pi$:

Función / Ángulo	*seno*	*coseno*	*tangente*
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	*no definida*
π	0	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	*no definida*
2π	0	1	0

(2) Ángulos $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$:

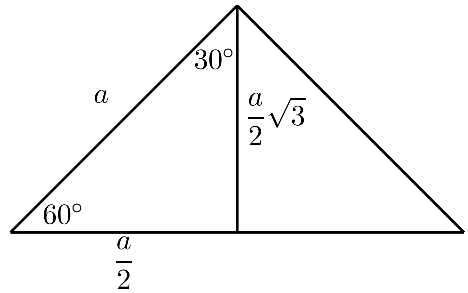


Figura 3

Entonces

$\frac{\text{Función}}{\text{Ángulo}}$	*seno*	*coseno*	*tangente*
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) Ángulos $\frac{\pi}{4}$:

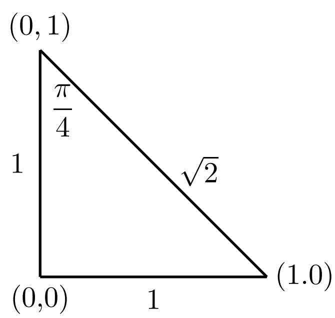


Figura 4

Entonces

$\frac{\text{Función}}{\text{Ángulo}}$	*seno*	*coseno*	*tangente*
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

2.4. Propiedades inmediatas de las funciones trigonométricas. Si consideramos nuevamente el círculo S^1

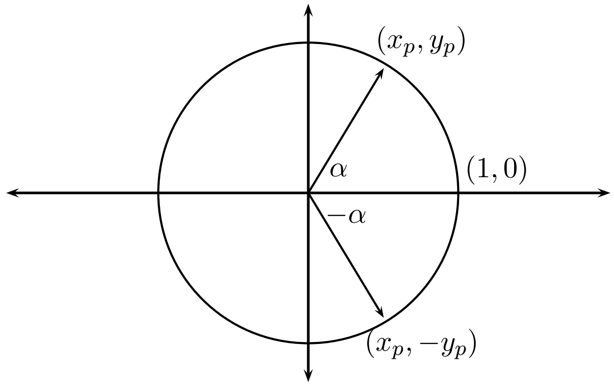


Figura 5

Entonces

(1) Periodicidad: Como a α le corresponde el punto(x_p, y_p) y a $(\alpha+2\pi)$ el punto(x_p, y_p) entonces tenemos que, $sen(\alpha) = sen(\alpha + 2\pi) y \cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$

Por otra parte, las funciones definidas sólo dependen del punto (x_p, y_p) en S^1 que posee perímetro 2π. Así que una vuelta es la menor longitud necesaria para que un ángulo y por tanto una función trigonométrica se repita, a este menor número lo llamamos el periodo de la función trigonométrica.

Conclusión 2.4.1. *Las funciones Seno y Coseno son periódicas de periodo 2π, y la función y Tangente es periódica de periodo π es decir:*

$$
\begin{array}{rcl}
sen(\alpha) & = & sen(\alpha + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\cos(\alpha) & = & \cos(\alpha + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\tan(\alpha) & = & \tan(\alpha + k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{array}
$$

(2) Paridad: Observemos que por construcción tenemos que

$$
\begin{array}{rclcr}
sen(\alpha) & = & y_p \wedge sen(-\alpha) = -y_p & \Longrightarrow & sen(-\alpha) = -sen(\alpha) \\
\cos(\alpha) & = & x_p \wedge \cos(-\alpha) = x_p & \Longrightarrow & \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\
\tan(\alpha) & = & \frac{y_p}{x_p} \wedge \tan(-\alpha) = -\frac{y_p}{x_p} & \Longrightarrow & \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)
\end{array}
$$

Conclusión 2.4.2. *Seno es una función impar, Coseno es una función par y Tangente es una función impar*

2.5. Gráficos de las funciones trigonométricas.

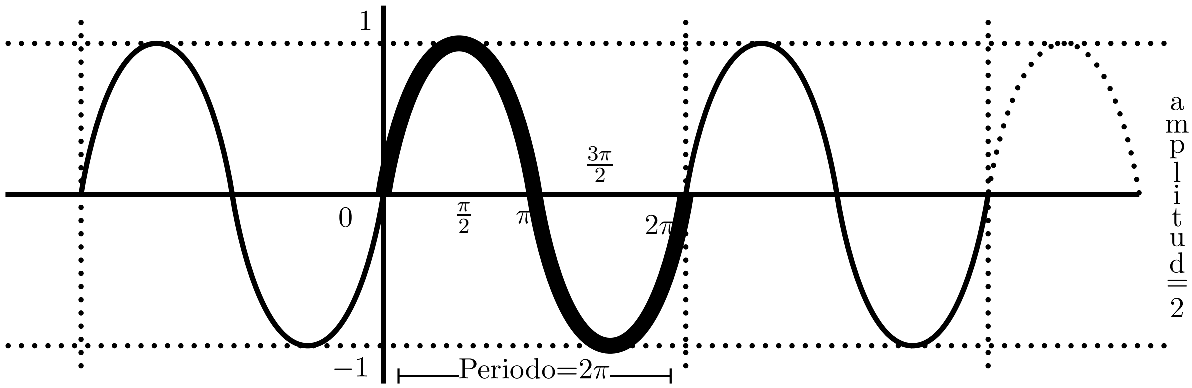


Figura 6: $y = \operatorname{sen} x$

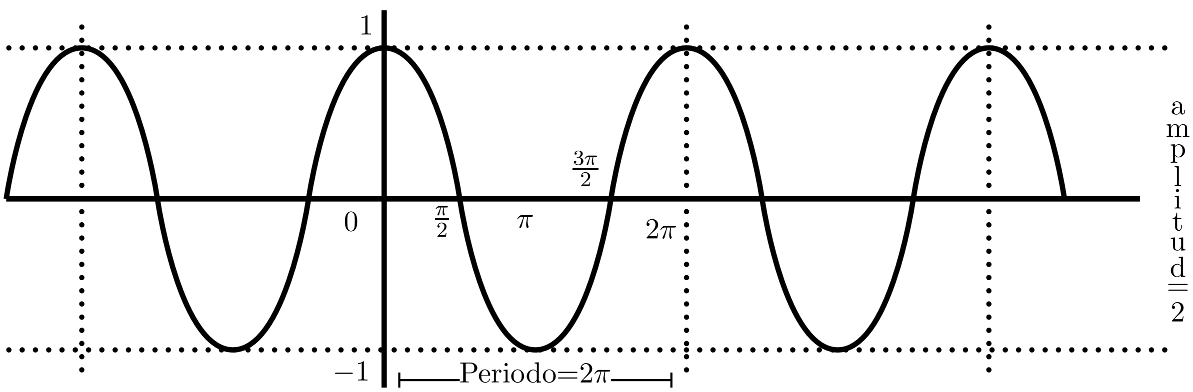


Figura 7 $y = \cos x$

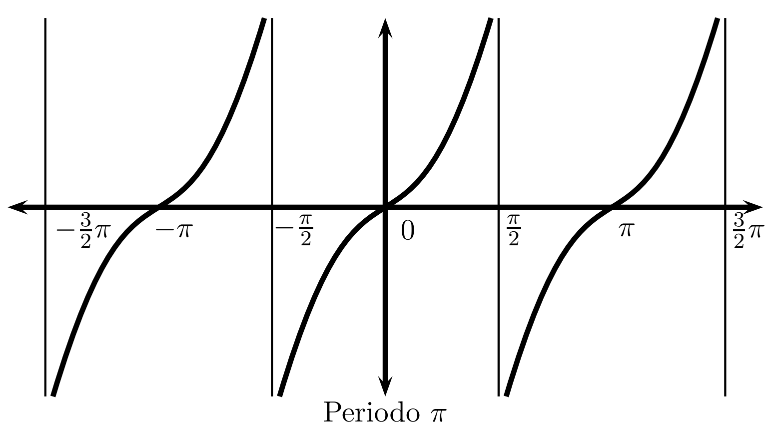


Figura 8 $y = \tan x$

2.6. Otras funciones trigonométricas.

(1) Función Cotangente:

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \quad \text{definida para los } x \in [R - \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}]$$

(2) Función Secante:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{definida para los } x \in [R - \{(2n-1)\frac{\pi}{2} | n \in \mathbb{Z}\}]$$

(3) Función Cosecante:

$$\csc(x) = \frac{1}{sen(x)} \quad \text{definida para los } x \in [R - \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}]$$

2.7. Identidades Básicas.

Lema 2.7.1. $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (\forall \alpha; \alpha \in \mathbb{R})$

En efecto

Por construcción tenemos que $x_p^2 + y_p^2 = 1$, luego tenemos la identidad básica:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Observación 2.7.2. *Consideremos en el círculo unitario S^1 la situación siempre posible!!!.*

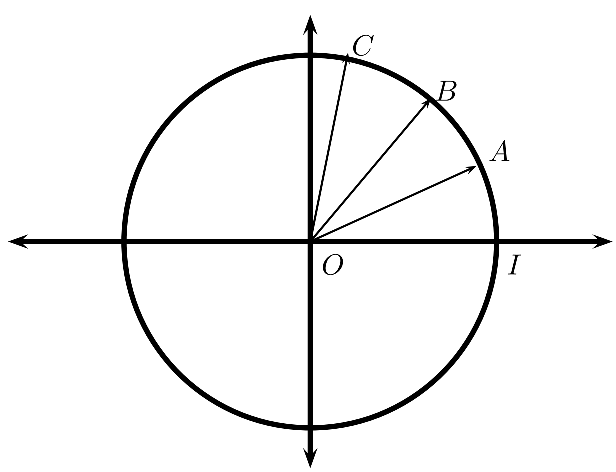


Figura 9

Tal que:

- *La medida del ángulo IOB es igual que la medida del ángulo AOC*

- *Si $\angle IOC = \alpha$ y $\angle IOA = \beta$ entonces $\angle IOB = \alpha - \beta$ y tenemos que:*

$$\begin{array}{rcl}
d(I,B) & = & d(A,C) \\
& \Updownarrow & \\
\sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (sen(\alpha-\beta)-0)^2} & = & \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (sen\alpha - sen\beta)^2} \\
& \Downarrow & \\
(\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (sen(\alpha-\beta)-0)^2 & = & (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (sen\alpha - sen\beta)^2 \\
& \Updownarrow & \\
2 - 2\cos(\alpha-\beta) & = & 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta) \\
& \Updownarrow & \\
\cos(\alpha-\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta
\end{array}$$

Hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 2.7.3. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$

Corolario 2.7.4. (1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$

En efecto

$$\begin{array}{rcll}
\cos(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha-(-\beta)) & \\
& = & \cos\alpha\cos(-\beta) + sen\alpha sen(-\beta) & \quad (\ \textit{aplica}\ (2.7.3)) \\
& = & \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta & \quad (\textit{paridad del coseno e imparidad del seno})
\end{array}$$

(2) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$

En efecto

$$\begin{array}{rcl}
\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) & = & 2\cos\alpha\cos\beta \\
& \Downarrow & \\
\cos\alpha\cos\beta & = & \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}
\end{array}$$

(3) $sen\alpha sen\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

En efecto

$$\begin{array}{rcl}
\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) & = & 2sen\alpha sen\beta \\
& \Downarrow & \\
sen\alpha sen\beta & = & \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}
\end{array}$$

(4) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

En efecto

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) \\ &= \cos\alpha\cos\alpha - sen\alpha sen\alpha \\ &= \cos\alpha\cos^2\alpha - sen^2\alpha \end{aligned}$$

(5) $sen\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

En efecto

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + sen\frac{\pi}{2}sen\alpha \\ &= 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot sen\alpha \\ &= sen\alpha \end{aligned}$$

(6) $\cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

En efecto

$$\begin{aligned} sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) \\ &= \cos\alpha \end{aligned}$$

(7) $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha$

En efecto

$$\begin{aligned} sen(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sen\beta \\ &= sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta \end{aligned}$$

(8) *Otras identidades que pueden ser demostradas como las anteriores son:*

(a) $sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha$

(b) $sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$

(c) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(d) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(e) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(f) $sen^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

(g) $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

(h) $\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

2.8. Resolución de Triángulos.

Definición 2.8.1. *Resolver un triángulo significará determinar los lados y los ángulos de un triángulo.*

Observación 2.8.2. *De acuerdo a la definición debemos encontrar una relación entre los lados* a, b, c *y los ángulos* α, β, γ

Consideremos la situación geométrica.

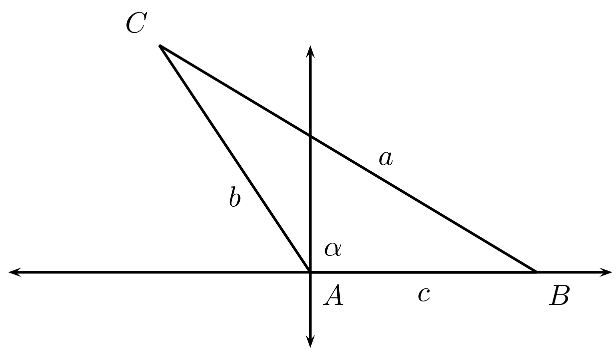


Figura 10

Tal que: $A = (0,0)$; $B = (c,0)$; $C = (b\cos\alpha, bsen\alpha)$ *entonces*

$$\begin{aligned} a^2 &= (c-b\cos\alpha)^2 + (0-bsen\alpha)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2sen^2\alpha \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}$$

Así hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 2.8.3. Teorema del Coseno *En un triángulo cualquiera con sus elementos dispuestos de la forma:*

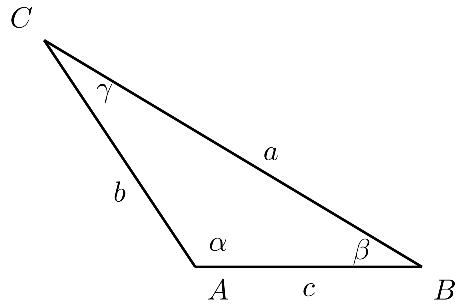


Figura 11

Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma
\end{aligned}$$

Observemos que como corolario de este podemos obtener lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha & \Longleftrightarrow & \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
 & \Downarrow & \\
sen^2\alpha & = & 1 - \left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 \\
 & = & \dfrac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}
\end{array}$$

Un cálculo análogo, para la relación $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ nos da que:

$$sen^2\beta = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2c^2}$$

Por tanto:

$$\begin{array}{rcl}
4b^2c^2sen^2\alpha & = & 4a^2c^2sen^2\beta \\
 & \Downarrow & \\
\dfrac{sen\alpha}{a} & = & \dfrac{sen\beta}{b}
\end{array}$$

De igual manera se puede mostra que

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\gamma}{c}$$

Lo que estamos mostrando es que vale el teorema

Corolario 2.8.4. Teorema del seno *En un triángulo cualquiera ABC tenemos las relaciones:*

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$

En realidad lo que vale es que ambos teoremas son equivalentes!!!

Ejemplo 2.8.5. *Resuelva un triángulo ABC si sus lados miden $a = 90$; $b = 70$; $c = 40$:*

Solución

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{2}{7}$$

Luego $\alpha \approx 107^\circ$

análogamente

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{2}{3}$$

Luego $\beta \approx 48^\circ$

finalmente: $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 25^\circ$

2.9. Ecuaciones Trigonométricas.

Definición 2.9.1. *Una ecuación trigonométrica es una ecuación donde las variables o incógnitas solo aparecen en los argumentos de las funciones trigonométricas.*

Observación 2.9.2. *Dada la periodicidad de las funciones trigonométricas, si una ecuación tiene una solución x entonces tiene infinitas soluciones de la forma $x + 2k\pi$; $\quad k \in \mathbb{Z}$.*

Ejemplo 2.9.3. *En la ciudad de Boston el número de horas de luz diurna $d(t)$ se puede calcular a través de la ecuación trigonométrica:*

$$d(t) = 3sen\frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12$$

Con t días y $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. ¿ Cuántos días del año tienen más de 10.5 horas de luz diurna ?

1. Resolver el problema significa encontrar a y b tal que se verifica la relación $0 < a < t < b < 365$ con $d(a) = d(b) = 10.5$

2. Resolvamos la ecuación para determinar a y b.

$$\begin{aligned}
3sen\frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12 = 10.5 \quad &\Longleftrightarrow \quad sen\frac{2\pi}{365}(t - 79) = -0.5 \Longrightarrow \\
\frac{2\pi}{365}(t - 79) = 210^\circ \quad &\vee \quad \frac{2\pi}{365}(t - 79) = 330^\circ \Longrightarrow \\
t \approx 292 \quad &\vee \quad t \approx 414 \Longrightarrow \\
t \approx 292 \quad &\vee \quad t \approx 414 - 365 = 49
\end{aligned}$$

Por tanto más de 10.5 horas de luz habrá entre $a = 49$ y $b = 292$, es decir 243 días al año.

3. La función Sinusoidal

Recordemos que los gráficos de las funciones seno y coseno son:

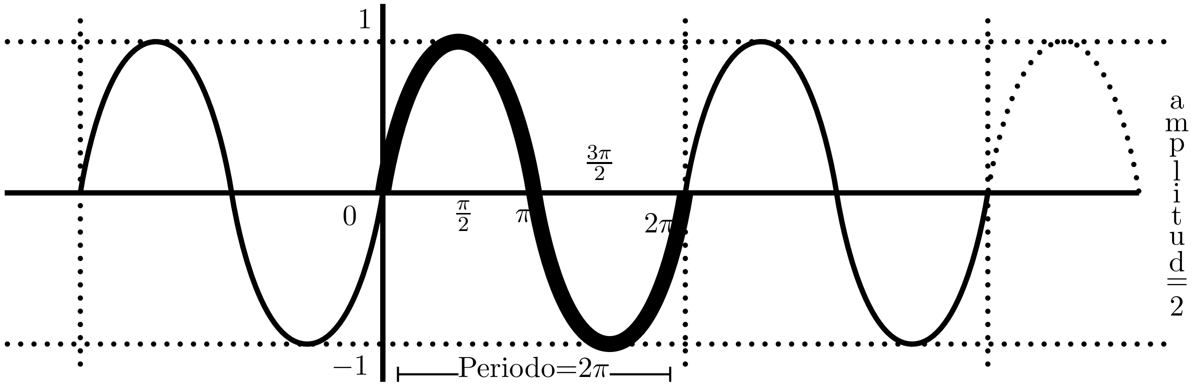


Figura 12 $\quad y = \operatorname{sen} x$

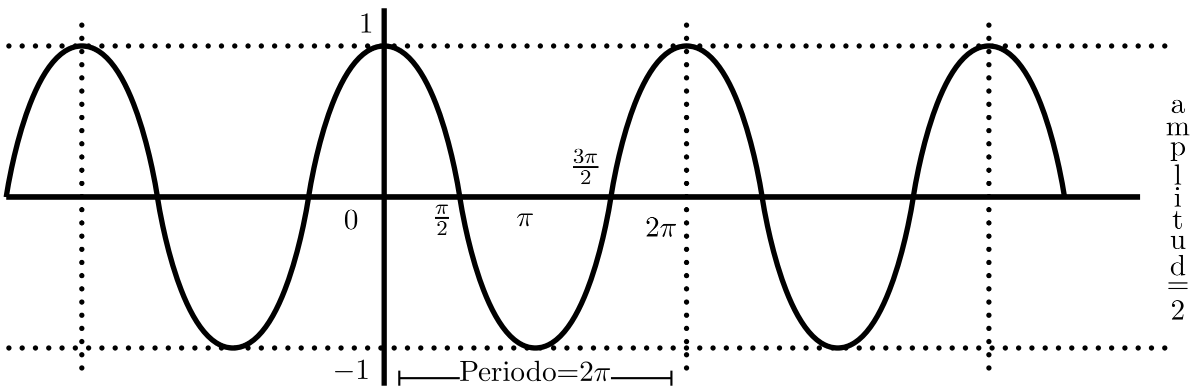


Figura 13 $\quad y = \cos x$

De lo anterior podemos observar lo siguiente:

(1) Desarrollando el seno y el coseno de suma de ángulos tenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \qquad \text{y} \tag{8}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{9}$$

entonces de (8), sigue que

$$\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos x = \operatorname{sen} x\cdot 0 + 1\cdot\cos x = \cos x$$

Concluimos entonces que la función coseno se obtiene trasladando la función Seno en $\frac{\pi}{2}$ o en 90°.

Así por ejemplo del gráfico de seno observamos que: $\cos 0 = \operatorname{sen}(0+\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, análogamente de (9), sigue que

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos x\cdot 0 + \operatorname{sen} x\cdot 1 = \operatorname{sen} x$$

Por tanto la función seno se obtiene trasladando la función coseno en $-\frac{\pi}{2}$ o en -90° o 270°. Así por ejemplo del gráfico de coseno observamos que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}) = \cos 0 = 1$$

(2) como se ve las figuras, 1 y 2 la amplitud de ambas ondas es 1, sin embrago podemos alterar dicha amplitud, digamos **"A"**, a voluntad fácilmente, multiplicando por el valor deseado.

En general, para $A \in \mathbb{R}$ arbitrario tenemos que:

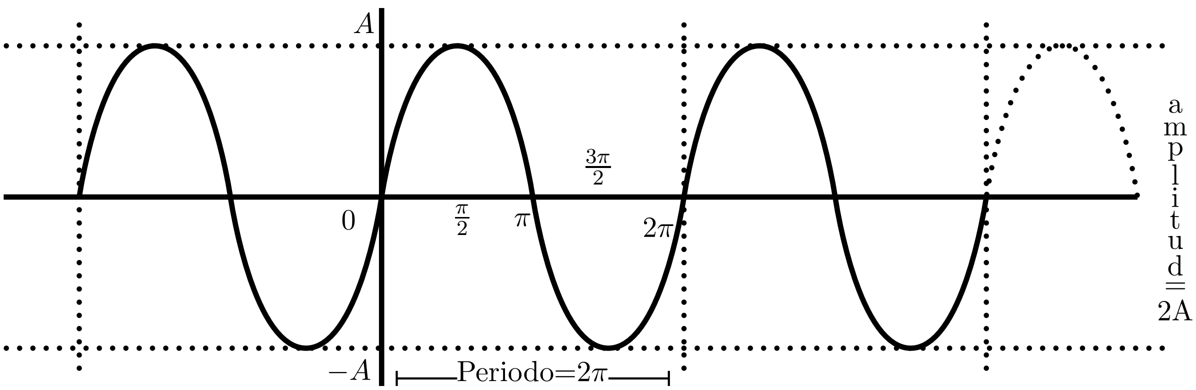


Figura 14 $\quad y = A\operatorname{sen} x$

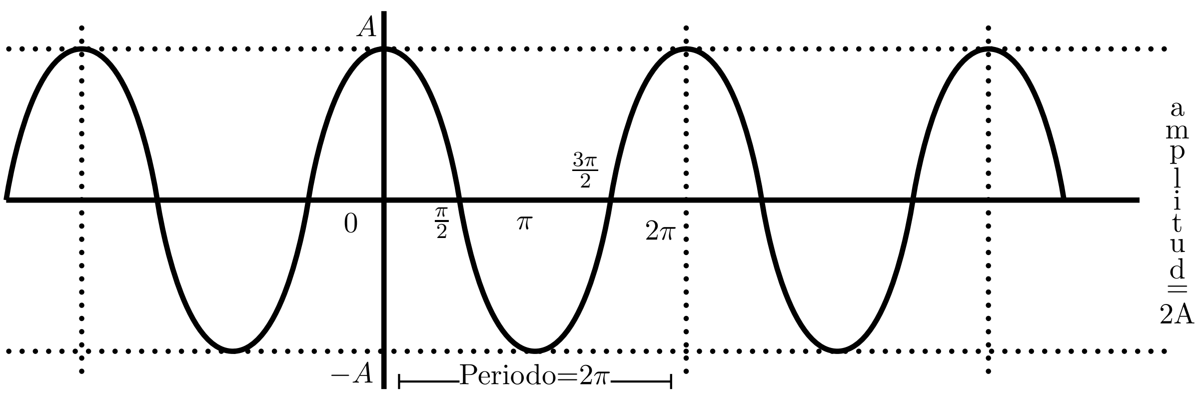


Figura 15 $\quad y = A\cos x$

(3) De las figuras (1) y (2), podemos ver que el periodo de ambas funciones es 2π, sin embargo podemos alterarlo a voluntad como sigue. Por ejemplo para;

(a) $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

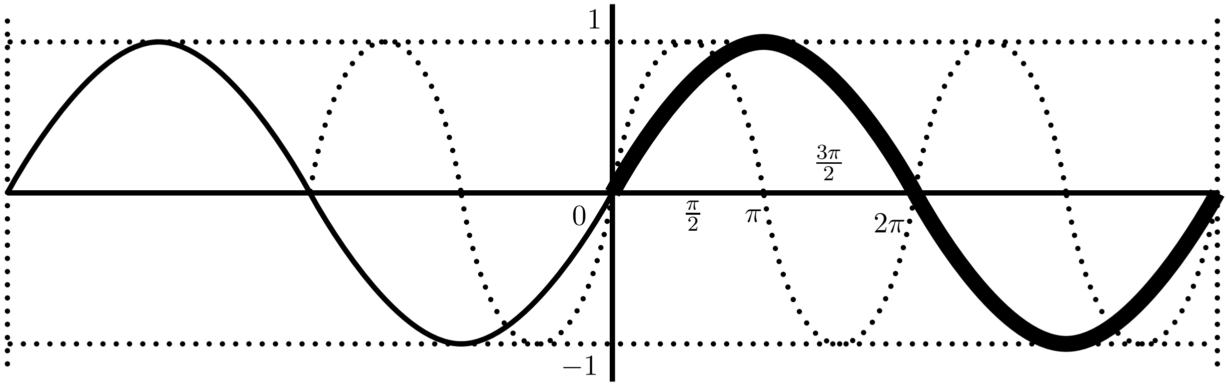
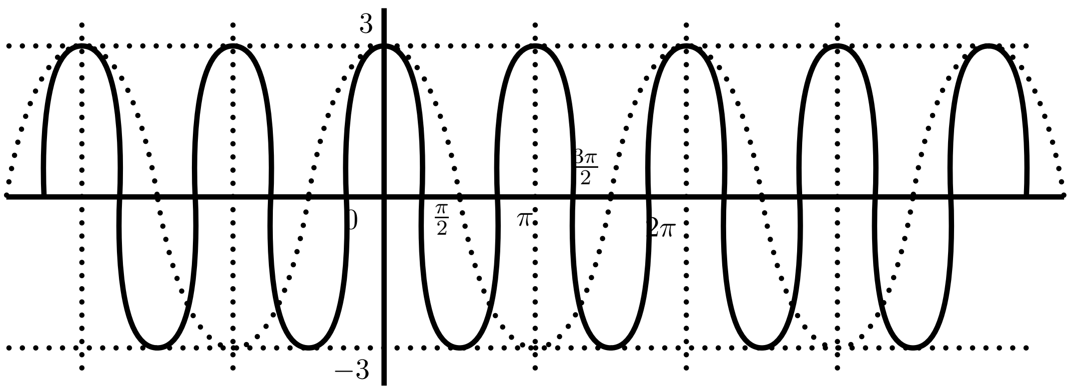


Figura 16 $\quad y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ Periodo$=4\pi$

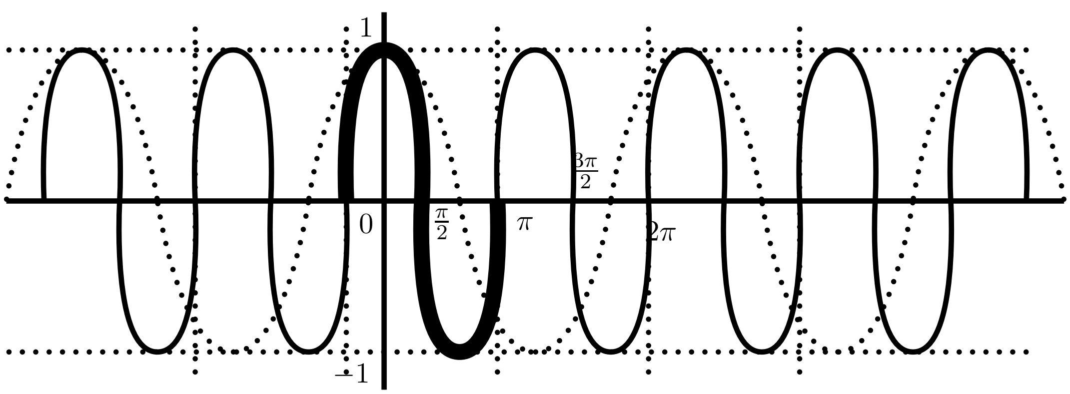
(b) $y = 3\cos(2x)$



Periodo$=\pi$

Figura 17 $\quad y = 3\cos 2x$

(c) $y = \operatorname{sen}(2x - \dfrac{\pi}{2})$



Periodo$=\pi$

desfase$=-\frac{\pi}{4}$

Figura 18 $\quad y = \operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{2})$

3.1. Función sinusoidal genérica. Llamaremos función sinusoidal genérica a una función del tipo $f(x) = a \operatorname{sen} \omega x + b \cos \omega x$.

Observación 3.1.1. *Si consideramos la función sinusoidal genérica entonces*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a \operatorname{sen} \omega x + b \cos \omega x \\
&= \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)[a \operatorname{sen} \omega x + b \cos \omega x] \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a \operatorname{sen} \omega x + b \cos \omega x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen} \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \omega x\right] \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Ahora, podemos ver directamente que:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2 + \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2 &= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Luego, existe un ángulo, llamado por ejemplo φ tal que:

$$
\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \wedge \qquad \operatorname{sen} \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{10}
$$

En efecto,

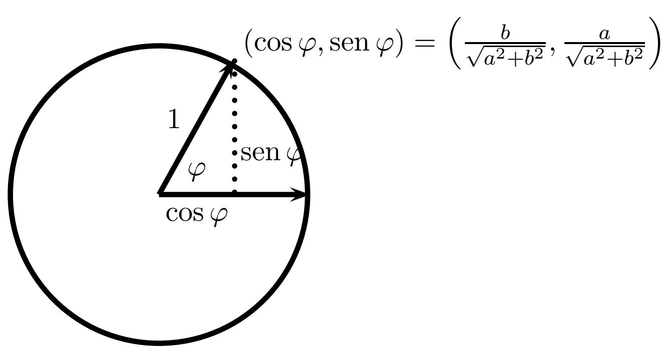


Figura 19

Sustituyendo en (*) tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\omega x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x\right] \\ &= \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{A}(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\omega x+\cos\varphi\cos\omega x) \\ &= A\cos(wx-\varphi) \end{aligned}$$

3.1.2. Propiedades de $f(x) = A\cos(\omega x - \varphi)$.

(1) f es periódica, pues,

$$\begin{aligned} f(x+T) &= A\cos(\omega(x+T)-\varphi) \\ &= A\cos(\omega x+\omega T-\varphi) \end{aligned}$$

Pero la función coseno es periódica de periodo 2π, así que:

$$f(x) = f(x+2\pi) = A\cos(\omega x+2\pi-\varphi) \Longrightarrow \omega T = 2\pi \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

Es decir, f es periódica de periodo $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$. También llamamos frecuencia a $|\omega| = \dfrac{2\pi}{T}$

(2) Para ver el desfase hacemos lo siguiente:

$$A\cos(\omega x-\varphi) = A\cos\left[\omega\left(x-\frac{\varphi}{\omega}\right)\right]$$

Luego, f esta desfasada en $\dfrac{\varphi}{\omega}$.
Es decir;

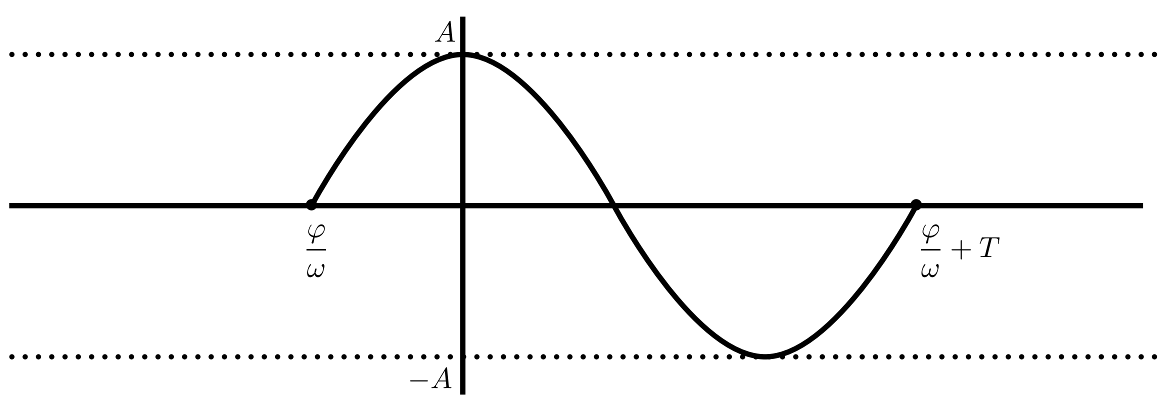


Figura 20 $y = A\cos(\omega x - \varphi)$

4. Funciones trigonométricas inversas

4.1. Función arcoseno o sen^{-1}. Por definición sabemos que:

- $dom(sen) = \mathbb{R}$
- $Img(sen) = [-1, 1]$
- La función seno es sobreyectiva
- La función seno no es inyectiva, pues por ejemplo $sen(0) = sen(\pi) = 0$ y $0 \neq \pi$. sin embargo podemos hacerla inyectiva haciendo cirugía (cortando adecuadamente) en el dominio como sigue:

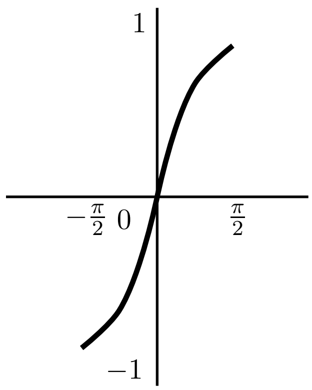


Figura 21 $\quad y = \operatorname{sen} x \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

entonces definimos:

$$\begin{array}{rcccl} sen^{-1} & : & [-1,1] & \longmapsto & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & & x & \longmapsto & y = sen^{-1}(x) \end{array} \tag{11}$$

Luego tenemos por definición que

$$y = sen^{-1}(x) \iff x = sen(y)$$

Definición 4.1.1. *La función definida arriba, sen^{-1} se llama la función inversa de seno y tambien se denota arcoseno.*

Ejemplo 4.1.2. (1) $arcoseno(x) = 0 \Longleftrightarrow x = sen(0) = 0$

(2) $arcoseno(x) = \dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = sen(\dfrac{\pi}{2}) = 1$

(3) $arcoseno(x) = -\dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = sen(-\dfrac{\pi}{2}) = -1$

4.2. Función arcocoseno o $\cos^{-1}$.

Definición 4.3. *Llamaremos arcocoseno o $\cos^{-1}$ a la función,*

$$\begin{array}{rcccl} \cos^{-1} & : & [-1,1] & \longmapsto & [0, \pi] \\ & & x & \longmapsto & y = \cos^{-1}(x) \end{array} \tag{12}$$

Ejemplo 4.3.1. (1) $arcocoseno(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \cos(0) = 1$

(2) $arcocoseno(x) = \dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

(3) $arcocoseno(x) = \pi \Longleftrightarrow x = \cos(\pi) = -1$

4.4. Función arcotangente o $\tan^{-1}$.

Definición 4.4.1. *Llamaremos arcotangente o* $\tan^{-1}$ *a la función,*

$$\begin{array}{rcccl} \tan^{-1} & : & \mathbb{R} & \longmapsto & \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ & & x & \longmapsto & y = \tan^{-1}(x) \end{array} \tag{13}$$

Ejemplo 4.4.2. (1) $arcotangente(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \tan(0) = 0$

(2) $arcotangente(x) = \dfrac{\pi}{4} \Longleftrightarrow x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

4.5. Otras funciones trigonométricas inversas.

Análogamente definimos las otras funciones inversas,

(1) $y = \cot^{-1}(x) = arcocotangente(x) \Longleftrightarrow x = \cot(y)$

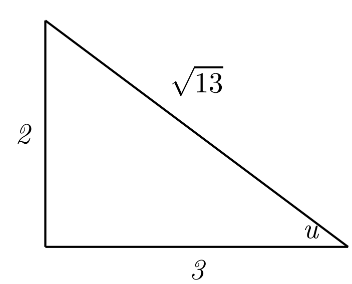
(2) $y = \sec^{-1}(x) = arcosecante(x) \Longleftrightarrow x = \sec(y)$

(3) $y = \csc^{-1}(x) = arcocosecante(x) \Longleftrightarrow x = \csc(y)$

Ejemplo 4.5.1. (1) *Determinemos el valor de la expresión:* $\sec\left(arcotangente\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)$

Solución

- $u = arcotangente\left(\dfrac{2}{3}\right) \Longleftrightarrow \tan(u) = \dfrac{2}{3}$
- *Construimos un triángulo rectángulo que verifique la definición de la función tangente.*



- *Finalmente para resolver el problema, basta calcular* $\sec(u)$.

$$\sec(u) = \frac{\sqrt{13}}{3} \longrightarrow \sec(arcotangente(\frac{2}{3})) = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

(2) *Resolvamos la ecuación* $5sen^2x + 3senx - 1 = 0$ *en* $[0, 2\pi]$

- *Sea* $u = senx$ *entonces* $5sen^2x + 3senx - 1 = 0 \Longleftrightarrow 5u^2 + 3u - 1 = 0$

- *Resolviendo la ecuación cuadrática tenemos que:*

$$u=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{10} \iff sen(x)=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{10}$$
$$\Downarrow$$
$$x = \begin{cases} sen^{-1}\left[\frac{-3+\sqrt{29}}{10}\right] \approx 0.2408 \\ \\ sen^{-1}\left[\frac{-3-\sqrt{29}}{10}\right] \approx -0.9946 \end{cases}$$

- *Finalmente las soluciones son*

  - $x_1 = 0.2408$
  - $x_2 = \pi - 0.248 = 2.9008$
  - $x_3 = \pi + 0.9946 = 4.1361$
  - $x_4 = 2\pi - 0.9946 = 5.2886$

(3) *Verifiquemos la identidad:* $arcoseno(x) + arcocoseno(x) = \frac{\pi}{2}$ *para* $x \in [-1, 1]$

Solución

- *Sea* $u = arcoseno(x)$ *y* $v = arcocoseno(x)$*, luego* $x = sen(u)$ *y* $x = \cos(v)$
- *Ahora como* $sen(u+v) = sen(u)\cos(v) + sen(v)\cos(u)$ *entonces:*

$$\begin{aligned} sen(u+v) &= x^2 + \sqrt{1-\cos^2(v)}\ \sqrt{1-sen^2(u)} \\ &= x^2 + \sqrt{(1-x^2)^2} \\ &= x^2 + (1-x^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así que

$$u+v = arcoseno(1) = \frac{\pi}{2}$$

5. Ejercicios Propuestos

(1) Si $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ calcule:

(a) $sen\frac{\pi}{8}$ y $\tan\frac{\pi}{8}$

(b) $\cos\frac{3\pi}{8}$ y $sen\frac{3\pi}{8}$ y $\tan\frac{3\pi}{8}$

(c) $\cos\frac{5\pi}{8}$ y $sen\frac{5\pi}{8}$ y $\tan\frac{5\pi}{8}$

(d) $\cos\frac{7\pi}{8}$ y $sen\frac{7\pi}{8}$ y $\tan\frac{7\pi}{8}$

(e) $\cos\frac{\pi}{16}$ y $sen\frac{\pi}{16}$ y $\tan\frac{\pi}{16}$

(2) Desarrolle y reduzca las expresiones:

(a) $(\cos x + senx)^2 + (\cos x - senx)^2$

(b) $(a\cos x + bsenx)^2 + (a\cos x - bsenx)^2$. Si a y b son reales.

(c) $sen^2\left(\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x}\right)$

(3) Demuestre que las siguientes funciones son periódicas y determine su periodo:

(a) $f(x) = \cos 3x$

(b) $f(x) = \cos 5x$

(c) $f(x) = sen2x$

(d) $f(x) = sen5x$

(e) $f(x) = sen5x + \cos 5x$

(4) Determine si son pares o impares las funciones:

(a) $g(x) = 2x + 3 + sen3x$
(b) $g(x) = \cos(3x^2) + sex$
(c) $g(x) = sen(2x)\cos(3x)$
(d) $g(x) = \cos^2 x + \cos 3x$

(5) En los siguientes ejercicios usaremos el siguiente vocabulario:

Si un observador en el punto X avista un objeto O entonces el ángulo que forma la linea visual del objeto con la visión normal de sus ojos es el ángulo de elevación del objeto O, (Si este se encuentra sobre la horizontal), o ángulo de depresión del objeto O si esta bajo la horizontal.

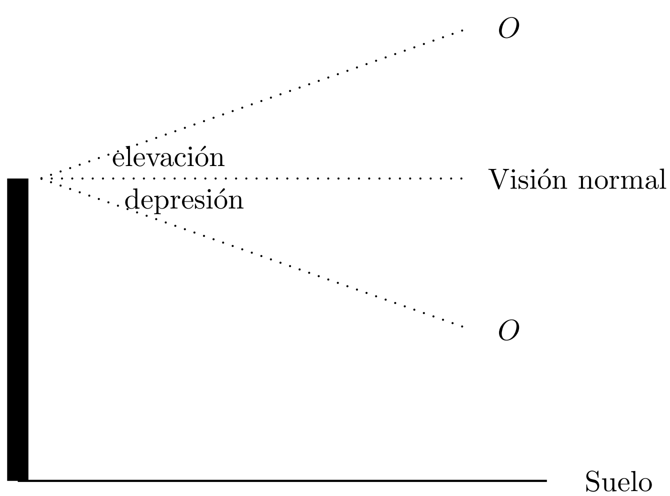


Figura 22: Ángulo de elevación y depresión

(a) Desde un punto al nivel del suelo y a 135 metros de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es $57°20'$. Calcule la altura de la torre.

(b) Desde un punto P ubicado al nivel del suelo el ángulo de elevación de la parte más alta de la torre es $26°50'$. Desde un punto que esta a 25 metros más cercano a la torre y en la misma linea con P y la base de la torre, el ángulo de elevación de la parte alta es de $53°30'$. Calcule la altura de la torre.

(c) Desde lo alto de un edificio que mira al mar, un observador avista una lancha que navega directamente hacia el edificio. Si el observador esta a 100 pies sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión de la lancha cambia de $25°$ a $40°$ durante el periodo de observación. Calcule la distancia que recorre la lancha.

(6) Resolución de triángulos:

(a) Resuelva los triángulos:

(a)	$\alpha = 60°;$	$b = 20;$	$c = 30$
(b)	$\gamma = 45°;$	$b = 10;$	$a = 15$
(c)	$\beta = 150°;$	$a = 150;$	$c = 30$
(d)	$\beta = 73°;$	$c = 14;$	$a = 87$
(e)	$a = 2;$	$b = 3;$	$c = 4$
(f)	$a = 10;$	$b = 15;$	$c = 12$

(b) El ángulo de una esquina de un terreno triangular mide $73°40'$ y los lados que se unen en esta esquina miden 175 pies y 150 pies de largo. Calcule la longitud del tercer lado.

(c) Para hallar la distancia entre los puntos, A y B un agrimensor escoge un punto C que esta ubicado a 420 yardas de A y a 540 yardas de B. Si el ángulo ACB mide $63°10'$. Calcule la distancia entre A y B.

(7) Resuelva las ecuaciones trigonométricas:

(a) $sen(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$

(c) $2\cos t + 1 = 0$

(d) $\tan^2 x = 1$

(e) $sen^2x + senx - 6 = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(f) $2\cos^2 x + \cos x = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(g) $sen^2x + senx - 6 = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(h) $2\tan x - \sec^2 x = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(i) $2sen^3x + sen^2x - 2senx - 1 = 0 \qquad (x \in [0, 2\pi])$

(8) Grafique y determine: Amplitud, periodo, desfase de las funciones:

(a) $y = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(b) $y = 3sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

(c) $y = sen\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

(d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(e) $y = \cos(2x - \pi) + 2$

(f) $y = sen\frac{1}{x}$

(9) Determine el valor exacto:

(a) $\tan(arcotangente 14)$

(b) $sen\left(arcotangente\left(-\frac{3}{4}\right) - arcoseno\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

(c) $\tan\left(arcotangente\left(\frac{4}{3}\right) - arcocoseno\left(\frac{8}{17}\right)\right)$

(d) $\tan\left(arcocosen\left(\frac{1}{2}\right) - arcoseno\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

(10) Verifique las identidades

(a) $arcosenox = arcotangente\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $arcocosenox + arcocoseno\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \qquad (x \in [0,1])$

(c) $arcotangentex + arcotangente\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad (x > 0)$

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético