CAPITULO 7

Preliminares sobre Funciones

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

Este Capitulo esta destinado a presentar contenidos y actividades que permitirán al estudiante, clasificar conjuntos, usando como herramienta central las propiedades cualitativas de las funciones y de sus gráficos.
Estudiaremos en primer lugar, la técnica de inyectar un conjunto $\mathbb{A}$ en otro conjunto $\mathbb{B}$, con el fin de copiar $\mathbb{B}$ por defecto (por el interior).
En segundo lugar, estudiaremos la técnica de cubrir un conjunto $\mathbb{B}$ por otro conjunto $\mathbb{A}$, con el fin de copiar $\mathbb{B}$ por exceso (por el exterior).
Finalmente haremos coexistir, si es posible, ambas técnicas y concluiremos si los conjuntos son comparables o no.

1. Ideas Básicas

Si deseamos inyectar un conjunto en otro entonces, ya tenemos predeterminado un orden de actuación, es decir debe haber una relación entre los elementos del conjunto que se inyecta y los del conjunto inyectado.

Ejemplo 1.1. *Si* $\mathbb{A} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ *y* $\mathbb{B} = \mathbb{Z}$ *entonces podemos definir naturalmente la relación* ψ*:*

$$2z \quad \psi \quad 2z \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$$

Es decir, una inclusión natural de los enteros pares en los enteros y la podemos simbolizar como

$$\underbrace{\{\cdots, -2, 0, 2, 4, \cdots\}}_{2\,\mathbb{Z}} \hookrightarrow \underbrace{\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}}_{\mathbb{Z}}$$

Aquí podemos identificar los pares en los enteros, e incluso podemos graficar este comportamiento en el plano cartesiano:

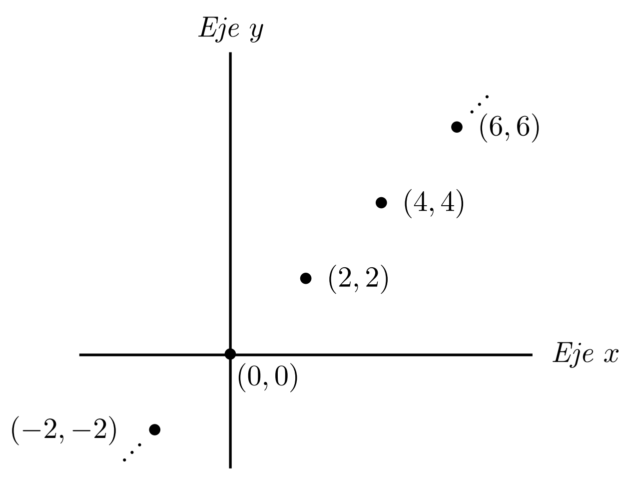

Figura 1

Respecto del dominio y la imagen de la relación ψ tenemos:

- $dom(\psi) = 2\,\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$

- $Img(\psi) = 2\,\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$, *(Por ejemplo* $3 \notin Img(\psi)$*)*

- $Img(2k) = \{2k\}$, *para cada* $k \in \mathbb{Z}$. *Así que podemos notar sin ambigüedad* $\psi(2k) = 2k$ *para cada* $k \in \mathbb{Z}$, *y en este caso,* ψ *se comporta como la relación identidad*

- *Además,* $\psi(2k_1) = \psi(2k_2) \Longrightarrow 2k_1 = 2k_2$. *Así que*

$$2k_1 \neq 2k_2 \quad \Longrightarrow \quad \psi(2k_1) \neq \psi(2k_2)$$

Ejemplo 1.2. *Podemos también definir la relación φ como sigue*

$$z \quad \varphi \quad 2z \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$$

Es decir, una relación entre enteros y pares y la podemos simbolizar como

$$\underbrace{\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}}_{\mathbb{Z}} \rightarrowtail \underbrace{\{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}}_{2\,\mathbb{Z}}$$

Aquí, a cada entero le asociamos o lo transformamos en un par, es decir la acción es multiplicar por 2, al igual que en el caso anterior podemos graficar este comportamiento en el plano cartesiano:

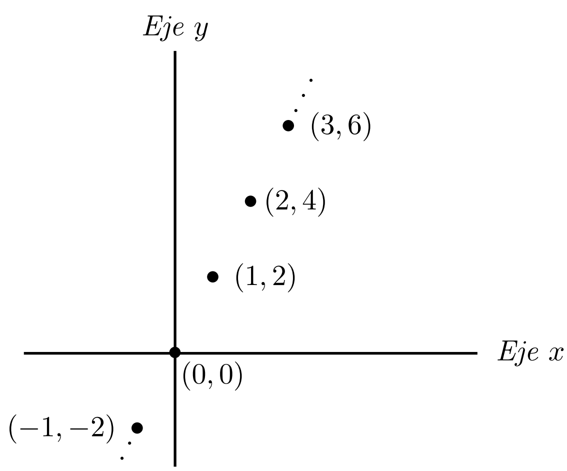

Figura 2

Respecto del dominio y la imagen de la relación ψ tenemos:

- $dom(\varphi) = \mathbb{Z}$

- $Img(\varphi) = 2\,\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$, *(Por ejemplo* $3 \notin Img(\varphi)$*)*

- $Img(k) = \{2k\}$, *para cada* $k \in \mathbb{Z}$. *Así que podemos notar sin ambigüedad* $\varphi(k) = 2k$ *para cada* $k \in \mathbb{Z}$, *y en este caso,* φ *no se comporta como la relación identidad*

- *Además,* $\varphi(k_1) = \varphi(k_2) \Longrightarrow 2k_1 = 2k_2 \Longrightarrow k_1 = k_2$. *Así que*

$$k_1 \neq k_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(k_1) \neq \varphi(k_2)$$

Ejemplo 1.3. *Ahora consideremos la relación entre enteros ϕ definida como sigue:*

$$z \quad \phi \quad z^2 \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$$

La podemos simbolizar como

$$\underbrace{\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}}_{\mathbb{Z}} \rightarrowtail \underbrace{\{\cdots, 0, 1, 4, 9, \cdots\}}_{\mathbb{Z}}$$

Aquí, a cada entero le asociamos su cuadrado, al igual que en el caso anterior podemos graficar este comportamiento en el plano cartesiano:

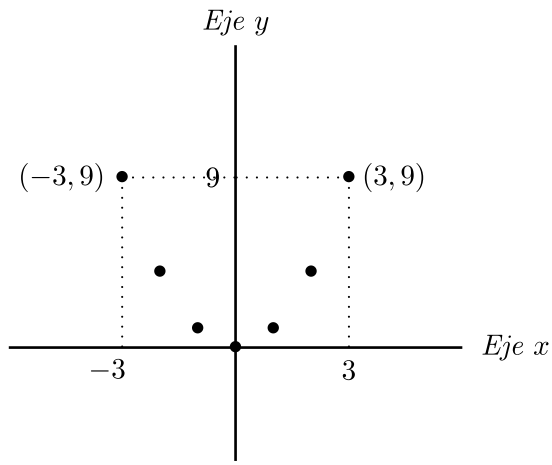

Figura 3

Respecto del dominio y la imagen de la relación ϕ tenemos:

- $dom(\phi) = \mathbb{Z}$
- $Img(\phi) = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$
- $Img(k) = \{k^2\}$, *para cada* $k \in \mathbb{Z}$. *Así que podemos notar sin ambigüedad* $\varphi(k) = k^2$, *para cada* $k \in \mathbb{Z}$
- *Además,* $\phi(k_1) = \phi(k_2) \Longrightarrow k_1^2 = k_2^2 \Longrightarrow (k_1 + k_2)(k_1 - k_2) = 0 \Longrightarrow k_1 = k_2 \vee k_1 = -k_2$. *Así que*

  $$k_1 \neq k_2 \quad \not\Longrightarrow \quad \phi(k_1) \neq \phi(k_2)$$

  Pues, $2 \neq -2 \wedge \phi(2) = \phi(-2) = 4$

Ejemplo 1.4. *Ahora consideremos la relación entre enteros θ definida como sigue:*

$$z \; \theta \; \sqrt{z} \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$$

Aquí tenemos un problema porque, la raíz merece un análisis cuidadoso en el siguiente sentido:

$$\sqrt{z} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow z \geq 0 \wedge z = u^2 \quad (\textit{Para algún } u; u \in \mathbb{Z})$$

$$\underbrace{\{\cdots, 0, 1, 4, 9, 16 \cdots\}}_{\textit{cuadrados}} \rightarrowtail \underbrace{\{\cdots, 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \cdots\}}_{\mathbb{Z}}$$

El comportamiento gráfico en el plano cartesiano es el siguiente:

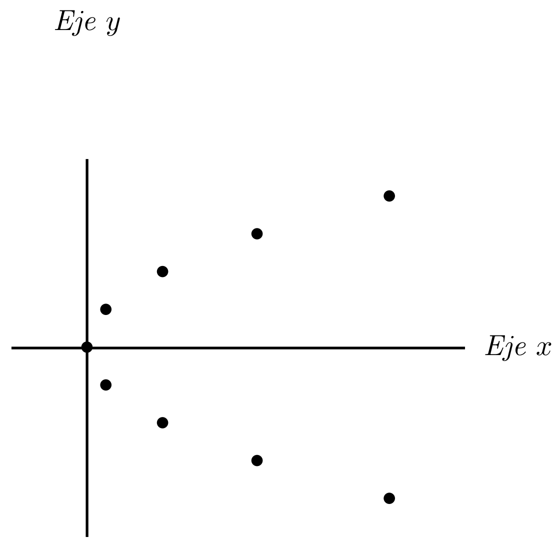

Figura 4

Respecto del dominio y la imagen de la relación θ tenemos:

- $dom(\theta) = \{\cdots, 0, 1, 4, 9, 16 \cdots\}$
- $Img(\theta) = \mathbb{Z}$
- $Img(k^2) = \{\pm k\}$, *para cada* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Así que no podemos notar como antes,* $\theta(k^2) =?$, *porque la imagen de un cuadrado es dupla, salvo para el* 0

Observación 1.5. *En los ejemplos expuestos encima observamos distintas maneras de relacionar elementos, en los ejemplos* **1.1**, **1.2**, *y 1.3, a cada elemento le asociamos un único elemento, pero en 1.4, el comportamiento es diferente y en realidad no es posible escoger una imagen, porque no hay una política clara para hacerlo. Así que en la sección siguiente debemos aclarar estas diferencias*

2. El Concepto de Función

Definición 2.1. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Diremos que f es una función del conjunto A en el conjunto B si:*

(1) $f \subset A \times B$, *es decir f es una relación de A en B.*

(2) $dom(f) = A$

(3) $f(a) = \{b \in B \mid a\ f\ b\}$ *posee un único elemento* $(\forall a; a \in A)$

Así que una función es una relación especial pues;

- *Su dominio coincide con el conjunto de salida de la relación.*
- *Todo elemento del dominio posee una única imagen.*

Notaciones usuales para describir una función:

$\begin{array}{cccc} f & : & A & \longmapsto & B \\ & & a & \longmapsto & f(a)=b \end{array}$	$\begin{array}{ccc} A & \stackrel{f}{\longmapsto} & B \\ a & \longmapsto & b \end{array}$	$a \in A \longmapsto f(a) = b \in B$

A continuación exhibiremos un listado de ejemplos, que nos permita por una parte, valga la redundancia, ser un ejemplo para el concepto actual de estudio, y por otra obtengamos conclusiones que enriquezcan el análisis y podamos avanzar en la consecución de nuestros objetivos

Ejemplo 2.1.1. *$f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ tal que $y = f(x) = 2 \cdot x + 1$. Con esta fórmula podemos obtener algunos pares que la satisfagan*

- $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
- $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
- $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

Ejemplo 2.1.2. *$f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ tal que $y = f(x) = 2 \cdot x + 1$. Para esta fórmula tenemos también algunos pares que la satisfacen*

- $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$
- $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$
- $f(-3) = 2 \cdot (-3) + 1 = -5$
- $f(-4) = 2 \cdot (-4) + 1 = -7$
- $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
- $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
- $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

Ejemplo 2.1.3. *$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = 2 \cdot x + 1$. Para esta fórmula tenemos también algunos pares que la satisfacen*

- $f(-\pi) = 2 \cdot (-\pi) + 1 = -2\pi + 1$
- $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 = 0$

- $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot (\frac{1}{2}) + 1 = 2$
- $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
- $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
- $f(\pi) = 2 \cdot \pi + 1 = 2\pi + 1$

Observando los ejemplos, 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3, vemos que la misma relación (fórmula), se comporta según el conjunto que provee los elementos !!!. Así que en la definición que sigue debemos precisar los elementos relevantes que la distinguen

Definición 2.2. *Sea f una función entonces*

(1) *Llamamos dominio de f al conjunto*
$$dom(f) = \{a \in A \mid (\exists b; b \in B) : f(a) = b\}$$
En particular, si $A = B = \mathbb{R}$ entonces
$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$
(2) *Llamamos imagen o recorrido de f al conjunto*
$$Img(f) = \{b \in B \mid (\exists a; a \in dom(f) : f(a) = b\}$$
En particular, si $A = B = \mathbb{R}$ entonces
$$Img(f) = \{f(x) \mid x \in dom(f)\}$$
(3) *Llamaremos gráfico de f al conjunto*
$$graf(f) = \{(a, b) \mid b = f(a)\}$$

Ejemplo 2.2.1. *Si $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ tal que $y = f(x) = 2 \cdot x + 3$ entonces*

- $dom(f) = \mathbb{N}$

  En efecto
$$\begin{aligned} x \in dom(f) &\iff x \in \mathbb{N} \wedge f(x) \in \mathbb{N} \\ &\iff x \in \mathbb{N} \wedge 2x + 1 \in \mathbb{N} \\ &\iff x \in \mathbb{N} \qquad \textit{(Los naturales son cerrados para el producto y la adición)} \end{aligned}$$
- $Img(f) = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

  En efecto
$$\begin{aligned} y \in Img(f) &\iff (\exists x, x \in \mathbb{N}) : \ y = f(x) \\ &\iff (\exists x, x \in \mathbb{N}) : \ y = 2x + 1 \end{aligned}$$

  Es decir, $Img(f) = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

▶ *Su gráfico es de la forma:*

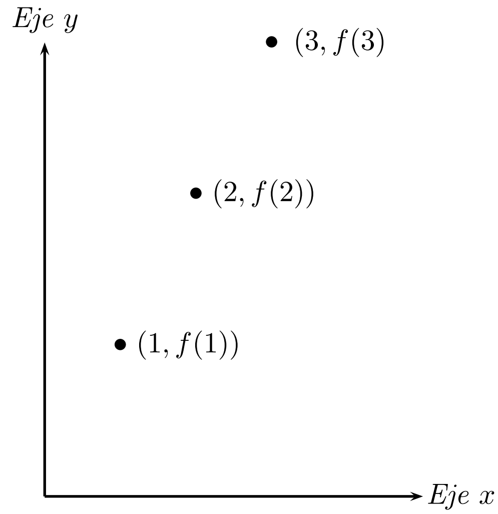

Figura 5: $f(x) = 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{N})$

Ejemplo 2.2.2. *Si* $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ *tal que* $y = f(x) = 2 \cdot x + 1$ *entonces*

▶ $dom(f) = \mathbb{Z}$

En efecto

$$\begin{aligned} x \in dom(f) &\iff x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ f(x) \in \mathbb{Z} \\ &\iff x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ 2x + 1 \in \mathbb{Z} \\ &\iff x \in \mathbb{Z} \qquad (\textit{Los enteros son cerrados para el producto y la adición}) \end{aligned}$$

▶ $Img(f) = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

En efecto

$$\begin{aligned} y \in Img(f) &\iff (\exists x, x \in \mathbb{N}) : \ y = f(x) \\ &\iff (\exists x, x \in \mathbb{N}) : \ y = 2x + 1 \end{aligned}$$

Es decir, $Img(f) = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

▶ *Su gráfico es de la forma:*

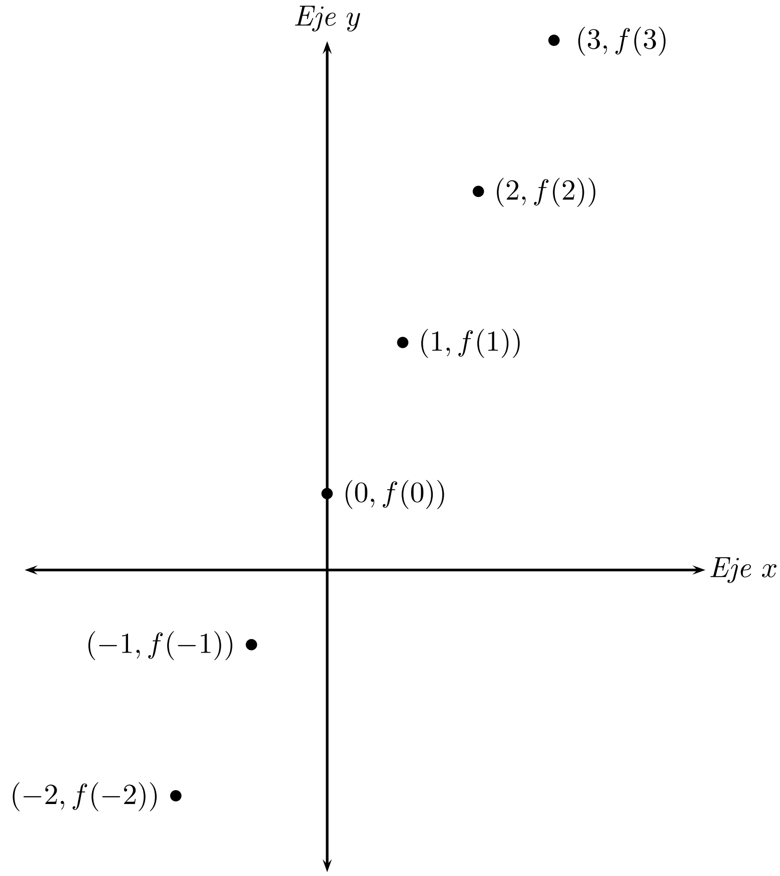

Figura 6: $f(x) = 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{Z})$

Ejemplo 2.2.3. *Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = 2 \cdot x + 1$ entonces*

▶ $dom(f) = \mathbb{R}$

En efecto

$$
\begin{aligned}
x \in dom(f) &\iff x \in \mathbb{R} \ \wedge \ f(x) \in \mathbb{R} \\
&\iff x \in \mathbb{R} \ \wedge \ 2x + 1 \in \mathbb{R} \\
&\iff x \in \mathbb{R} \qquad (\textit{Los enteros son cerrados para el producto y la adición})
\end{aligned}
$$

▶ $Img(f) = \mathbb{R}$

En efecto

$$
\begin{aligned}
y \in Img(f) &\iff (\exists x, x \in \mathbb{R}) : \ y = f(x) \\
&\iff (\exists x, x \in \mathbb{R}) : \ y = 2x + 1 \\
&\iff (\exists x, x \in \mathbb{R}) : \ x = \frac{y - 1}{2} \\
&\iff y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Es decir, $Img(f) = \mathbb{R}$

► *Su gráfico es de la forma:*

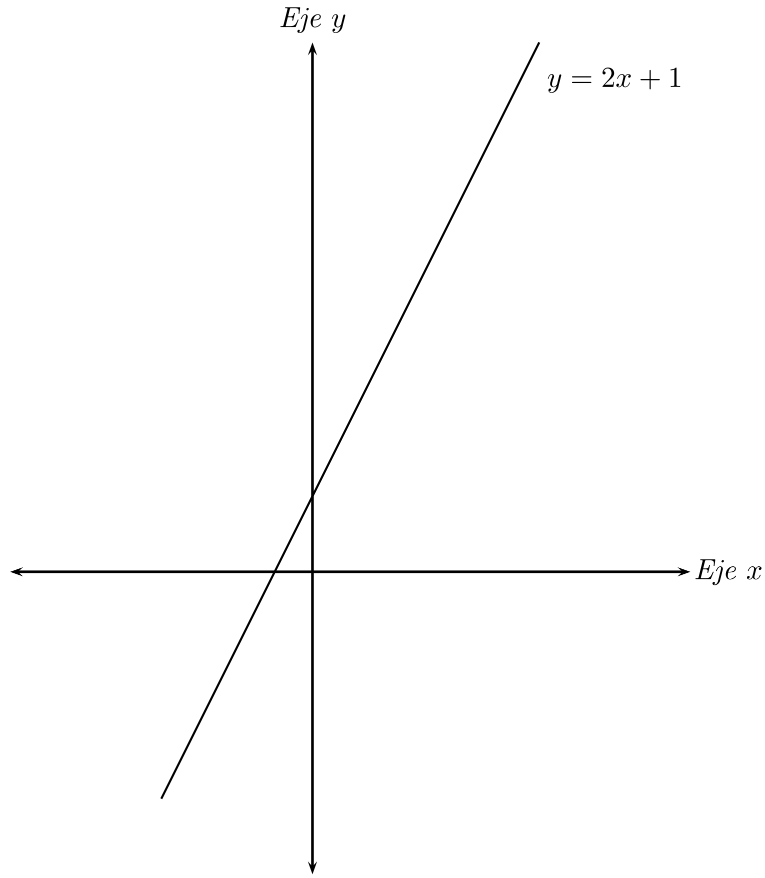

Figura 7: $f(x) = 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

Ejemplo 2.2.4. *Definamos* $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x, y) = (x + y, 3x + 3y)$ *entonces*

(1) *Determinemos* $dom(f)$

$$\begin{aligned} (x, y) \in dom(f) &\iff (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge f(x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x + y, 3x + 3y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Luego, $dom(f) = \mathbb{R}^2$

(2) *Determinemos* $Img(f)$

$$\begin{aligned} (u, v) \in Img(f) &\iff (\exists (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2) \;\wedge\; f(x, y) = (u, v) \\ &\iff (\exists (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2) \;\wedge\; (x + y, 3x + 3y) = (u, v) \\ &\iff (\exists (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2) \;\wedge\; \left.\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & u \\ 3x & + & 3y & = & v \end{array}\right| \\ &\iff (\exists (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2) \;\wedge\; \left.\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & u \\ x & + & y & = & \dfrac{v}{3} \end{array}\right| \\ &\iff u = \frac{v}{3} \quad \vee \quad 3u = v \end{aligned}$$

Así que, $Img(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = 3x\} = \{(x,3x) | \ x \in \mathbb{R}\}$. *Luego, esta función transforma el plano en una recta*

(3) *Gráficamente la situación puede ser vista como sigue:*

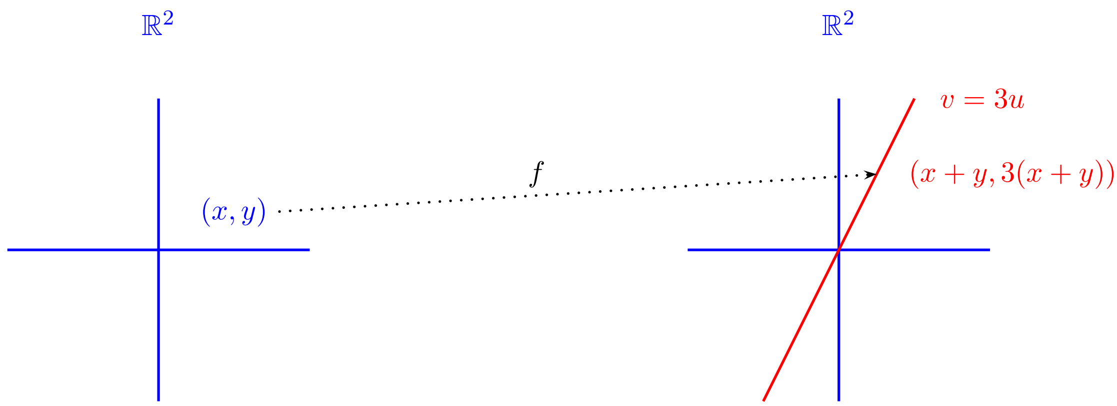

Figura 8: El plano se comprime a una recta

Observación 2.3. *En este último ejemplo, observamos que el plano se trasforma en una recta, y entonces no podemos esperar que la geometría del plano se mantenga.*

(1) *Necesariamente "debemos tener que a algunos puntos de la recta le corresponde más de un punto del dominio, o mejor una imagen tiene más de una preimagen".*

En efecto

Si llamamos $f^{-1}(u,v) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (u,3u)\}$ *entonces por ejemplo*

$$\begin{aligned}
(x,y) \in f^{-1}(0,0) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ f(x,y) = (0,0) \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ \left.\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ 3x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ x + y = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ y = -x \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,-x), \ x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Gráficamente la situación es la siguiente.

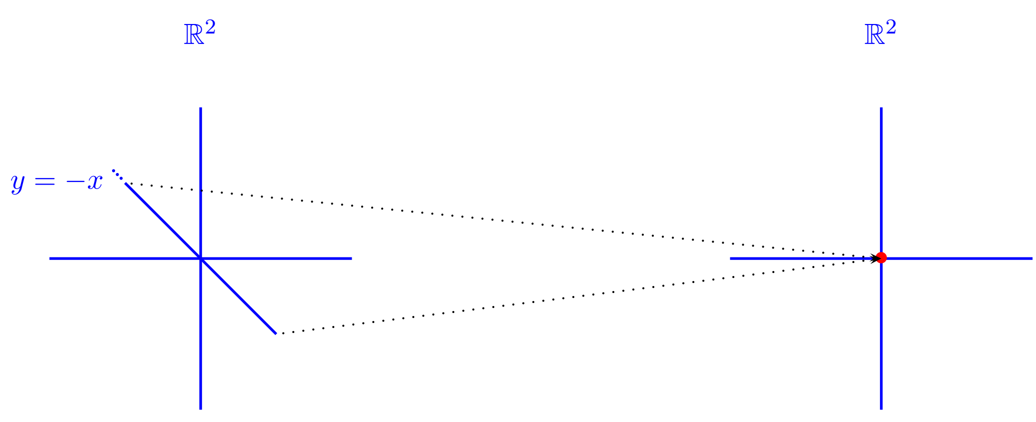

Figura 9: La recta $y = -x$ se comprime a un punto

(2) *Además, sabemos que toda relación R, digamos $R \subset A \times B$ tiene una relación inversa $R^{-1} \subset B \times A$ tal que $R^{-1} \circ R \subset \Delta(A)$ y $R \circ R^{-1} \subset \Delta(B)$, donde $\Delta(A) = \{(a,a) \mid a \in A\}$, y $\Delta(B) = \{(b,b) \mid b \in B\}$ son las diagonales de A^2 y B^2 respectivamente. Sin embargo para una función podemos tener problemas, justo como en el ejemplo de encima, f^{-1} es una relación pero no función, porque falla, cuando menos para $f^{-1}(0,0) = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$!!!.*

(3) *Es necesario también observar que existe una función que permite mirar, a un conjunto, como su dominio y su imagen simultáneamente.*

En efecto
Para cualquier conjunto A se puede definir la función identidad del conjunto A, como sigue

$$1_A \quad : \quad A \longmapsto A \qquad \text{tal que } 1_A(a) = a \quad (\forall a; a \in \mathbb{A}) \tag{1}$$

Es claro que $dom(1_A) = A$ e $Img(1_A) = A$ y que $graf(1_A) = \Delta(A) = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{A}\}$

3. Clasificación de funciones

Definición 3.1. *Sea $f : A \longmapsto B$ una función entonces diremos que f es inyectiva si*

$$x_1 \neq x_2 \text{ en el } dom(f) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplo 3.1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x+y, x-y)$ entonces f es inyectiva*

En efecto

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) &\iff (x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2, x_2-y_2) \\
&\iff \left|\begin{array}{rcl} x_1+y_1 &=& x_2+y_2 \\ x_1-y_1 &=& x_2-y_2 \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \wedge 2y_1 = 2y_2 \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\
&\Longrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)
\end{aligned}$$

Luego, f es inyectiva

Ejemplo 3.1.2. *La función $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x+y, 3x+3y)$ definida inicialmente en el ejemplo* **2.2.4** *no es una función inyectiva, porque*

$$(1,-1) \quad \neq \quad (2,-2) \text{ sin embargo } f(1,-1) = (0,0) = f(2,-2)$$

Definición 3.2. *Sea $f : A \longmapsto B$ una función entonces diremos que f es sobreyectiva si*

$$Img(f) = B$$

Ejemplo 3.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x+y, x-y)$ entonces f es sobreyectiva*

En efecto

Para verificar la sobreyectividad debemos verificar que $Img(f) = \mathbb{R}^2$, es decir debemos demostrar que, $Img(f) \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 \subset Img(f)$, así que esto sugiere naturalmente el siguiente algoritmo de trabajo:

- *En primer lugar, como $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ es una función entonces naturalmente $Img(f) \subset \mathbb{R}^2$*

- *En segundo lugar, par demostrar que $\mathbb{R}^2 \subset Img(f)$, debemos verificar que si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ entonces existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (u, v)$, es decir f será sobreyectiva si y sólo si tiene solución en $\mathbb{R}^2$ la ecuación $f(x, y) = (u, v)$*

  Así que veamos si nos son favorables las condiciones para resolver dicha ecuación:

$$\begin{aligned} f(x,y) = (u,v) &\iff (x+y, x-y) = (u,v) \\ &\iff \begin{array}{rcl|l} x+y &=& u & (i) \\ x-y &=& v & (ii) \end{array} \\ &\Longrightarrow \underbrace{x = \frac{u+v}{2}}_{(i)+(ii)} \quad \wedge \quad \underbrace{y = \frac{u-v}{2}}_{(i)-(ii)} \end{aligned}$$

  Así que,

$$f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = (u,v) \qquad (\forall (u,v); (u,v) \in \mathbb{R}^2) \Longrightarrow (u,v) \in Img(f)$$

Ejemplo 3.2.2. *La función $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, 3x + 3y)$ definida inicialmente en el ejemplo* **2.2.4** *no es una función sobreyectiva, porque por ejemplo, la ecuación $f(x, y) = (1, 1)$, no tiene solución en $\mathbb{R}^2$, es decir porque $\mathbb{R}^2 \not\subseteq Img(f)$*

En efecto

$$f(x,y) = (1,1) \iff \begin{array}{rcrcl|} x &+& y &=& 1 \\ 3x &+& 3y &=& 1 \end{array} \Longrightarrow 3 = 1 (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Definición 3.3. *Sea $f : A \longmapsto B$ una función entonces diremos que f es biyectiva si f es inyectiva y f es sobreyectiva*

Ejemplo 3.3.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, x - y)$ entonces f es biyectiva como lo hemos mostrado en los ejemplos 3.1.1 y 3.2.1*

Ejemplo 3.3.2. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z)$ entonces estudiemos si f es o no biyectiva*

(1) *f es sobreyectiva si tiene solución la ecuación: $f(x, y, z) = (a, b)$, para cada par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = (a,b) &\iff (x+y+z, x+y-z) = (a,b) \\ &\iff \begin{array}{rcl|l} x+y+z &=& a & (i) \\ x+y-z &=& b & (ii) \end{array} \\ &\Longrightarrow \underbrace{z = \frac{a-b}{2}}_{(i)-(ii)} \wedge \underbrace{(x+y) = \frac{a+b}{2}}_{(i)+(ii)} \\ &\Longrightarrow z = \frac{a-b}{2} \wedge y = \frac{a+b}{2} - x \end{aligned}$$

Luego, f es sobreyectiva y

$$f\left(x, \frac{a+b}{2} - x, \frac{a-b}{2}\right) = (a,b) \qquad (*)$$

(2) *f es inyectiva si se verifica la propiedad*

$$\begin{aligned} (x_1,y_1,z_1) \neq (x_2,y_2,z_2) &\implies f(x_1,y_1,z_1) \neq f(x_2,y_2,z_2) \text{ o bien} \\ f(x_1,y_1,z_1) = f(x_2,y_2,z_2) &\implies (x_1,y_1,z_1) = (x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

De acuerdo con la fórmula $(*)$ f no es inyectiva pues, por ejemplo

$$f(1,-1,0) = (0,0) \text{ y } f(2,-2,0) = (0,0), \text{ y } (1,-1,0) \neq (2,-2,0)$$

Así que f no es una biyección.

Definición 3.4. *Sean $f : A \longmapsto B$ y $g : B \longmapsto C$, dos funciones entonces adaptamos la definición de composición de relaciones para funciones poniendo,*

$$(g \circ f) : A \longmapsto C \text{ tal que } (g \circ f)(a) = g(f(a)) \qquad (\forall a; a \in A)$$

La idea aquí es la siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ a & f(a) & g(f(a)) \end{tikzcd}$$

Figura 10: Esquema para $g \circ f$

Lema 3.4.1. *$(g \circ f)$ es una función de A en C.*

En efecto

- *Como f y g son relaciones de A en B y B en C respectivamente, entonces de acuerdo a la definición* **??**, *$g \circ f$ es una relación de A en C*

- *Como f es una función de A en B entonces $dom(f) = A$, es decir para cada $a \in A$, $f(a) \in B$, como también g es una función de B en C entonces $dom(g) = B$, es decir, para cada $b \in B$, $g(b) \in C$, en particular como $f(a) \in B$ entonces $g(f(a)) \in C$. Luego $dom(g \circ f) = A$*

- *Finalmente, supongamos que $(g \circ f)(a) = c_1$ y $(g \circ f)(a) = c_2$, es decir, $g(f(a)) = c_1$ y $g(f(a)) = c_2$ y como g es una función entonces $c_1 = c_2$.*

  Luego, $g \circ f$ es una función.

Ejemplo 3.4.2. *Consideremos las funciones $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}_1[x]$ tal que $f(a,b) = a + bx$ y $g : \mathbb{R}_1[x] \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $g(a_0 + a_1x) = (a_0, a_1)$ entonces para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a,b) &= g(f(a,b)) \\ &= g(a + bx) \\ &= (a,b) \end{aligned}$$

Es decir, aquí vemos que la función $(g \circ f)$ se comporta como la función $1_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & \mathbb{R}_1[x] \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & a+bx & (a,b) \end{tikzcd}$$

Figura 11

Análogamente, podemos componer las funciones

$$\begin{aligned} (f\circ g)(a_0+a_1x) &= f(g(a_0+a_1x)) \\ &= f(a_0,a_1) \\ &= a_0+a_1x \end{aligned}$$

Ahora $f\circ g$ *se comporta como la función* $1_{\mathbb{R}_1[x]}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_1[x] \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}_1[x] \\ a_0+a_1x & (a_0,a_1) & a_0+a_1x \end{tikzcd}$$

Definición 3.5. *Sean* $h_1 : A \longmapsto B$ *y* $h_2 : A \longmapsto B$ *dos funciones. Diremos que* $h_1 = h_2$ *si* $h_1(a) = h_2(a)$ $\forall a; a \in A$

Observación 3.5.1. *Del ejemplo 3.4.2 podemos colegir algunas importantes cuestiones, al momento de querer comparar conjuntos.*

(1) *La función* f *y* g *son biyectivas*

En efecto

- *Si* $f(a,b) = f(c,d)$ *entonces por definición* $a+bx = c+dx$*, luego usando la definición de igualdad de polinomios, tenemos que* $a = c$ *y* $b = d$*, así que*

$$f(a,b) = f(c,d) \implies (a,b) = (c,d)$$

Y por tanto la función f *es inyectiva*

- *Para verificar que* f *es sobreyectiva, aplicamos la técnica, consistente en resolver la ecuación* $f(a,b) = a_0+a_1x$*, para cada polinomio* $a_0+a_1x \in \mathbb{R}_1[x]$

$$\begin{aligned} f(a,b) = a_0+a_1x &\iff a+bx = a_0+a_1x \\ &\iff a+bx = a_0+a_1x \\ &\iff a = a_0 \ \wedge b = a_1 \end{aligned}$$

Así que $f(a_0,a_1) = a_0+a_1x$*, lo que muestra que siempre hay solución para esta ecuación y por eso, que* f *es sobreyectiva, y por ende una biyección*

- *Para ver que g es una biyección procedemos en forma análoga que para f, es decir*

$$\begin{aligned} g(a_0+a_1x)=g(b_0+b_1x) &\Longrightarrow (a_0,a_1)=(b_0,b_1 \\ &\Longrightarrow a_0=b_0 \wedge a_1=b_1 \\ &\Longrightarrow a_0+a_1x=b_0+b_1x \end{aligned}$$

  Así que g es una función inyectiva

  Para ver que g es sobreyectiva nos basta resolver la ecuación $g(a_0+a_1x)=(a,b)$, para cada $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g(a_0+a_1x)=(a,b) &\Longrightarrow (a_0,a_1)=(a,b) \\ &\Longrightarrow a_0=a \wedge a_1=b \end{aligned}$$

  Así que $g(a+bx)=(a,b)$ y g es sobreyectiva y por ende una biyección

(2) *Además $(g\circ f)=1_{\mathbb{R}^2}$ y $(f\circ g)=1_{\mathbb{R}_1[x]}$*

Definición 3.6. *Sea $f:A\longmapsto B$ una función. Diremos que f, es una función invertible o que tiene inversa si existe una función $g:B\longmapsto A$ tal que*

$$\begin{aligned} f\circ g &= 1_B \\ g\circ f &= 1_A \end{aligned}$$

A una tal función la llamamos la inversa de f y la notamos f^{-1}, es decir $g=f^{-1}$

Ejemplo 3.6.1. *Si Consideramos las funciones definidas en el ejemplo* **3.4.2**, *es decir $f:\mathbb{R}^2\longmapsto\mathbb{R}_1[x]$ tal que $f(a,b)=a+bx$ y $g:\mathbb{R}_1[x]\longmapsto\mathbb{R}^2$ tal que $g(a_0+a_1x)=(a_0,a_1)$ entonces $f^{-1}=g$, es decir $f^{-1}(a_0+a_1x)=(a_0,a_1)$.*

Ejemplo 3.6.2. *Sea $T:\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{R}^3$, tal que $T(x,y,z)=(x-y,x+2y+3z,x+y)$ entonces*

- ▶ *T es inyectiva*

  En efecto

  Supongamos que $T(x,y,z)=T(x',y',z')$ entonces

$$\begin{aligned} T(x,y,z)=T(x',y',z') &\Longleftrightarrow (x-y,x+2y+3z,x+y)=(x'-y',x'+2y'+3z',x'+y') \\ &\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{lcl} x-y &=& x'-y' \\ x+2y+3z &=& x'+2y'+3z' \\ x+y &=& x'+y' \end{array}\right| \qquad \circledast \end{aligned}$$

  Sumando a la primera ecuación la tercera ecuación en $\circledast$ tenemos que $x=x'$, sustituyendo este resultado directamente en la tercera ecuación obtenemos $y=y'$, y finalmente reemplazando estos resultados en la segunda ecuación de $\circledast$ tenemos que $z=z'$. Así que $(x,y,z)=(x',y',z')$ y entonces T es inyectiva, es decir

$$\boxed{T(x,y,z)=T(x',y',z') \Longrightarrow (x,y,z)=(x',y',z')}$$

▶ *T es sobreyectiva*

En efecto

Debemos resolver para cada $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$ la ecuación, $T(x,y,z) = (p,q,r)$, o equivalentemente, resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} x - y & = & p \\ x + 2y + 3z & = & q \\ x + y & = & r \end{array}\right| \qquad \circledast$$

Sumando a la primera ecuación la tercera obtenemos que $2x = p + r$, es decir $x = \dfrac{p+r}{2}$. Ahora sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $\dfrac{p+r}{2} - y = p$, es decir que $y = \dfrac{r-p}{2}$, finalmente reemplazando los valores de x y de y en la segunda ecuación se obtiene que $\dfrac{p+r}{2} + 2\left[\dfrac{r-p}{2}\right] + 3z = q$, es decir $z = \dfrac{2q+p-3r}{6}$. Luego la solución encontrada es de la forma

$$T\left(\frac{p+r}{2}, \frac{r-p}{2}, \frac{2q+p-3r}{6}\right) = (p,q,r)$$

Observamos para concluir que dicha solución sólo depende de (p,q,r) lo que garantiza que T es sobreyectiva y además nos permite construir su inversa T^{-1}, definiéndola como:

$$T^{-1}(p,q,r) = \left(\frac{p+r}{2}, \frac{r-p}{2}, \frac{2q+p-3r}{6}\right)$$

Para estar seguros que nuestro trabajo es correcto, aplicamos la definición 3.6

$$\begin{aligned}
(T \circ T^{-1})(p,q,r) &= T((T^{-1}(p,q,r)) \\
&= T\left(\frac{p+r}{2}, \frac{r-p}{2}, \frac{2q+p-3r}{6}\right) \\
&= \left(\frac{p+r}{2} - \frac{r-p}{2}, \frac{p+r}{2} + 2\frac{r-p}{2} + 3\frac{2q+p-3r}{6}, \frac{p+r}{2} + \frac{r-p}{2}\right) \\
&= \left(\frac{p+r}{2} - \frac{r-p}{2}, \frac{p+r}{2} + \frac{2r-2p}{2} + \frac{2q+p-3r}{2}, \frac{p+r}{2} + \frac{r-p}{2}\right) \\
&= (p,q,r)
\end{aligned}$$

Es decir que, $T \circ T^{-1} = 1_{\mathbb{R}^3}$. Un cálculo análogo muestra que $T^{-1} \circ T = 1_{\mathbb{R}^3}$

Observación 3.6.3. *En los ejemplos anteriores, hemos mostrado que es posible para algunas funciones, construir su correspondiente función inversa, pero no tenemos dimensionado el problema de su existencia y su unicidad, para remediar esto tenemos el siguiente resultado*

Teorema 3.7. *Sea $f : A \longmapsto B$ una función entonces son equivalentes las siguientes propiedades:*

(1) *f biyectiva*

(2) *Existe una única función $f^{-1} : B \longmapsto A$ tal que $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$*

Antes de probar este teorema, que de suyo, es una importante herramienta es necesario precisar algunas cosas que será útil conocer:

- *Cuando decimos que estas propiedades son equivalentes estamos queriendo indicar que, "ellas son sinónimos en el lenguaje matemático, por ende podemos usar libremente el uno o el otro según nos parezca conveniente".*

- *Para probar este tipo de proposiciones se procede usualmente de la siguiente forma:*

  - *En primer lugar se prueba según las reglas de la lógica básica que:* $(1) \Longrightarrow (2)$, *en este caso entonces la* **hipótesis** *será* f *biyectiva, y la* **tesis** *sera que: Existe una única función* $f^{-1}: B \longmapsto A$ *tal que* $f^{-1} \circ f = 1_A$ *y* $f \circ f^{-1} = 1_B$

  - *En segundo lugar, procedemos de forma absolutamente análoga al punto anterior para probar que* $(2) \Longrightarrow (1)$, *y así completar la validación del enunciado.*

Demostración

$(1) \Longrightarrow (2)$ *si definimos* $f^{-1}: B \longmapsto A$ *tal que* $f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b$ *entonces*

- *Claramente* $f^{-1} \subset B \times A$, *es decir* f^{-1} *es una relación de* A *en* B.

- *Si* $b \in B$ *entonces como* f *es sobreyectiva existe* $a \in A$ *tal que* $f(a) = b$, *es decir* $f^{-1}(b) = a$, *así que* $B \subset dom(f^{-1})$ *y como* $dom(f^{-1}) \subset B$ *entonces* $dom(f^{-1}) = B$

- *Si* $f^{-1}(b) = a_1$ *y* $f^{-1}(b) = a_2$ *entonces* $f(a_1) = b = f(a_2)$, *como* f *es inyectiva entonces* $a_1 = a_2$ *y podemos concluir que* f^{-1} *es una función*

- *Finalmente, como por definición,* $f(a) = b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a$ *entonces*

$$\left.\begin{array}{rcl} (f^{-1} \circ f)(a) & = & f^{-1}(f(a)) \\ & = & f^{-1}(b) \\ & = & a \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1} \circ f = 1_A$$

  Análogamente

$$\left.\begin{array}{rcl} (f \circ f^{-1}(b)) & = & f(f^{-1}(b)) \\ & = & f(a) \\ & = & b \end{array}\right\} \Longrightarrow f \circ f^{-1} = 1_B$$

El razonamiento anterior muestra que $(1) \Longrightarrow (2)$

Ahora para mostrar que $(2) \Longrightarrow (1)$, *debemos verificar que* f *es biyectiva:*

- *Para ver la inyectividad de* f *observamos que:*

$$\begin{array}{rcl} f(a_1) = f(a_2) & \Longrightarrow & f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2) \\ & \Longrightarrow & (f^{-1} \circ f)(a_1) = (f^{-1} \circ f)(a_2) \\ & \Longrightarrow & 1_A(a_1) = 1_A(a_2) \\ & \Longrightarrow & a_1 = a_2 \end{array}$$

Para la sobreyectividad de f observamos que:

$$\begin{aligned} b \in B &\Longrightarrow f^{-1}(b) = a \in A \\ &\Longrightarrow f(f^{-1}(b)) = f(a) \in B \\ &\Longrightarrow f(a) = b \in B \end{aligned}$$

Luego, $B \subset Img(f)$ y como siempre $Img(f) \subset B$ entonces $Img(f) = B$ y f es sobreyectiva, y por ende biyectiva.

Así que $(2) \Longrightarrow (1)$, y (1) es equivalente a (2).

4. Ejercicios Propuestos de Funciones y sus Propiedades Cualitativas

(1) Sea $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x + 2$. Demuestre que f es inyectiva, pero no sobreyectiva.

(2) Sea $f : \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = 3x - 22$. Demuestre que f es biyectiva

(3) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x$, y $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Demuestre que

   (a) $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ (la identidad de $\mathbb{R}$)

   (b) $g \circ g = 1_{\mathbb{R}}$

   (c) $f \circ g = g \circ f$

(4) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 1$ y $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{2 - 3x}{2}$. Determine, si es posible una función $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $h \circ f = g$

(5) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + c$, para c, un número real fijo. Demuestre que

$$f^n(x) = x + nc \; (\forall n; n \in \mathbb{N}) \qquad (\text{donde, } f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \; (n \text{ veces }) \; \text{y} f^0 = 1_{\mathbb{R}})$$

(6) Sean $f : A \longmapsto B$ y $g : B \longmapsto C$ dos funciones.

   (a) Demuestre que $g \circ f$ inyectiva $\Longrightarrow f$ inyectiva

   (b) Demuestre que $g \circ f$ sobreyectiva $\Longrightarrow g$ sobreyectiva

(7) Considere los conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ y las funciones $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A}$. Demuestre que

$$g \circ f = 1_{\mathbb{A}} \Longrightarrow f \text{ inyectiva y } g \text{ sobreyectiva}$$

(8) Considere los conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ y las funciones biyectivas $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A}$. Demuestre que

$$g = f^{-1} \Longleftrightarrow f = g^{-1}$$

(9) Considere los conjuntos $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ $\mathbb{C}$ y las funciones $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{C}$. Demuestre que

$$f \text{ biyectiva y } g \text{ biyectiva} \Longrightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

(10) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + 2y, x - y)$.

(a) Demuestre que f es biyectiva

(b) Determine f^{-1}

(11) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$ y $H : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que H(x,y)=(-2y,y-2x)

(a) Pruebe que H es una biyección

(b) Pruebe que T es inyectiva

(c) Determine $T \circ H^{-1}$

(12) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (ax + 3y, bx + 2y)$, donde a y b son números reales.

(a) Determine el conjunto $\mathbb{B} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es biyectiva}\}$

(b) Si $(a, b) \in \mathbb{B}$ entonces determine f^{-1}

(13) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, 3z)$

(a) Demuestre que f es una biyección

(b) Determine explícitamente f^{-1}

(14) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (\alpha x + y, x + 3y)$. Determine el conjunto

$$D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid f \text{ es invertible}\}$$

(15) Considere $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = ((1 - a)x + y + z, 2x + (2 - a)y + 2z, x + y + (1 - a)z); \quad (a \in \mathbb{R})$$

Determine los conjuntos:

$S_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid T \text{ no es una biyección}\}$

$S_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid T \text{ es una biyección}\}$

(16) Sean $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dos funciones biyectivas definidas por $y = f(x)$ e $y = g(x)$ respectivamente

(a) Si $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $y = h(x)$ es una función. Demuestre que

$$h \circ f = g \circ f \Longrightarrow h = g$$

(b) Si $H : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $H(x, y) = (f(x), g(y))$. Demuestre que H es biyectiva

(17) Sea $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$.

(a) Demuestre que h no es inyectiva

(b) ¿h es sobreyectiva?

(c) Grafique el conjunto $\mathbb{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x, y, z) = (0, 0)\}$

5. Proyecto de Integración: Relaciones de Equivalencia y Funciones

El punto aquí es inaugurar un espacio, donde podamos fundir ideas de dos o más tópicos para generar nueva información, en este caso, por ser incipiente aún nuestro estudio, no haremos análisis formal de los detalles, pero en compensación trataremos de "agudizar en cuanto podamos nuestra intuición."

Consideremos la función f del ejemplo **3.3.2**, es decir $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x+y+z, x+y-z)$, sabemos que f es sobreyectiva pero no inyectiva, es decir

$$\boxed{\textbf{La ecuación } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \textbf{ tiene más de una solución para cada } (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}}$$

Ya vimos que $f(1, -1, 0) = (0, 0)$ y $f(2, -2, 0) = (0, 0)$, incluso más, $f(x, -x, 0) = (0, 0) \quad (\forall x; x \in \mathbb{R})$ entonces la única forma que esta función fuese inyectiva es que el conjunto

$$f^{-1}(0, 0) \quad = \quad \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

Debería tener "cardinalidad 1", lo que es imposible en condiciones normales, porque sólo de muestra, $(1, -1, 0) \neq (2, -2, 0)$, por tanto, "la cirugía que debemos hacer es mayor"

El problema general es que hay que hacer cirugía reductiva en todos los conjuntos del tipo

$$f^{-1}(a, b) \quad = \quad \left\{\left(x, \frac{a+b}{2} - x, \frac{a-b}{2}\right) \;\mid\; x \in \mathbb{R}\right\} \text{Para cada } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

como son muchos es necesario buscar algún detalle cuantificable que nos permita, aunque sea en teoría, manejarlos con un proceso finito.

(1) Supongamos que tomamos $u \in f^{-1}(a, b)$ y $v \in f^{-1}(a, b)$ tal que $u \neq v$ entonces existen los reales x_1 y x_2 tales que

$$u = \left(x_1, \frac{a+b}{2} - x_1, \frac{a-b}{2}\right) \wedge v = \left(x_2, \frac{a+b}{2} - x_2, \frac{a-b}{2}\right)$$

entonces

$$\boxed{u - v = (x_1 - x_2, -(x_1 - x_2), 0) \in f^{-1}(0, 0)} \qquad (*)$$

(2) Motivados por lo obtenido en $(*)$ y por los resultados del Capitulo de Relaciones definamos en $\mathbb{R}^3$ la relación $\equiv$ como sigue:

$$(x_1, y_1, z_1) \;\equiv\; (x_2, y_2, z_2) \quad \Longleftrightarrow \quad [(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)] \in f^{-1}(0, 0)$$

Deseo que observen que la relación definida encima, significa lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(x_1,y_1,z_1) \equiv (x_2,y_2,z_2) &\iff [(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)] \in f^{-1}(0,0)\\
&\iff (x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2) \in f^{-1}(0,0)\\
&\iff f(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)=(0,0)\\
&\iff (x_1-x_2+y_1-y_2+z_1-z_2, x_1-x_2+y_1-y_2-z_1+z_2)=(0,0)\\
&\iff \left.\begin{array}{rcl} x_1-x_2+y_1-y_2+z_1-z_2 &=& 0\\ x_1-x_2+y_1-y_2-z_1+z_2 &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff z_1=z_2 \ \wedge \ (x_1+y_1)=(x_2+y_2)
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos una definición más operacional para la relación, es decir, para $u=(x_1,y_1,z_1)$ y $v=(x_2,y_2,z_2)$

$$
u \equiv v \iff (x_1+y_1)=(x_2+y_2) \ \wedge \ z_1=z_2 \tag{3}
$$

Entonces la relación definida en (3) es una relación de equivalencia

En efecto

- Si $u=(x,y,z)$ entonces $z=z$ y $x+y=x+y$, entonces de (3) sigue que $(x,y,z)\equiv(x,y,z)$, y $\equiv$ es una relación reflexiva

- Sean $u=(x_1,y_1,z_1)$ y $v=(x_2,y_2,z_2)$ tal que $u\equiv v$ entonces

  $$u\equiv v \ \Leftrightarrow \ (x_1+y_1)=(x_2+y_2) \ \wedge \ z_1=z_2 \Rightarrow (x_2+y_2)=(x_1+y_1) \ \wedge \ z_2=z_1 \Rightarrow v\equiv u$$

  Por tanto, $\equiv$ es una relación simétrica

- Sean $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$ y $w=(x_3,y_3,z_3)$ tal que $u\equiv v \ \wedge \ v\equiv w$ entonces

  $$
  \left.\begin{array}{lcl} u\equiv v &\Leftrightarrow& (x_1+y_1)=(x_2+y_2)\wedge z_1=z_2\\ v\equiv w &\Leftrightarrow& (x_2+y_2)=(x_3+y_3)\wedge z_2=z_3\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\Rightarrow \ (x_1+y_1)=(x_3+y_3)\wedge z_1=z_3\\ \Rightarrow \ u\equiv w\end{array}
  $$

  Luego, $\equiv$ es una relación transitiva, y producto de verificar simultáneamente las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad, es una relación de equivalencia.

- Como consecuencia de los ítemes anteriores, si $u=(x,y,z)$ entonces su clase de equivalencia se caracteriza por definición como sigue

  $$
  \begin{aligned}
  v\in\overline{u} &\iff v=(a,b,c)\wedge u\equiv v\\
  &\iff x+y=a+b\wedge z=c\\
  &\iff b=x+y-a\wedge c=z\\
  &\iff v=(a,x+y-a,z)
  \end{aligned}
  $$

  Por tanto, una clase de equivalencia genérica es de la forma

$$
\boxed{\overline{(x,y,z)} \ = \ \{(a,x+y-a,z)\mid a\in\mathbb{R}\}} \tag{4}
$$

(3) Ahora, debemos entender aún mejor, lo que hemos hecho, a fin de conectar el proceso de relacionar los elementos de esta forma con la función que f que estamos estudiando

- Observando la forma de los elementos del conjunto descrito en (4), podemos concluir que

$$\overline{(x,y,z)} \quad = \quad f^{-1}(x+y+z, x+y-z)$$

En efecto

En primer lugar,

$$\begin{aligned} f(a, x+y-a, z) &= (x+y+z, x+y-z) \Longrightarrow \\ (a, x+y-a, z) &\in f^{-1}(x+y+z, x+y-z),\ (\forall a; a \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \\ \overline{(x,y,z)} &\subset f^{-1}(x+y+z, x+y-z) \end{aligned}$$

En segundo lugar,

$$\begin{aligned} u \in f^{-1}(x+y+z, x+y-z) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge f(u) = (x+y+z, x+y-z) \\ &\iff u = (p,q,r) \wedge f(p,q,r) = (x+y+z, x+y-z) \\ &\iff (p+q+r, p+q-r) = (x+y+z, x+y-z) \\ &\iff \left.\begin{array}{rcl} p+q+r &=& x+y+z \\ p+q-r &=& x+y-z \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow r = z\ \wedge (p+q) = (x+y) \\ &\Longrightarrow u = (p, x+y-p, z) \\ &\Longrightarrow u \in \overline{(x,y,z)} \\ &\Longrightarrow f^{-1}(x+y+z, z+y-z) \subset \overline{(x,y,z)} \end{aligned}$$

Por tanto, efectivamente $f^{-1}(x+y+z, z+y-z) = \overline{(x,y,z)}$

- Ahora vamos a conectar nuestro trabajo definiendo los siguientes comandos básicos

  - $\overline{\mathbb{R}^3} = \left\{\overline{(x,y,z)} \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$ representará al conjunto de clases de equivalencia generadas por la relación de equivalencia $\equiv$.

  - $\pi : \mathbb{R}^3 \longmapsto \overline{\mathbb{R}^3}$ tal que $\pi(x,y,z) = \overline{(x,y,z)}$, será la función proyección

  - $\overline{f} : \overline{\mathbb{R}^3} \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{f}\left(\overline{(x,y,z)}\right) = f(x,y,z)$

  - Finalmente conectamos a través de un diagrama matemático para que el ingenio funcione:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^2 \\ \overline{\mathbb{R}^3} \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

- $\overline{f}$ es una biyección y $\overline{\mathbb{R}^3}$ es comparable con $\mathbb{R}^2$.

  En efecto

  ▶ $\overline{f}$ es sobreyectiva

$$\begin{aligned}
(a,b)\in\mathbb{R}^2 &\Longrightarrow (\exists (x,y,z);(x,y,z)\in\mathbb{R}^3): f(x,y,z)=(a,b) \quad \text{(Pues, } f \text{ es sobreyectiva)}\\
&\Longrightarrow (\exists \overline{(x,y,z)};\overline{(x,y,z)}\in\overline{\mathbb{R}^3}): \overline{f}\ \left(\overline{(x,y,z)}\right)=(a,b)
\end{aligned}$$

  Luego, $\mathbb{R}^2\subset Img\left(\overline{f}\right)$ y entonces $\mathbb{R}^2=Img\left(\overline{f}\right)$. Así que $\overline{f}$ hereda la sobreyectividad de f.

  ▶ $\overline{f}$ es inyectiva. (Aquí debemos concluir que la cirugía funcionó)

$$\begin{aligned}
\overline{f}\ \left(\overline{(x_1,y_1,z_1)}\right)=\overline{f}\ \left(\overline{(x_2,y_2,z_2)}\right) &\Longrightarrow f(x_1,y_1,z_1)=f(x_2,y_2,z_2)\\
&\Longrightarrow (x_1+y_1+z_1,x_1+y_1-z_1)=(x_2+y_2+z_2,x_2+y_2-z_2)\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_1+y_1+z_1 &=& x_2+y_2+z_2\\ x_1+y_1-z_1 &=& x_2+y_2-z_2\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow z_1=z_2\ \wedge\ x_1+y_1=x_2+y_2\\
&\Longrightarrow (x_1,y_1,z_1)\equiv(x_2,y_2,z_2)\\
&\Longrightarrow \overline{(x_1,y_1,z_1)}=\overline{(x_2,y_2,z_2)}
\end{aligned}$$

  Y $\overline{f}$ es inyectiva, y juntando la sobreyectividad es una biyección.

5.1. Ejercicios Propuestos.

(1) Sea $f:\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z)=(x+y,x-y)$.

  (a) Muestre que f es sobreyectiva y no inyectiva
  (b) Si definimos en $\mathbb{R}^3$ la relación $u\Re v\Longleftrightarrow(u-v)\in f^{-1}(0,0)$ entonces demuestre que:

    - $\Re$ es una relación de equivalencia
    - $\overline{(0,0,0)}=f^{-1}(0,0)$

  (c) Muestre que $\overline{f}:\overline{\mathbb{R}^3}\longmapsto\mathbb{R}^2$ tal que $\overline{f}(\overline{u})=f(u)$ es una función biyectiva
  (d) Grafique $\overline{\mathbb{R}^3}$

(2) Sea $h:\mathbb{R}_2[x]\longmapsto\mathbb{R}_1[x]$ tal que $h(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_0-a_1+a_2x$.

  (a) Muestre que h es sobreyectiva y no inyectiva

  (b) Si definimos en $\mathbb{R}^3$ la relación $u\ \Re\ v\Longleftrightarrow(u-v)\in h^{-1}(0,0)$ entonces demuestre que:

    - $\Re$ es una relación de equivalencia

    - $\overline{(0,0,0)}=h^{-1}(0,0)$

  (c) Muestre que $\overline{h}:\overline{\mathbb{R}_2[x]}\longmapsto\mathbb{R}_1[x]$ tal que $\overline{h}(\overline{p(x)})=h(u)$ es una función biyectiva

(3) Sea $f : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n$ tal que $n < m$ una función sobreyectiva

(a) Si definimos en $\mathbb{R}^m$ la relación $u\,\Re\, v \Longleftrightarrow (u-v) \in f^{-1}(0_{\mathbb{R}^n})$ entonces demuestre que:

- $\Re$ es una relación de equivalencia
- $\overline{0_{\mathbb{R}^m}} = f^{-1}(0_{\mathbb{R}^n})$

(b) Muestre que $\overline{f} : \overline{\mathbb{R}^m} \longmapsto \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{f}(\overline{u}) = f(u)$ es una función biyectiva

6. Proyecto Colaborativo: Construcción del Gráfico de Algunas Funciones

El punto aquí es inaugurar un espacio, donde podamos fundir ideas de dos o más ramas de la matemática para generar nueva información, para mejorar el estudio y comprensión de un tópico.

6.1. Caso de la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Dada la relación real $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$, determinaremos en primera instancia las condiciones para que f se transforme en una función real a valores reales, posteriormente graficaremos su comportamiento y finalmente intentaremos deducir alguna propiedad en lo posible generalizable a otros casos.

♦ Partamos determinando el dominio de f.

$x \in dom(f) \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\wedge\; f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\wedge\; \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\wedge\; x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Así que $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

♦ Determinemos la imagen de f.

$y \in img(f) \Longleftrightarrow y = f(x)$ para x $\in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y = \dfrac{1}{x} : \; x \neq 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{y} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow y \neq 0$

Así que $Img(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, y la función f es la siguiente

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longmapsto \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } x \in \mathbb{R} - \{0\} \longmapsto y = f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

♦ f es una función biyectiva

En efecto

- $$\left.(f \circ f)(x) \;=\; f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = x \right\} \Longrightarrow (f \circ f) = 1_{\mathbb{R}-\{0\}} \Longrightarrow f^{-1} = f$$

Así que, de acuerdo al teorema 3.7, f es biyectiva.

♦ Determinemos el gráfico de f.

- $P \in graf(f) \Longleftrightarrow P = (x, f(x)) \quad \wedge \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \Longleftrightarrow P = \left(x, \dfrac{1}{x}\right) \quad \wedge \quad x \neq 0$
- Analicemos los puntos del gráfico buscando regularidades:

$$
\begin{array}{rcllc}
f(10^1) & = & 0.1 & \Longrightarrow & (10^1, 0.1) \in graf(f) \\
f(10^2) & = & 0.01 & \Longrightarrow & (10^2, 0.01) \in graf(f) \\
f(10^3) & = & 0.001 & \Longrightarrow & (10^3, 0.001) \in graf(f) \\
f(10^4) & = & 0.0001 & \Longrightarrow & (10^4, 0.0001) \in graf(f) \\
 & & & & \\
\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 & & & & \\
f(10^n) & = & 0.\underbrace{0\cdots0}_{n-1}1 & \Longrightarrow & (10^n, 0.0\cdots01) \in graf(f)
\end{array}
$$

• Si notamos $a \mapsto +\infty$ cuando a es "grande, grande y positivo" y $b \mapsto 0^+$ cuando b "pequeño, pequeño y positivo" entonces

$$\mathbf{x \mapsto +\infty \Longrightarrow f(x) \mapsto 0^+;}$$

$$\mathbf{x \mapsto 0^+ \Longrightarrow f(x) \mapsto +\infty}$$

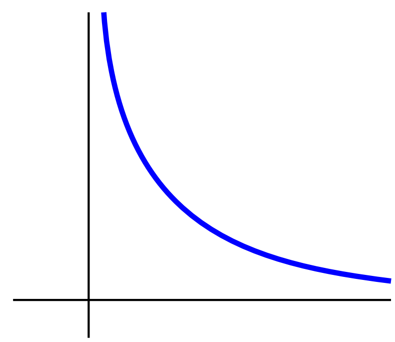

Figura 12: $y = \dfrac{1}{x}; \quad x > 0$

• Análogamente, si notamos $a \mapsto -\infty$ cuando a es "pequeño, pequeño y negativo" y $b \mapsto 0^-$ cuando b "grande, grande y negativo" entonces

$$\mathbf{x \mapsto -\infty \Longrightarrow f(x) \mapsto 0^-;}$$

$$\mathbf{x \mapsto 0^- \Longrightarrow f(x) \mapsto -\infty}$$

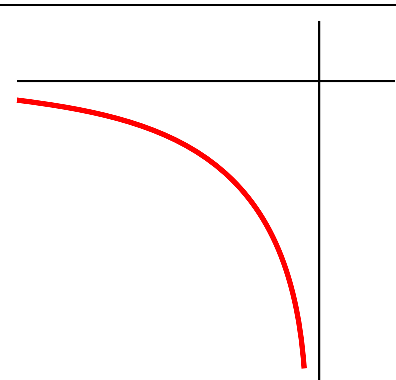

Figura 13: $y = \dfrac{1}{x}; \quad x < 0$

- Finalmente si juntamos ambas informaciones obtenemos que, su comportamiento gráfico es:

$$\mathbf{x \mapsto +\infty \Longrightarrow f(x) \mapsto 0^+;}$$

$$\mathbf{x \mapsto 0^+ \Longrightarrow f(x) \mapsto +\infty}$$

$$\mathbf{x \mapsto -\infty \Longrightarrow f(x) \mapsto 0^-;}$$
$$\mathbf{x \mapsto 0^- \Longrightarrow f(x) \mapsto -\infty}$$

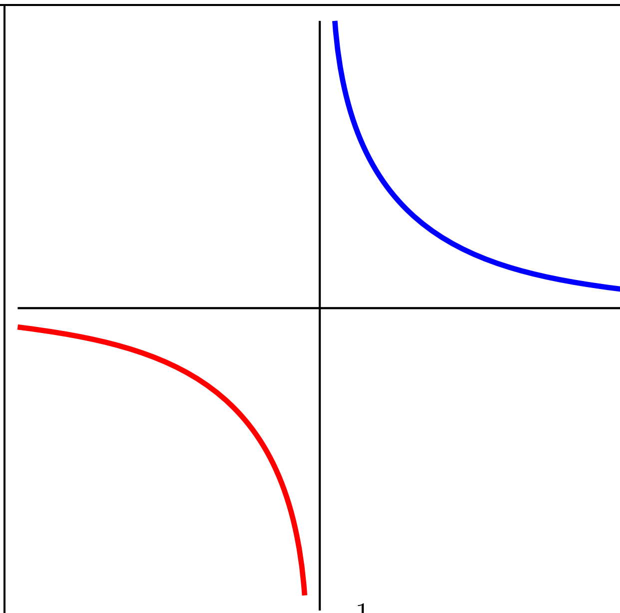

Figura 14: $y = \dfrac{1}{x}; \quad x \neq 0$

Aplicación 6.1.1. *Si definimos* $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$; *con* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *y no ambos nulos entonces la idea es aprovechar lo que hemos aprendido en el punto* **6.1**, *para estudiar este caso.*

(1) *Si* $a = 0$ *entonces* $f(x) = \dfrac{1}{b}$ *con* $b \neq 0$, *(según las hipótesis que hemos puesto) entonces*

- *Como* $f(x) = \dfrac{1}{b} \in \mathbb{R}, \quad (\forall x; x \in \mathbb{R})$, *sigue que* $dom(f) = \mathbb{R}$ *e* $Img(f) = \left\{\dfrac{1}{b}\right\}$. *En estas condiciones la función* f *se encuadra en las llamadas funciones constantes*

- *Como* $graf(f) = \left\{\left(x, \dfrac{1}{b}\right) \mid b \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$ *entonces los posibles gráficos son:*

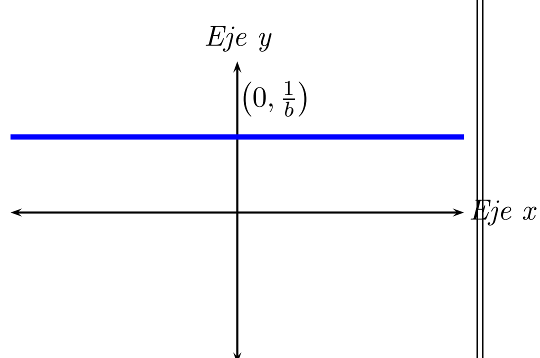

Figura 15: $y = \dfrac{1}{b}; \quad b > 0$

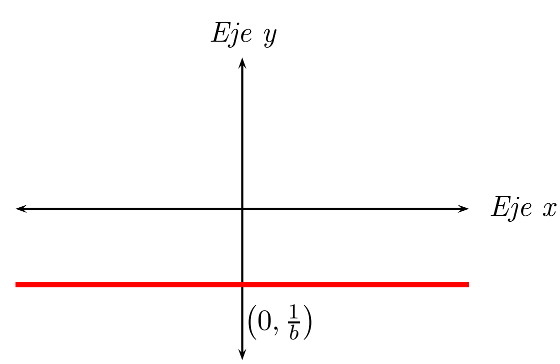

Figura 16: $y = \dfrac{1}{b}; \quad b < 0$

(2) *Si* $a \neq 0$ *entonces* $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$

- *Como* $f(x) = \dfrac{1}{ax+b} \in \mathbb{R}, \Longleftrightarrow ax+b \neq 0$, *sigue que* $dom(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
- *Para calcular la imagen observamos que*

$$\begin{aligned} y \in Img(f) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\exists x; x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}\right) : y = \frac{1}{ax+b} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\exists x; x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}\right) : y(ax+b) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\exists x; x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}\right) : x = \frac{1}{ay} - \frac{b}{a} \\ &\Longleftrightarrow \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto $Img(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- *Como* $graf(f) = \left\{\left(x, \dfrac{1}{ax+b}\right) \mid x \neq -\dfrac{b}{a}\right\}$ *entonces los posibles gráficos son:*

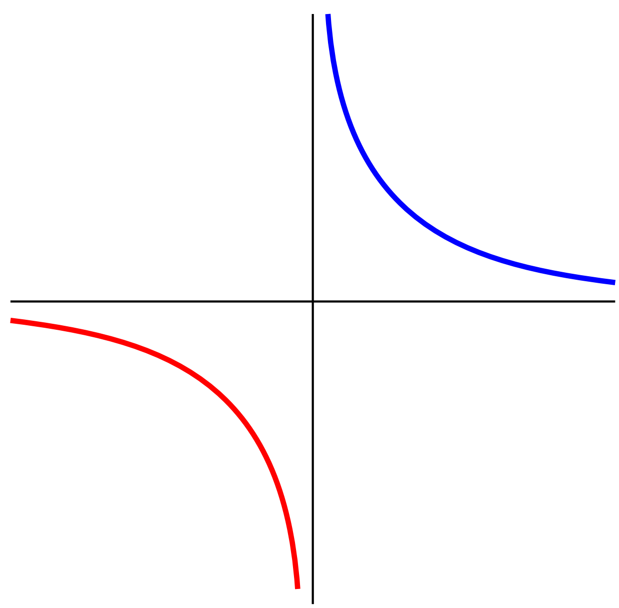

Figura 17: $y = \dfrac{1}{ax}; \quad b = 0 \wedge a > 0$

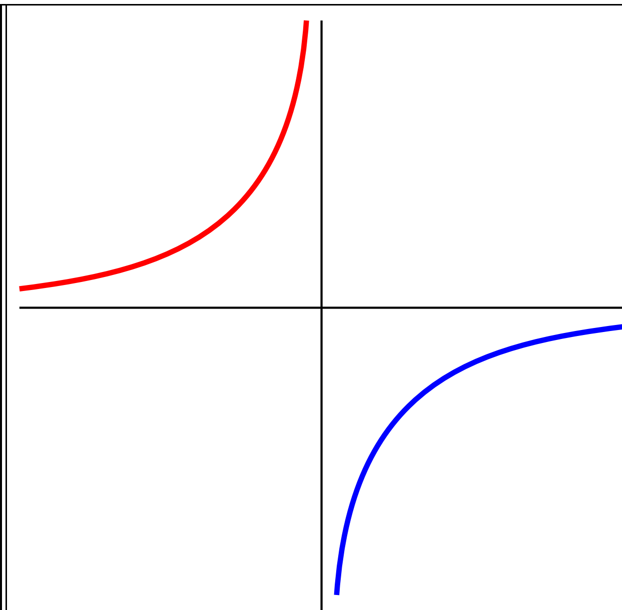

Figura 18: $y = \dfrac{1}{ax}; \quad b = 0 \wedge a < 0$

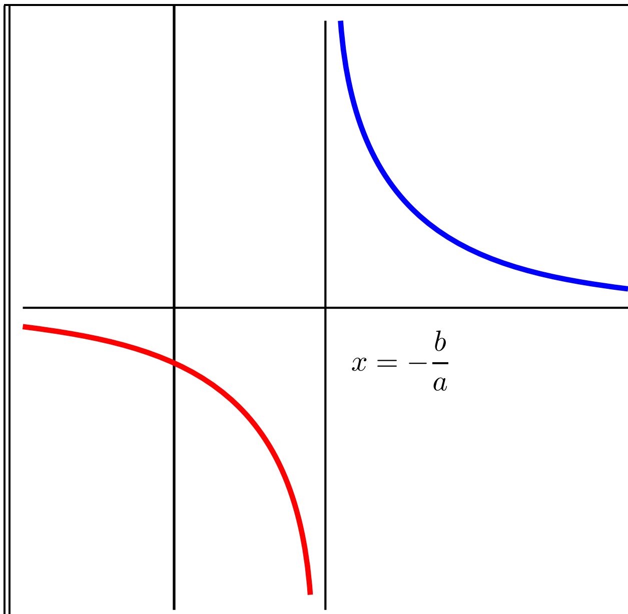

Figura 19: $y = \dfrac{1}{ax+b}; \quad b < 0 \wedge a > 0$

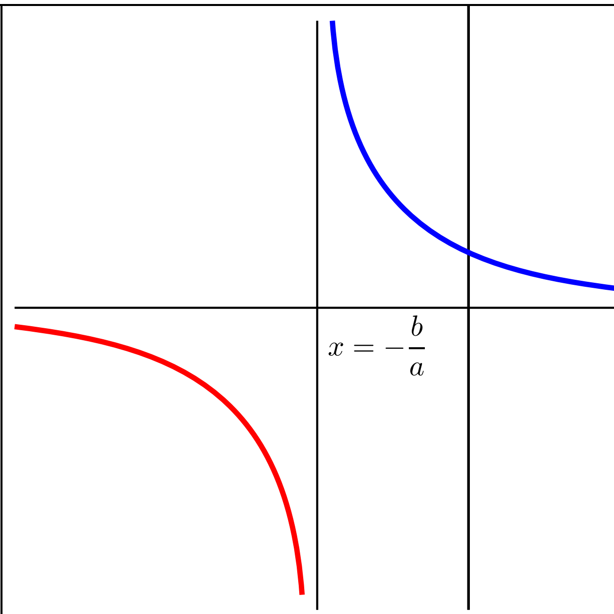

Figura 20: $y = \dfrac{1}{ax+b}; \quad b > 0 \wedge a > 0$

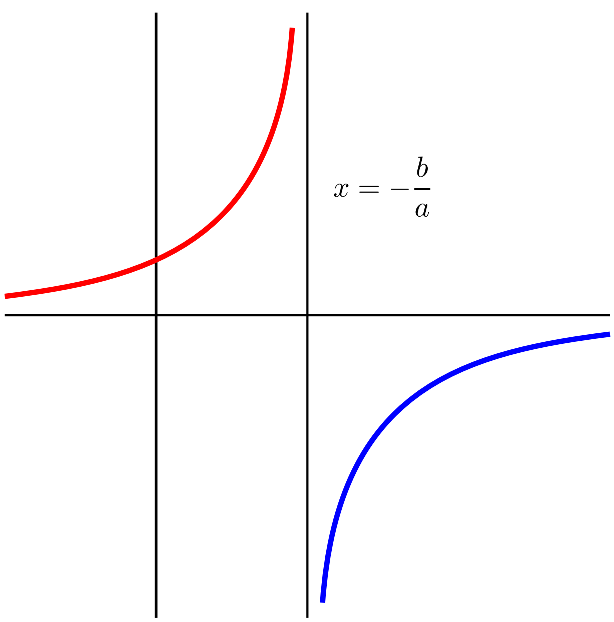

Figura 21: $y = \dfrac{1}{ax+b}; \quad b > 0 \wedge a < 0$

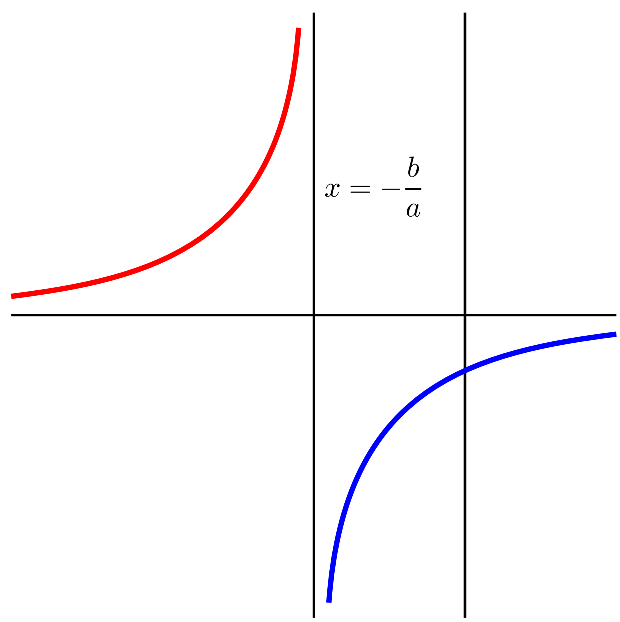

Figura 22: $y = \dfrac{1}{ax+b}; \quad b < 0 \wedge a < 0$

Aplicación 6.1.2. *Si ahora, definimos* $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}+c$; *con* $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, *no ambos nulos y* $c\in\mathbb{R}$ *entonces podemos calcular en forma semejante al caso anterior.*

En efecto

Si $a\neq 0$ *entonces* $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}+c$

- *Como* $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}+c\in\mathbb{R},\Longleftrightarrow ax+b\neq 0$, *sigue que* $dom(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
- *Para calcular la imagen observamos que*

$$\begin{aligned}
y\in Img(f) &\Longleftrightarrow \left(\exists x; x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{b}{a}\right\}\right): y=\frac{1}{ax+b}+c\\
&\Longleftrightarrow \left(\exists x; x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{b}{a}\right\}\right): (y-c)(ax+b)=1\\
&\Longleftrightarrow \left(\exists x; x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{b}{a}\right\}\right): x=\frac{1}{a(y-c)}-\frac{b}{a}\\
&\Longleftrightarrow y\neq c
\end{aligned}$$

Por tanto $Img(f)=\mathbb{R}-\{c\}$

- *Como* $graf(f)=\left\{\left(x,\dfrac{1}{ax+b}+c\right)\mid x\neq -\dfrac{b}{a}\ e\ y\neq c\right\}$ *entonces algunos de los posibles gráficos son:*

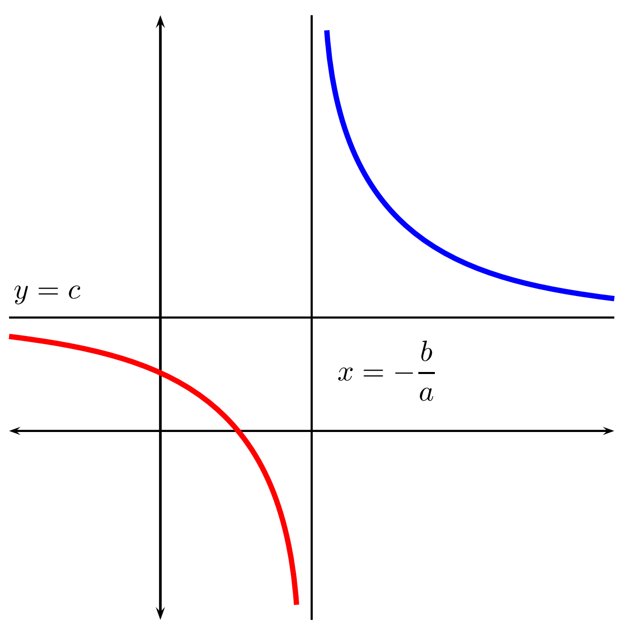

Figura 23: $y=\dfrac{1}{ax+b}+c;\quad b<0\quad a>0;\quad c>0$

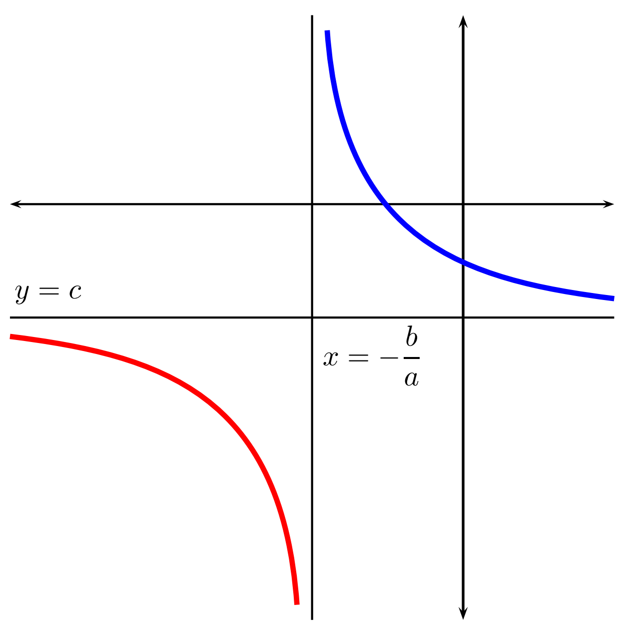

Figura 24: $y=\dfrac{1}{ax+b}+c;\quad b>0;\quad a>0;\quad c<0$

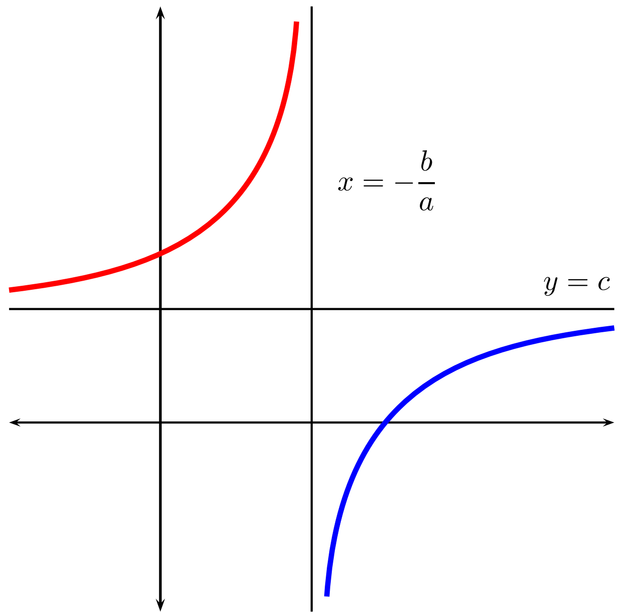

Figura 25: $y = \dfrac{1}{ax+b} + c;\ \ b > 0;\quad a < 0;\ \ c > 0$

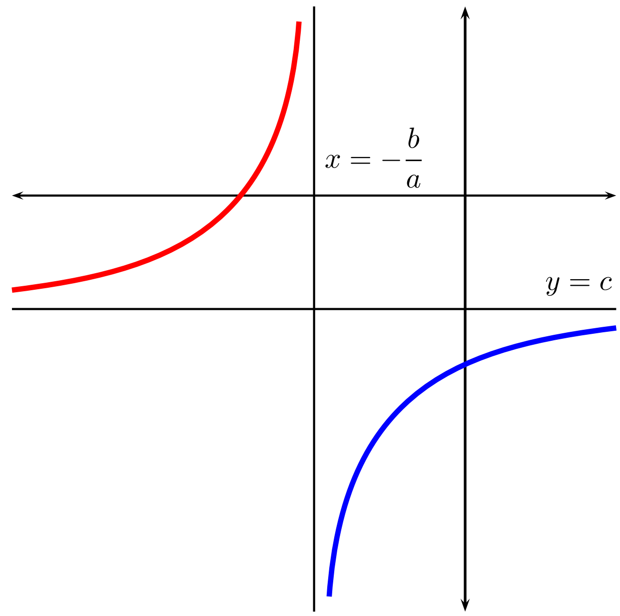

Figura 26: $y = \dfrac{1}{ax+b} + c;\ \ b < 0;\quad a < 0;\ \ c < 0$

Aplicación 6.1.3. *Para concluir esta primera clase de aplicaciones definiremos* $f(x) = \dfrac{cx+d}{ax+b}$*; con* $a \in \mathbb{R}$*,* $b \in \mathbb{R}$*,* $c \in \mathbb{R}$ *y* $d \in \mathbb{R}$*, no ambos nulos entonces intentaremos aplicar nuestras técnicas para analizar esta función.*

(1) Observamos que $\partial(ax+b) = \partial(cx+d) = 1$, así que procedemos efectuar la división de polinomios de grado 1, aplicando la división usual de polinomios:

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad cx+d \ :\ ax+b \ = \dfrac{c}{a} \\ -\ \ cx + \dfrac{bc}{a} \\ \hline \quad d - \dfrac{bc}{a} \end{array}} \ \boxed{\Longleftrightarrow}\ \boxed{\dfrac{cx+d}{ax+b} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{d - \dfrac{bc}{a}}{ax+b}} \qquad (\circledast)$$

(2) Si en $(\circledast)$ hacemos $p = \dfrac{c}{a}$ y $q = d - \dfrac{bc}{a}$ entonces tenemos que $(\circledast)$ se transforma en:

$$f(x) = \frac{cx+d}{ax+b} \quad = \quad p + \frac{q}{ax+b} = p + q\left(\frac{1}{ax+b}\right) \qquad (\circledast\circledast)$$

Así que podemos aplicar lo estudiado $(\circledast\circledast)$, y tenemos entonces algunos de los posibles casos:

- ♦ Caso 1: Si $p > 0;\ a > 0;\ b < 0;\ q > 0$ entonces su gráfico es del tipo presentado en la Figura 23
- ♦ Caso 2: Si $p < 0;\ a > 0;\ b < 0;\ q < 0$ entonces su gráfico es del tipo presentado en la Figura 24
- ♦ Caso 3: Si $p > 0;\ a > 0;\ b < 0;\ q < 0$ entonces su gráfico es del tipo presentado en la Figura 25
- ♦ Caso 4: Si $p < 0;\ a < 0;\ b < 0;\ q < 0$ entonces su gráfico es del tipo presentado en la Figura 26

Ejemplo 6.1.4. *Si* $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ *entonces aplicando nuestro proceso de división obtenemos que:*

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

- ♦ *Así que* $dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- ♦ *E,* $Img(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- ♦ *Su gráfico es una variante de la Figura* 23*, más precisamente*

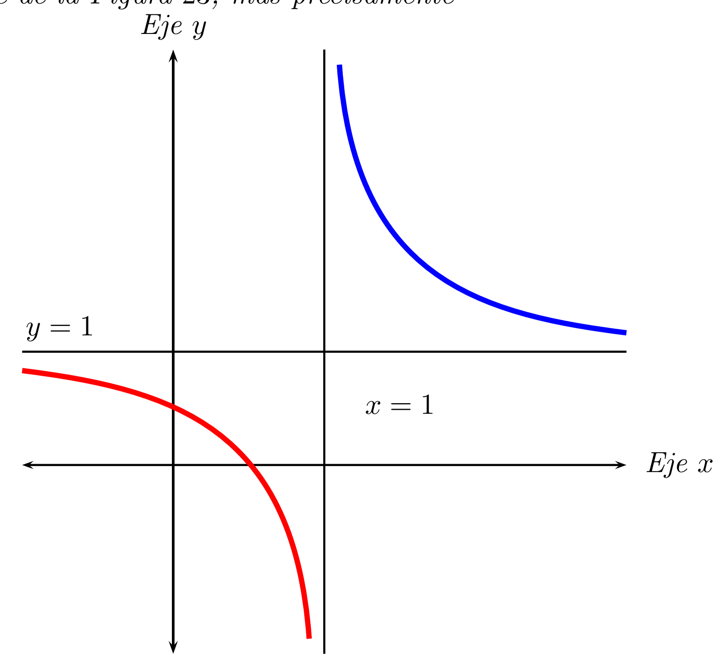

Figura 27: $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

6.1.5. Ejercicios Propuestos de Funciones cuyo Gráfico envuelve a $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

(1) Si $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ entonces determine:

(a) $dom(f)$

(b) $Img(f)$

(c) $gra(f)$

(2) Si $f(x)=\dfrac{1}{-3x}$ entonces determine:

(a) $dom(f)$

(b) $Img(f)$

(c) $gra(f)$

(3) Si $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ entonces determine:

(a) $dom(f)$

(b) $Img(f)$

(c) $gra(f)$

(4) Si $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ entonces determine:

(a) $dom(f)$

(b) $Img(f)$

(c) $gra(f)$

(5) Si $f(x)=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$ entonces determine:

(a) $dom(f)$

(b) $Img(f)$

(c) $gra(f)$

(6) Si $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(5-x)}$ entonces determine:

(a) $dom(f)$

(b) $Img(f)$

(c) $graf(f)$

(7) Si $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ entonces determine:

(a) $dom(f)$

(b) $Img(f)$

(c) $graf(f)$

6.2. Caso de las función parábola canónica $\mathbf{P(x) = ax^2}$, $\mathbf{a \in \mathbb{R}}$.

♦ Para determinar el dominio de la función P observamos, según nuestra técnica que:

$$\begin{aligned} x \in dom(P) &\iff x \in \mathbb{R} \wedge P(x) \in \mathbb{R} \iff x \in \mathbb{R} \wedge ax^2 \in \mathbb{R} \\ &\iff x \in \mathbb{R} \qquad (\text{ Pues, } ax^2 \in \mathbb{R}\ \forall x; x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

luego, $dom(P) = \mathbb{R}$

♦ Para determinar la $Img(P)$, procedemos según nuestro proceso, es decir:

$$Img(P) = \{P(x) | x \in \mathbb{R}\} = \{ax^2 | x \in \mathbb{R}\}$$

Así que, para la función P tenemos: $\begin{array}{cccc} P : & \mathbb{R} & \longmapsto & \{ax^2 | x \in \mathbb{R}\} \\ & x & \longmapsto & ax^2 \end{array}$

♦ Para su gráfico $graf(P) = \{(x, ax^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ encontramos las siguientes opciones:

- Si $a = 0$ entonces el gráfico es $graf(P) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} =$ Eje x

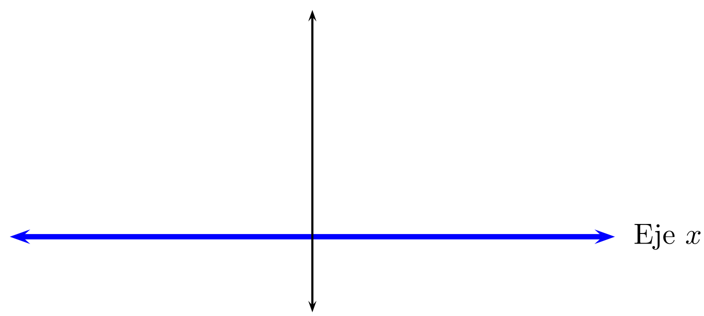

Figura 28: $y = 0$

- Si $a \neq 0$ entonces podemos hacer el siguiente análisis:
  - $x^2 \geq 0$, pues $(-x)^2 = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$
  - $a > 0 \Longrightarrow ax^2 \geq 0$ y
  - $a < 0 \Longrightarrow ax^2 \leq 0$

  Luego, los posibles gráficos son del tipo:

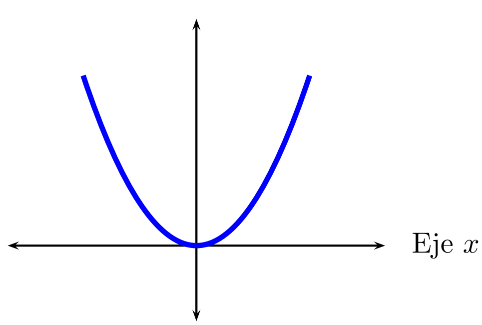

Figura 29: $y = ax^2, \quad a > 0$

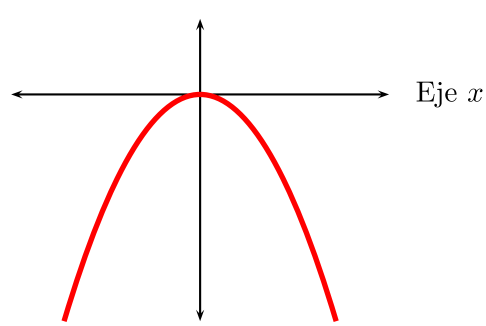

Figura 30: $y = ax^2, \quad a < 0$

Aplicación 6.2.1. *Si definimos $f(x) = a(x+h)^2$ para $a \neq 0$ y $h \in \mathbb{R}$ entonces para usar la información generada en (6.2), podemos hacer lo siguiente:*

- *Si llamamos a $u = x + h$ entonces $f(u) = au^2$, que ya se parece al caso original.*

- *Ahora $x = 0 \Longrightarrow u = h$ así que el nuevo "eje x" es $x = h$ y el origen correspondiente es $(h, 0)$. Es decir tenemos según el valor de h, los siguientes casos:*

  - $a > 0 \ \wedge \ h \in \mathbb{R}$

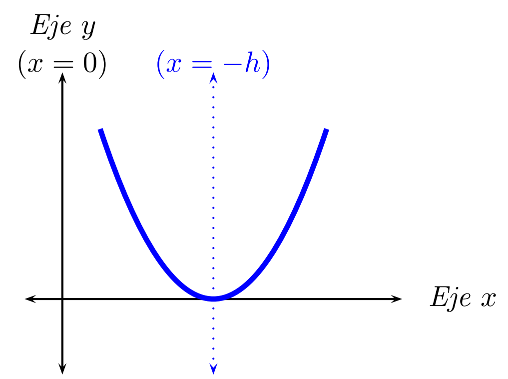

Figura 31: $y = a(x+h)^2,\ a > 0;\ h \leq 0$

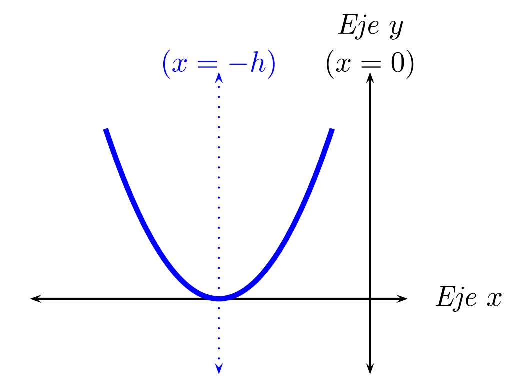

Figura 32: $y = a(x+h)^2,\ a > 0;\ h > 0$

  - $a < 0 \ \wedge \ h \in \mathbb{R}$

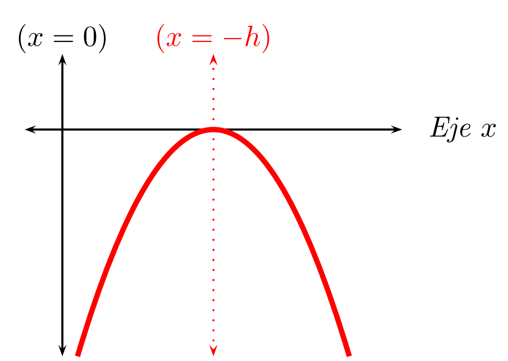

Figura 33: $y = a(x+h)^2,\ a < 0;\ h \leq 0$

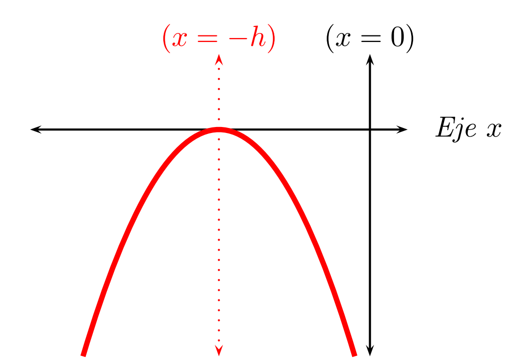

Figura 34: $y = a(x+h)^2,\ a < 0;\ h > 0$

Aplicación 6.2.2. *Si definimos ahora, $g(x) = ax^2 + k$ para $a \neq 0$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces para usar la información generada en (6.2), podemos hacer lo siguiente:*

- *En este caso, $x = 0 \Longrightarrow g(0) = k$ así que el nuevo "eje y" es $y = k$ y el origen correspondiente es $(0, k)$. Es decir tenemos según el valor de k, los siguientes casos:*

  - $a > 0 \ \wedge \ k \in \mathbb{R}$

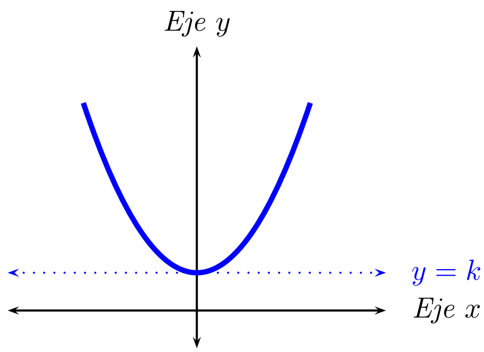

Figura 35: $y = ax^2 + k,\ a > 0;\ k \geq 0$

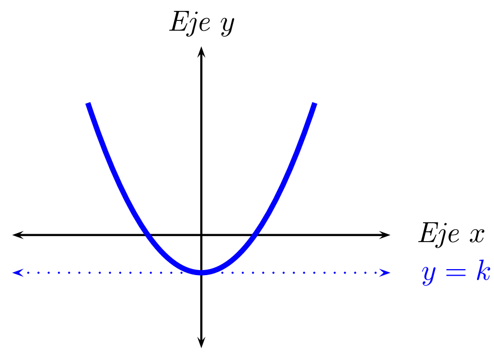

Figura 36: $y = ax^2 + k,\ a > 0;\ k < 0$

- $a < 0\ \wedge\ h \in \mathbb{R}$

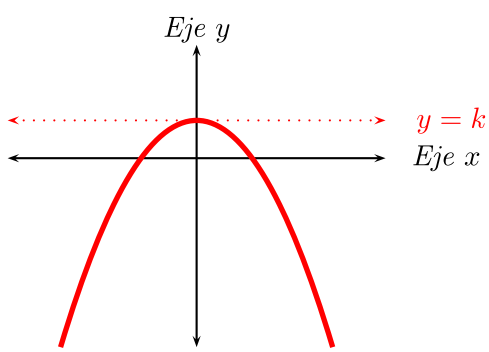

Figura 37: $y = ax^2 + k,\ a < 0;\ k \geq 0$

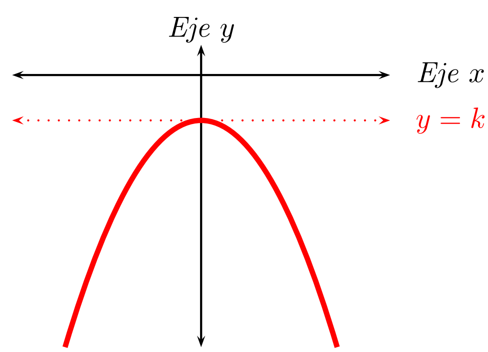

Figura 38: $y = ax^2 + k,\ a < 0;\ k < 0$

Aplicación 6.2.3. *Si $q(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces para aplicar lo aprendido a esta función podemos hacer lo siguiente:*

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)
\end{aligned}
$$

Luego, la función se representa como:

$$\boxed{q(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)}$$

Para compatibilizar con nuestras técnicas notemos, $h=\dfrac{b}{2a}$ *y* $k=\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$*, y de paso obtengamos algunas conclusiones útiles para identificar el gráfico de la función:*

♦ $q\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\Longrightarrow\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\in graf(q)$

♦ *Como,* $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=q(x)-\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *y* $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ *entonces, ya sabemos que tenemos dos casos según el "signo de a"*

- $a>0\Longrightarrow q(x)-\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\geq 0\Longrightarrow q(x)\geq\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\quad(\forall x;x\in dom(q))$

De donde sigue que, $k=\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *es el valor mínimo alcanzado por la imagen de la función q, en el "Eje* $x=-\dfrac{b}{2a}$*" y el punto* $V=\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *es un punto mínimo del gráfico de q*

- $a<0\Longrightarrow q(x)-\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\leq 0\Longrightarrow q(x)\leq\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\quad(\forall x;x\in dom(q))$

Aquí, $k=\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *es el valor máximo alcanzado por la imagen de la función q, en el "Eje* $x=-\dfrac{b}{2a}$*" y el punto* $V=\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *es un punto máximo del gráfico de q*

♦ *Si* $x_0\in\mathbb{R}$ *y* $x_1\in\mathbb{R}$ *tal que* $x_1-\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\left(-\dfrac{b}{2a}\right)-x_0$ *entonces*

$$\begin{aligned}
q(x_0) &= a\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)\\
&= a\left(-x_1-\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)\\
&= a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)\\
&= q(x_1)
\end{aligned}$$

♦ *Después de este análisis, podemos asignar nombres y notaciones:*

- *Al punto* $V=\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *lo llamaremos el vértice de la parábola*

- *La recta* $x = -\dfrac{b}{2a}$ *la llamaremos el eje de Simetría de la parábola*
- $q(x) = ax^2 + bx + c$ *con* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *La llamaremos Función Cuadrática.*

♦ *Finalmente, podemos decidir el comportamiento gráfico de la función a través exclusivamente de los coeficientes, a, b y c.*

- *En primer lugar, para la imagen tenemos:*

$$\begin{aligned}
y \in Img(q) &\iff q(x) = y \quad (\text{para algún } x \in \mathbb{R}) \\
&\iff y = ax^2 + bx + c \\
&\iff ax^2 + bx + (c - y) = 0 \\
&\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \\
&\iff b^2 - 4a(c - y) \geq 0 \\
&\iff b^2 \geq 4a(c - y) \\
&\iff b^2 \geq 4ac - 4ay \\
&\iff 4ay \geq 4ac - b^2 \\
&\iff ay \geq \frac{4ac - b^2}{4}
\end{aligned}$$

Así que tenemos dos casos posibles para la imagen de q:

$$Img(q) = \begin{cases} \left\{ q(x) \in \mathbb{R} \mid q(x) \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a} \right\} : & si\ a > 0 \\ \vee & \\ \left\{ q(x) \in \mathbb{R} \mid q(x) \leq \dfrac{4ac - b^2}{4a} \right\} : & si\ a < 0 \end{cases}$$

♦ *En particular, como* $ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Podemos concluir que:

- *Si* $b^2 - 4ac \geq 0$ *entonces la parábola intersecta al eje x en a lo más dos puntos a saber:*
  - $b^2 - 4ac > 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
  - $b^2 - 4ac = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$
- *Si* $b^2 - 4ac < 0$ *entonces la parábola no intersecta al eje x.*

♦ *En resumen los gráficos posibles para una función cuadrática son:*

- $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) > 0$

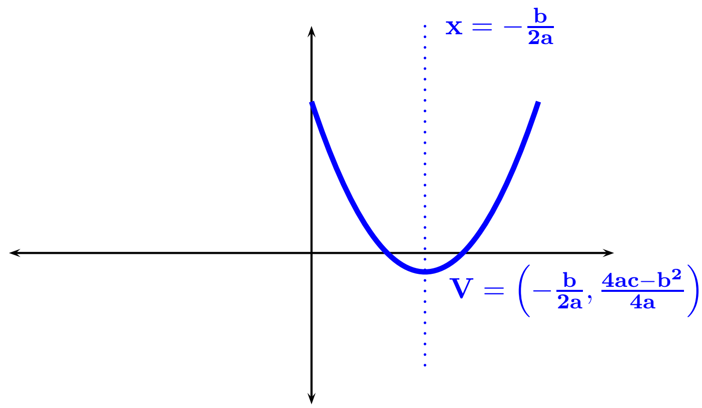

Figura 39

- $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) = 0$

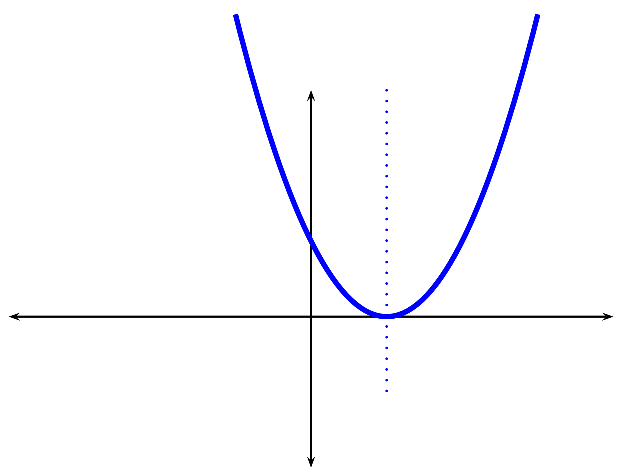

Figura 40

- $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

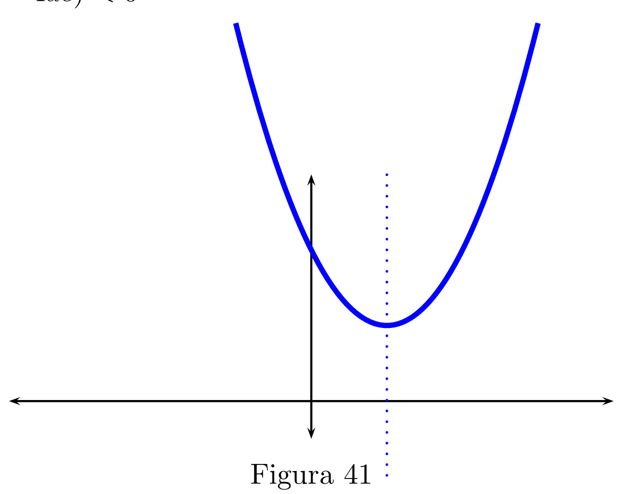

Figura 41

6.2.4. Ejercicios Propuestos de Funciones cuyo Gráfico envuelve a $\mathbf{q(x) = ax^2 + bx + c}$.

(1) Determine Dominio, imagen, vértice, eje de simetría, Intersecciones con el eje x, con el eje y, y gráfico de las siguientes funciones cuadráticas.

- $q(x) = x^2 + 2x + 1$
- $q(x) = x^2 + 2x - 1$
- $q(x) = x^2 + x + 1$
- $q(x) = (x - 1)(x - 3)$

(2) Grafique las siguiente funciones.

- $f(x) = x^4 + 2x^2 + x; \quad (x \in \mathbb{R})$
- $h(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}; \quad (x \leq 0)$
- $h(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}; \quad (x \geq 0)$
- $h(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}; \quad (x \in \mathbb{R})$
- $g(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x + 2}$
- $p(x) = 6(x - 4)^3 + 7(x - 4)^2 - 3(x - 4)$

(3) Si $q : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $q(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática. Determine los siguientes conjuntos

- $S = \{q \mid q(0) = 0\}$
- $S = \{q \mid q(-1) = 1\}$
- $S = \{q \mid q(0) = 0 \wedge q(1) = 1\}$

(4) Si $q_1(x) = x^2 + 1$ y $q_2(x) = 3 - 2x^2$.

- Determine el conjunto $graf(q_1) \cap graf(q_2)$
- Determine la región del plano encerrada por los gráficos de q_1 y q_2 respectivamente.

(5) Si $q(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática con vértice $V = (h, k)$. Demuestre que

$$V \in \text{Eje } y \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0$$

(6) Considere las funciones $l : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $l(x) = bx + c$ con $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, y la función cuadrática $q : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $q(x) = ax^2$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad graf(l) \cap graf(q)$$

7. Situaciones de Desempeño: Funciones

7.1. El objetivo de esta sección es presentar al Estudiante "Situaciones Problemáticas" que le permitan:

(♣) Estimular la comprensión de lectura en problemas matemáticos.

(♣) Clasificar después de leer el problema, entre información y resultado pedido.

(♣) Estimular el uso de una sintaxis adecuada en la resolución de problemas que envuelven conceptos matemáticos.

(♣) Aprender a generar un algoritmo eficaz (ojalá eficiente), para responder al problema planteado.

(♣) Verificar el estado de aprendizaje de los contenidos específicamente relacionados con las propiedades básicas que debe conocer, y "en lo posible haber aprehendido" de los tópicos analizados.

7.2. Algunas sugerencias para enfrentar las situaciones problemáticas son las siguientes:

($\star$) Lea cuidadosamente el problema.

($\star$) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

($\star$) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos matemáticos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor!!! Este acto nunca esta de más.

($\star$) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

7.3. Situaciones de Desempeño Propuestas:

(1) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, tal que $T(a, b, c) = ax^2 + cx - b$

   (a) Demuestre que T es biyectiva.

   (b) Determine T^{-1}.

(2) Sea $h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 - a_1 + a_2)x + a_2x^2$.

   (a) Demuestre que h es biyectiva

   (b) Determine h^{-1}

(3) Sea $\mathbb{R}_2[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid \partial(p(x)) \leq 2\}$ el conjunto de polinomios reales de grado menor o igual que 2. Si definimos la función.

$$h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}^3 \text{ tal que } h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + \lambda a_1 - a_2, a_0 - a_1 + \lambda a_2, a_0 + a_1 + a_2)$$

entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ es biyectiva}\}$$

(4) Considere la función $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h(x, y, z) = (\lambda x + y + z, x + \lambda y + z)$. Si llamamos $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ inyectiva}\}$. Demuestre que $\mathbb{S} = \emptyset$

(5) Si $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Demuestre que

$$ad - bc \neq 0 \implies f \text{ inyectiva}$$

(6) Considere las funciones $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{C}$. demuestre que:

$$f \text{ biyectiva } \wedge\ g \text{ biyectiva } \Longrightarrow g \circ f \text{ biyectiva}$$

(7) Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ una función

(a) Si existe $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A}$ tal que $(g \circ f)(a) = a \quad (\forall a; a \in A)$ entonces demuestre que f es inyectiva

(b) Si existe $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A}$ tal que $(f \circ g)(b) = b \quad (\forall b; b \in B)$ entonces demuestre que f es sobreyectiva

8. Solución de Situaciones de Desempeño: funciones

(1) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a, b, c) = ax^2 + cx - b$

(a) Demuestre que T es biyectiva.

Solución

Etapa 1. T es Inyectiva, pues si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ y $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned} T(a,b,c) = T(a_0,b_0,c_0)ax^2 + cx - b &\iff ax^2 + cx - b = a_0x^2 + c_0x - b_0 \\ &\Longrightarrow (a = a_0)\ \wedge\ (b = b_0)\ \wedge\ (c = c_0) \\ &\Longrightarrow (a, b, c) = (a_0, b_0, c_0) \end{aligned}$$

Etapa 2. Para que T sea sobreyectiva, debemos mostrar que Img $(T) = \mathbb{R}_2[x]$, pero como T es función entonces Img$(T) \subset \mathbb{R}_2[x]$. Así que sólo resta mostrar que $\mathbb{R}_2[x] \subset$ Img(T).

Para ello debemos resolver en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $T(p, q, r) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$\begin{aligned} T(p,q,r) = ax^2 + bx + c &\iff px^2 + rx - q = ax^2 + bx + c \\ &\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} p &=& a \\ r &=& b \\ q &=& -c \end{array}\right| \end{aligned}$$

Luego $T(p, q, r) = T(a, -c, b) = ax^2 + bx + c$, y entonces $\mathbb{R}_2[x] \subset Imag(T) \subset \mathbb{R}_2[x]$.

(b) Determine T^{-1}.

Solución

Basta definir, la función inversa, conforme al punto anterior como

$$T^{-1}(ax^2+bx+c) = (a,-c,b)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(T\circ T^{-1})(ax^2+bx+c) &= T(T^{-1}(ax^2+bx+c))\\
&= T(a,-c,b)\\
&= ax^2+bx-(-c)\\
&= ax^2+bx+c
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
(T^{-1}\circ T)(a,b,c) &= T^{-1}(T(a,b,c))\\
&= T^{-1}(ax^2+cx-b)\\
&= (a,-(-b),c)\\
&= (a,b,c)
\end{aligned}$$

(2) Sea $h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $h(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0+a_1+a_2)+(a_0-a_1+a_2)x+a_2x^2$.

(a) Demuestre que h es biyectiva

Solución

Etapa 1. h es inyectiva , pues si $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$\begin{aligned}
h(p(x)) = h(q(x)) &\iff h(a_0+a_1x+a_2x^2) = h(b_0+b_1x+b_2x^2)\\
&\iff (a_0+a_1+a_2)+(a_0-a_1+a_2)x+a_2x^2 = (b_0+b_1+b_2)+(b_0-b_1+b_2)x+b_2x^2\\
&\iff \left.\begin{array}{lcl} a_0+a_1+a_2 &=& b_0+b_1+b_2\\ a_0-a_1+a_2 &=& b_0-b_1+b_2\\ a_2 &=& b_2 \end{array}\right|\\
&\Longrightarrow a_2 = b_2 \wedge \left.\begin{array}{lcl} a_0+a_1 &=& b_0+b_1\\ a_0-a_1 &=& b_0-b_1 \end{array}\right| \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\\
&\overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} a_2 = b_2 \wedge 2a_0 = 2b_0\\
&\overset{(1)}{\Longrightarrow} a_2 = b_2 \wedge a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1
\end{aligned}$$

De donde concluimos que h es inyectiva.

Etapa 2. Para que h sea sobreyectiva, debemos mostrar que Img $(h) = \mathbb{R}_2[x]$, pero como h es función entonces Img $(h) \subset \mathbb{R}_2[x]$. Así que sólo resta mostrar que $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{Img}(h)$.

Para ello debemos resolver la ecuación $h(p(x))) = q(x)$, para $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. Así que si $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$ y $q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2$

$$\begin{aligned}
h(p(x))) = q(x) &\iff h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \\
&\iff (a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 - a_1 + a_2)x + a_2x^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 \\
&\iff \left.\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 + a_2 &=& b_0 \\ a_0 - a_1 + a_2 &=& b_1 \\ a_2 &=& b_2 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow a_2 = b_2 \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 + a_2 &=& b_0 \\ a_0 - a_1 + a_2 &=& b_1 \end{array}\right| \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \\
&\stackrel{(1)-(2)}{\Longrightarrow} a_2 = b_2 \wedge a_1 = \frac{b_0 - b_1}{2} \\
&\stackrel{(1)}{\Longrightarrow} a_2 = b_2 \wedge a_1 = \frac{b_0 - b_1}{2} \wedge a_0 = \frac{b_0 - 2b_2 + b_1}{2}
\end{aligned}$$

Luego,

$$h\left(\frac{b_0 - 2b_2 + b_1}{2} + \frac{b_0 - b_1}{2}x + b_2x^2\right) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

Así que h es sobreyectiva, y por ende biyectiva

(b) Determine h^{-1}

Usando el resultado anterior tenemos que

$$h^{-1}(b_0 + b_1x + b_2x^2) = \left(\frac{b_0 - 2b_2 + b_1}{2} + \frac{b_0 - b_1}{2}x + b_2x^2\right)$$

Y podemos comprobar que:

$$h(h^{-1}(b_0 + b_1x + b_2x^2)) = h\left(\frac{b_0 - 2b_2 + b_1}{2} + \frac{b_0 - b_1}{2}x + b_2x^2\right) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

Así que, $h \circ h^{-1} = 1_{\mathbb{R}_2[x]}$

Analogamente

$$h^{-1}(h(a_0 + a_1x + a_2x^2)) = h^{-1}((a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 - a_1 + a_2)x + a_2x^2)) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Así que, $h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{R}_2[x]}$

(3) Sea $\mathbb{R}_2[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid \partial(p(x)) \leq 2\}$ el conjunto de polinomios reales de grado menor o igual que 2. Si definimos la función.

$$h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}^3 \text{ tal que } h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + \lambda a_1 - a_2, a_0 - a_1 + \lambda a_2, a_0 + a_1 + a_2)$$

entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ es biyectiva}\}$$

Solución

Etapa 1. $\lambda \in \mathbb{S} \Longleftrightarrow h$ es biyectiva, es decir, h debe ser inyectiva y sobreyectiva

Etapa 2. Estudiemos bajo que condiciones de λ h es inyectiva. Es decir, ¿cuándo es verdadera la proposición lógica?

$$h(p(x)) = h(q(x)) \Longrightarrow p(x) = q(x)$$

Si hacemos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} h(p(x)) &= (a_0 + \lambda a_1 - a_2, a_0 - a_1 + \lambda a_2, a_0 + a_1 + a_2), \text{ y} \\ h(q(x)) &= (b_0 + \lambda b_1 - b_2, b_0 - b_1 + \lambda b_2, b_0 + b_1 + b_2) \end{aligned}$$

Así que, $h(p(x)) = h(q(x))$ si y sólo si

$$(a_0 + \lambda a_1 - a_2, a_0 - a_1 + \lambda a_2, (a_0 + a_1 + a_2) = (b_0 + \lambda b_1 - b_2, b_0 - b_1 + \lambda b_2, b_0 + b_1 + b_2)$$

Así que para determinar las condiciones que debe verificar λ, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & + & \lambda a_1 & - & a_2 & = & b_0 & + & \lambda b_1 & - & b_2 \\ a_0 & - & a_1 & + & \lambda a_2 & = & b_0 & - & b_1 & + & \lambda b_2 \\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & b_0 & + & b_1 & + & b_2 \end{array}\right| \qquad (5)$$

Ahora procedemos a resolver el sistema (5).

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & + & \lambda a_1 & - & a_2 & = & b_0 & + & \lambda b_1 & - & b_2 \\ a_0 & - & a_1 & + & \lambda a_2 & = & b_0 & - & b_1 & + & \lambda b_2 \\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & b_0 & + & b_1 & + & b_2 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} (a_0 - b_0) & + & \lambda(a_1 - b_1) & + & (b_2 - a_2) & = & 0 \\ (a_0 - b_0) & + & (b_1 - a_1) & + & \lambda(a_2 - b_2) & = & 0 \\ (a_0 - b_0) & + & (a_1 - b_1) & + & (a_2 - b_2) & = & 0 \end{array}\right|$$

Si llamamos $c_0 = (a_0 - b_0)$, $c_1 = (a_1 - b_1)$ y $c_2 = (a_2 - b_2)$ entonces sustituyendo en el sistema anterior tenemos que

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & + & \lambda a_1 & - & a_2 & = & b_0 & + & \lambda b_1 & - & b_2 \\ a_0 & - & a_1 & + & \lambda a_2 & = & b_0 & - & b_1 & + & \lambda b_2 \\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & b_0 & + & b_1 & + & b_2 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} c_0 & + & \lambda c_1 & - & c_2 & = & 0 \\ c_0 & - & c_1 & + & \lambda c_2 & = & 0 \\ c_0 & + & c_1 & + & c_2 & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

De $(1) - (2)$ y $(1) - (3)$ obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} (\lambda + 1)(c_1 - c_2) & = & 0 \\ (\lambda - 1)c_1 - 2c_2 & = & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} (4) \\ (5) \end{array}$$

Ahora si $\lambda + 1 \neq 0$ en (4) sigue que $c_1 = c_2$ y sustituyendo en (5) tenemos que $(\lambda - 3)c_1 = 0$.

Así que para $\lambda+1\neq 0$ y $\lambda-3\neq 0$ $c_1=c_2=c_0=0$, y $p(x)=q(x)$ de donde

$$\mathbb{S}=\mathbb{R}-\{-1,3\}$$

Etapa 3. Estudiemos bajo que condiciones de λ h es sobreyectiva. Es decir, ¿cuándo es verdadera la proposición lógica?

$$\text{Para cada } u\in\mathbb{R}^3: \ (\exists p(x); p(x)\in\mathbb{R}_2[x]) : h(p(x))=u$$

Es decir, si hacemos $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]$ y $u=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ debemos resolver la ecuación,

$$h(a_0+a_1x+a_2x^2)=(x_0,y_0,z_0) \iff (a_0+\lambda a_1-a_2, a_0-a_1+\lambda a_2, a_0+a_1+a_2)=(x_0,y_0,z_0)$$

Equivalentemente, debemos resolver la ecuación

$$\begin{array}{ccccccc|l} a_0 & + & \lambda a_1 & - & a_2 & = & x_0 & (1)\\ a_0 & - & a_1 & + & \lambda a_2 & = & y_0 & (2)\\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & z_0 & (3) \end{array} \qquad (*)$$

Ahora en el sistema $(*)$, si hacemos $(1)-(2)$ y $(1)-(3)$ obtenemos

$$\begin{array}{ccc|l} (\lambda+1)(a_1-a_2) & = & x_0-y_0 & (5)\\ (\lambda-1)a_1-2a_2 & = & x_0-z_0 & (6) \end{array}$$

Si $\lambda+1\neq 0$ entonces en (5) tenemos que

$$a_1-a_2=\frac{x_0-y_0}{\lambda+1} \iff a_2=a_1-\frac{x_0-y_0}{\lambda+1} \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (6) sigue que:

$$(\lambda-1)a_1-2\left(a_1-\frac{x_0-y_0}{\lambda+1}\right)=x_0-z_0 \iff (\lambda-3)a_1=(x_0-z_0)-2\left(\frac{x_0-y_0}{\lambda+1}\right) \qquad (8)$$

Si $\lambda-3\neq 0$ entonces en (8) tenemos que:

$$\boxed{a_1=\frac{(x_0-z_0)}{(\lambda-3)}-2\left(\frac{x_0-y_0}{(\lambda+1)(\lambda-3)}\right)} \qquad (9)$$

Sustituyendo (9) en (7) obtenemos que

$$\boxed{a_2=\frac{(x_0-z_0)}{(\lambda-3)}-2\left(\frac{x_0-y_0}{(\lambda+1)(\lambda-3)}\right)-\frac{(x_0-y_0)}{(\lambda+1)}} \qquad (10)$$

Finalmente, sustituyendo (9) y (10) en (3) tenemos que:

$$\boxed{a_0 = z_0 - 2\left(\frac{(x_0 - z_0)}{(\lambda - 3)}\right) + 4\left(\frac{x_0 - y_0}{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}\right) + \frac{(x_0 - y_0)}{(\lambda + 1)}}$$

Así que para $\lambda + 1 \neq 0$ y $\lambda - 3 \neq 0$ h es sobreyectiva, y entonces

$$\mathbb{S} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

(4) Considere la función $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h(x, y, z) = (\lambda x + y + z, x + \lambda y + z)$. Si llamamos $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ inyectiva}\}$. Demuestre que $\mathbb{S} = \emptyset$

Solución

Un camino es mostrar que

$$h(x, x, -\lambda x - x) = (\lambda x + x - \lambda x - x, x + \lambda x - \lambda x - x) = (0, 0)$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$ entonces h no es inyectiva y $\mathbb{S} = \emptyset$.

(5) Si $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Demuestre que

$$ad - bc \neq 0 \implies f \text{ inyectiva}$$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que si $ad - bc \neq 0$ entonces f es inyectiva, es decir, debemos verificar que para cualquier $u \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$. Si $f(u) = f(v)$ entonces $u = v$.

Equivalentemente si $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces debemos mostrar que

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \implies (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

Etapa 2. Gestión de la información.

$$\begin{aligned}
f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \quad & \implies \quad (ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1) = (ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2) \\
& \implies \quad \left.\begin{array}{rcl} ax_1 + by_1 & = & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & = & cx_2 + dy_2 \end{array}\right| \\
& \implies \quad \left.\begin{array}{rcl} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) & = & 0 \\ c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) & = & 0 \end{array}\right| \qquad (*) \\
& \implies \quad \left.\begin{array}{rcl} ad(x_1 - x_2) + bd(y_1 - y_2) & = & 0 \\ bc(x_1 - x_2) + bd(y_1 - y_2) & = & 0 \end{array}\right| \\
& \implies \quad (ad - bc)(x_1 - x_2) = 0 \\
& \implies \quad (ad - bc) = 0 \quad \vee \quad (x_1 - x_2) = 0 \\
& \stackrel{ad - bc \neq 0}{\implies} \quad x_1 - x_2 = 0 \\
& \implies \quad x_1 = x_2
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en $(*)$ obtenemos que $b(y_1 - y_2) = 0 \wedge d(y_1 - y_2) = 0$. Así que

$$[b = 0 \quad \vee \quad d = 0 \quad \vee \quad y_1 - y_2 = 0] \Longrightarrow y_1 - y_2 = 0 \Longrightarrow y_1 = y_2$$

Pues, si $b = 0$ y $d = 0$ entonces $ad - bc = 0$ lo que contradice nuestra hipótesis, así que $b \neq 0 \vee d \neq 0$

De donde $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ y f es inyectiva

(6) Considere las funciones $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{C}$. demuestre que:

$$f \text{ biyectiva } \wedge \ g \text{ biyectiva } \Longrightarrow g \circ f \text{ biyectiva}$$

En efecto

- Supongamos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\Longrightarrow g(f)(x) = g(f)(y) \\ &\Longrightarrow f(x) = f(y) \qquad (g \text{ inyectiva}) \\ &\Longrightarrow x = y \qquad\qquad (f \text{ inyectiva})\end{aligned}$$

  Luego,$(g \circ f)$ es inyectiva.

- Sea $c \in \mathbb{C}$, como g es sobreyectiva entonces existe $b \in \mathbb{B}$ tal que

$$g(b) = c \qquad\qquad (*)$$

  Como f es sobreyectiva entonces existe $a \in \mathbb{A}$ tal que

$$f(a) = b \qquad\qquad (**)$$

  Sustituyendo (**) en (*) tenemos que $g(f(a)) = c$. Así que existe $a \in \mathbb{A}$ tal que $(g \circ f)(a) = c$
  Por tanto, $(g \circ f)$ es sobreyectiva y entonces biyectiva.

(7) Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ una función

(a) Si existe $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A}$ tal que $(g \circ f)(a) = a \quad (\forall a; a \in A)$ entonces demuestre que f es inyectiva

Solución

Para mostrar que f es inyectiva debemos verificar que

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2$$

En efecto

$$\begin{aligned} f(a_1) = f(a_2) &\Longrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &\Longrightarrow (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \left(\begin{array}{l} \text{Aplicando la hipótesis del problema} \\ \text{obtenemos que:} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2$$

(b) Si existe $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A}$ tal que $(f \circ g)(b) = b \quad (\forall b; b \in B)$ entonces demuestre que f es sobreyectiva

Solución

Para mostrar que f es sobreyectiva debemos mostrar que $Img(f) = B$, pero como f es una función entonces se verifica naturalmente $Img(f) \subset B$. Por tanto sólo nos resta mostrar que $B \subset Img(f)$

Entonces

$$\begin{array}{rcll} b \in B & \Longrightarrow & g(b) = a \in A & \text{(Pues } g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A} \text{ es una función)} \\ & \Longrightarrow & f(g(b)) = f(a) \in B & \text{(Pues } f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B} \text{ es una función)} \\ & \Longrightarrow & (f \circ g)(b)) = f(a) & \text{(Definición de composición de funciones)} \\ & \Longrightarrow & b = f(a) & \text{(Por hipótesis del problema)} \end{array}$$

Así que

$$[b \in B \Longrightarrow b = f(a) \in Img(f)] \Longrightarrow B \subset Img(f)$$

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético