CAPITULO 12

Rudimentos sobre el anillo de Polinomios

1. Introducción al Anillo de Polinomios

Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, donde $(a_i \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n)$, $(b_i \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n)$ entonces

(1) $(\mathbb{R}[x], +)$ es un grupo abeliano, con la adición definida por:

$$p(x) + q(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

(2) $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, con identidad 1, si un producto es definido por:

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i \quad \text{tal que} \quad c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} \quad (0 \leq i \leq n+m)$$

Donde,

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
\vdots &\ \ \vdots \ \ \vdots \\
c_{n+m} &= a_0 b_{n+m} + a_1 b_{n+m-1} + a_2 b_{n+m-2} + \cdots + a_{n+m} b_0
\end{aligned}$$

En efecto

♦ En primer lugar, se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la adición

$$p(x)[q(x) + s(x)] = p(x)q(x) + p(x)s(x)$$

Pues, por una parte

$$\begin{aligned}
p(x) \cdot q(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_{n+m} x^{n+m} \\
p(x) \cdot s(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots + d_{n+t} x^{n+t}
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
c_r &= p_r q_0 + p_{r-1} q_1 + p_{r-2} q_2 + \cdots + p_2 q_{r-2} + p_1 q_{r-1} + p_0 q_r \quad (0 \leq r \leq n+m) \\
d_r &= p_r s_0 + p_{r-1} s_1 + p_{r-2} s_2 + \cdots + p_2 s_{r-2} + p_1 s_{r-1} + p_0 s_r \quad (0 \leq r \leq n+t)
\end{aligned}$$

Y por otra,

$$\begin{aligned} p(x)[q(x)+s(x)] &= (p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n)\cdot[(q_0+s_0)+(q_1+s_1)x+\cdots+(q_t+s_t)x^t] \\ &= u_0+u_1x+\cdots+u_{n+t}x^{n+t} \end{aligned} \qquad (*)$$

Tal que, $u_r = p_r(q_0+s_0)+p_{r-1}(q_1+s_1)+\cdots+p_0(q_t+s_t) \qquad 0 \leq r \leq n+t$

Pero,

$$\begin{aligned} u_r &= p_r(q_0+s_0)+p_{r-1}(q_1+s_1)+\cdots+p_0(q_t+s_t) \\ &= p_rq_0+p_rs_0+p_{r-1}q_1+p_{r-1}s_1+\cdots+p_0q_t+p_0s_t \\ &= (p_rq_0+p_{r-1}q_1+\cdots+p_0q_t)+(p_rs_0+p_{r-1}s_1+\cdots+p_0s_t) \\ &= c_r+d_r \quad 0 \leq r \leq n+t \end{aligned} \qquad (**)$$

Así que sustituyendo (*) en (**), tenemos finalmente que

$$\begin{aligned} p(x)[q(x)+s(x)] &= u_0+u_1x+\cdots+u_{n+t}x^{n+t} \\ &= (c_0+d_0)+(c_1+d_1)x+\cdots+(c_{n+t}+d_{n+t})x^{n+t} \\ &= (c_0+c_1x+\cdots+c_{n+t}x^{n+t})+(d_0+d_1x+\cdots+d_{n+t}x^{n+t}) \\ &= p(x)q(x)+p(x)s(x) \end{aligned}$$

♦ La conmutatividad en $\mathbb{R}[x]$, sigue de los siguientes hechos,

- En primer lugar, por definición de producto de polinomios tenemos que,

$$p(x)\cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_ix^i \quad \text{tal que} \quad c_i = \sum_{k=0}^{i} a_kb_{i-k} \quad (0 \leq i \leq n+m)$$

- En segundo lugar, si hacemos la sustitución $u = i-k$ en c_i para cada $i = 1, 2, \ldots n+m$ entonces obtenemos que

$$\left(c_i = \sum_{k=0}^{i} a_kb_{i-k} = \sum_{u=i}^{0} a_{i-u}b_u = \sum_{u=0}^{i} b_ua_{i-u}\right) \Longrightarrow q(x)\cdot p(x) = p(x)\cdot q(x)$$

♦ Existe el elemento neutro multiplicativo, $e(x) = 1$ pues,

$$\begin{aligned} p(x)\cdot e(x) &= (p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n)\cdot(1+0x+0x^2+0x^3+\cdots+0x^n) \\ &= p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n \\ &= p(x) \end{aligned}$$

Lo anterior lo consignaremos en el siguiente teorema

Teorema 1.1. $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo con identidad* $e(x) = 1$

Corolario 1.1.1. $\mathbb{U}(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{R} - \{0\}$

En efecto

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
p(x) \in U(\mathbb{R}[x]) &\iff \left(\exists q(x);\ q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]\right) :\ p(x)q(x) = 1 \\
&\implies \partial(p(x)q(x) = \partial(1) \\
&\implies \partial(p(x)) + \partial(q(x)) = 0 \\
&\implies \partial(p(x)) = 0 \wedge \partial(q(x)) = 0 \\
&\implies p(x) \in \mathbb{R} \wedge q(x) \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Es decir, ambos polinomios deben ser constantes, y entonces $\mathbb{U}(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{R} - \{0\}$

De acuerdo a nuestro desarrollo, en esta nueva estructura podemos definir el concepto de homomorfismo de anillos como sigue:

Definición 1.2. *Sean* $(\mathbb{A}, *, \circ)$ *y* $(\mathbb{A}', *', \circ')$ *dos anillos y* $h : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}'$ *una función. Diremos que* h *es un homomorfismo de anillos si*

- $h(a * b) = h(a) * h(b)$
- $h(a \circ b) = h(a) \circ' h(b)$

Ejemplo 1.2.1. *En primer lugar, para cada* $r \in \mathbb{R}$ *podemos definir naturalmente la función* $\varphi(r)$ *como sigue:*

$$\varphi(r) : \mathbb{R}[x] \longmapsto \mathbb{R} \text{ tal que } \varphi(r)(p(x)) = \varphi(r)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i = p(r)$$

Así por ejemplo para $r = 2$ *y* $r = -1$ *tenemos que*

- $\varphi(2)(1 + x^2 - x^3) = 1 + 2^2 - 2^3 = -3$
- $\varphi(-1)(1 + x^3) = 1 + (-1)^3 = 0$

En segundo lugar constatamos directamente que, para cada $r \in \mathbb{R}$, $\varphi(r)$ *satisface las siguientes propiedades:*

- $\varphi(r)(p(x) + q(x)) = \varphi(r)(p(x)) + \varphi(r)(q(x))$, *es decir*

$$\varphi(r)(p(x) + q(x)) = p(r) + q(r)$$

- $\varphi(r)(p(x)q(x)) = \varphi(r)(p(x))\varphi(r)(q(x))$, *es decir*

$$\varphi(r)(p(x)q(x)) = p(r)q(r)$$

Luego, para cada $r \in \mathbb{R}$ $\varphi(r)$ *es un homomorfismo de anillos, al cual llamaremos " homomorfismo evaluación"*

Podemos continuar estudiando el homomorfismo evaluación, peguntando ¿Quién es el núcleo de $\varphi(r)$*?.*

Es decir preguntamos ¿Quién es para cada $r \in \mathbb{R}$*, el conjunto* $\ker(\varphi(r)) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \varphi(r)(p(x)) = 0\}$*?*

Para responder procedemos con nuestra acostumbrada técnica

$$\begin{aligned} p(x) \in ker(\varphi(r)) &\iff \varphi(r)(p(x)) = 0 \\ &\iff p(r) = 0 \end{aligned}$$

Así que

$$ker(\varphi(r)) \;=\; \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \; p(r) = 0\} \tag{1}$$

Ejemplo 1.2.2. $(1 + x^3) \in ker(\varphi(-1))$*, pues* $\varphi(-1)(1 + x^3) = 0$

2. Introducción a las raíces de polinomios

El objetivo principal de esta sección es exponer y analizar algunos resultados relacionados con la obtención de las raíces de polinomios. Para ello desarrollaremos algunas etapas, (no debemos olvidar que este es un texto para ser estudiado y analizado en primer año).

Etapa 1. Sean $p(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s x s^s \in \mathbb{C}[x]$ y $q(x) = \sum_{s=0}^{m} b_s x^s \in \mathbb{C}[x]$ entonces dividiendo $p(x)$ entre $q(x)$ tenemos que existen únicos $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $r(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que

$$p(x) \;=\; q(x)g(x) + r(x) \qquad (\partial(r(x)) < \partial(q(x))) \tag{2}$$

Ejemplo 2.1. *Sea* $p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4$ *y* $q(x) = x - 1$ *entonces efectuando la división tenemos que*

$$\begin{array}{ll} & 3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4 \;\; : \;\; x - 1 \;\; = \;\; 3x^4 + 3x^3 + x^2 + 6x + 6 \\ (-) & 3x^5 - 3x^4 \\ & ----------- \\ & 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4 \\ (-) & 3x^4 - 3x^3 \\ & ----------- \\ & x^3 + 5x^2 - 4 \\ (-) & x^3 - x^2 \\ & ----------- \\ & 6x^2 - 4 \\ (-) & 6x^2 - 6x \\ & ----------- \\ & 6x - 4 \\ (-) & 6x - 6 \\ & ----------- \\ & 2 \end{array}$$

Luego,

$$\underbrace{3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4}_{p(x)} \;=\; \underbrace{(x-1)}_{q(x)}\underbrace{(3x^4 + 3x^3 + x^2 + 6x + 6)}_{g(x)} + \underbrace{2}_{r(x)}$$

Etapa 2. Como consecuencia inmediata de (2) tenemos que:

$$\alpha \in \mathbb{C} \text{ es una raíz de } p(x) \in \mathbb{C}[x] \iff p(x) = (x - \alpha)g(x)$$

Pues, de (2) sigue que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$p(x) = (x-\alpha)g(x) + c \Longrightarrow p(\alpha) = (\alpha-\alpha)g(\alpha) + c \Longrightarrow p(\alpha) = c$$

Así que, si α es una raíz de $p(x)$ entonces $p(\alpha) = 0$ y $c = 0$ y $p(x) = (x-\alpha)g(x)$.

Recíprocamente, si $p(x) = (x-\alpha)g(x)$ entonces $p(\alpha) = 0$ y α es una raíz de $p(x)$.

Etapa 3. Como consecuencia inmediata de la Etapa 2. tenemos que "Todo polinomio de grado n en $\mathbb{C}[x]$ tiene a lo más n raíces".

En efecto

Si $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio de grado n y posee una raíz $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ entonces $p(x) = (x-\alpha_1)q_1(x)$, donde $q_1(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $\partial(q_1(x)) = n-1$. Aplicando iteradamente esta idea debemos tener que

$$p(x) \quad = \quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)q_s(x) \quad (\text{donde } q_s(x) \text{ no tiene más raíces})$$

Es claro que $s \leq n$ y que $p(x)$ tiene a lo más n raíces en $\mathbb{C}$

Etapa 4. Si asumimos el resultado conocido como "Teorema Fundamental del Álgebra"[1] el cual dice que Todo polinomio en $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$, tiene una raíz en $\mathbb{C}$ entonces "Todo polinomio de grado n en $\mathbb{C}[x]$ tiene exactamente n raíces".

Ejemplo 2.1.1. *Si* $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + x^3$ *entonces determinemos el conjunto*

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3 \mid p(2) = 3 \wedge p(1) = 2 \wedge p(-1) = 4\}$$

Antes de determinar S *observemos que:*

$p(2) = 3$ *significa que* $p(x) = (x-2)q(x) + 3$

$p(1) = 2$ *significa que* $p(x) = (x-1)s(x) + 2$

$p(-1) = 4$ *significa que* $p(x) = (x+1)t(x) + 4$

[1] La demostración de este genial resultado excede las posibilidades de este texto, sin embargo, será interesante leer su evolución desde Gauss en adelante, (Ver por ejemplo el sitio web del Instituto Schiller en http://www.schillerinstitute.org/newspanish/InstitutoSchiller/Ciencia/VisibleTFalgebra.html).

Ahora, iniciemos nuestro análisis:

$$
\begin{aligned}
u\in\mathbb{S} &\iff u=(c_0,c_1,c_2)\in\mathbb{R}^3\wedge(p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+x^3\wedge p(2)=3\wedge p(1)=2\wedge p(-1)=4)\\
&\iff u=(c_0,c_1,c_2)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{rcr} c_0+2c_1+4c_2+8 &=& 3\\ c_0+c_1+c_2+1 &=& 2\\ c_0-c_1+c_2-1 &=& 4\end{array}\right|\\
&\iff u=(c_0,c_1,c_2)\in\mathbb{R}^3\ \wedge\ \left.\begin{array}{rcr} c_0+2c_1+4c_2 &=& -5\\ c_0+c_1+c_2 &=& 1\\ c_0-c_1+c_2 &=& 5\end{array}\right| \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\\
&\Longrightarrow u=(c_0,c_1,c_2)\in\mathbb{R}^3\ \wedge\ \textit{De } (2)-(3)\ \textit{sigue que } c_1=-2\wedge \left.\begin{array}{rcr} c_0-4+4c_2 &=& -5\\ c_0-2+c_2 &=& 1\\ c_0+2+c_2 &=& 5\end{array}\right| \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\\
&\Longrightarrow u=(c_0,-2,c_2)\in\mathbb{R}^3\ \wedge\ \left.\begin{array}{rcr} c_0+4c_2 &=& -1\\ c_0+c_2 &=& 3\end{array}\right| \begin{array}{c}(1)\\(2)\end{array}\\
&\Longrightarrow u=(c_0,-2,c_2)\in\mathbb{R}^3\ \wedge\ \textit{De } (1)-(2)\ \textit{sigue que } c_2=-\frac{4}{3}\wedge c_0=\frac{13}{3}\\
&\Longrightarrow u=\left(\frac{13}{3},-2,-\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathbb{S}=\left\{\left(\frac{13}{3},-2,-\frac{4}{3}\right)\right\}$ *y* $p(x)=\frac{13}{3}-2x-\frac{4}{3}x^2+x^3$

Observación 2.1.2. *Podemos rebobinar lo expuesto y concluir que*

(1) $(\forall c; c\in\mathbb{R})\ p(x)=(x-c)q(x)+r(x)$ *tal que* $\partial(r(x))=0$

(2) $(\forall c; c\in\mathbb{R})\ p(x)=(x-c)q(x)+r(x)\Longrightarrow p(c)=r(c)$

(3) *Si* $p(x)=(x-c)q(x)+r(x)$ *entonces* $p(c)=0\iff r(c)=0$

(4) *Luego, tiene sentido investigar la relación que existe entre el núcleo del homomorfismo evaluación* $\varphi(c)$ *descrito en (1) y el resto de la división. En ese sentido tenemos la siguiente idea, conocida como "División Sintética de Horner".*

3. División Sintética de Horner

Si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdot+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ tal que $\partial(p(x))=n$, es decir $a_n\neq 0$ entonces procedemos según el siguiente algoritmo:

Etapa 1. Evaluamos el polinomio en $c\in\mathbb{R}$, y obtenemos:

$$p(c) = a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+a_{n-2}c^{n-2}+\cdots+a_2c^2+a_1c+a_0 \tag{3}$$

Etapa 2. Factorizamos c en forma anidada en (3), es decir:

$$p(a) = (\cdots(((a_nc+a_{n-1})c+a_{n-2})c+a_{n-3})c+\cdots)c+a_0 \tag{4}$$

Etapa 2.1 Si $p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ entonces para $c=2$ tenemos que

$$\begin{aligned} p(2) &= a_32^3+a_22^2+a_12+a_0 \\ &= (a_32^2+a_22+a_1)2+a_0 \\ &= ((a_32+a_2)2+a_1)2+a_0 \end{aligned}$$

En particular, si $p(x)=3x^3+5x^2+x+7$ entonces

$$\begin{aligned} p(2) &= ((3\cdot 2+5)2+1)2+7 \\ &= 53 \end{aligned}$$

Etapa 3. Definimos la secuencia de cálculos.

$$\begin{array}{ccc} c_n & = & a_n\cdot c+a_{n-1} \\ c_{n-1} & = & c_n\cdot c+a_{n-2} \\ c_{n-2} & = & c_{n-1}\cdot c+a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-k} & = & c_{n-(k-1)}\cdot c+a_{n-(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & = & c_2\cdot c+a_0=p(c) \end{array}$$

Etapa 4. Finalmente procedemos con la implementación del proceso

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & c \\ \hline & a_n\cdot c & c_n\cdot c & \cdots & c_2\cdot c & \\ \hline a_n & c_n & c_{n-1} & \cdots & p(c) & \end{array}$$

Figura 1: Algoritmo de Horner

Todo lo anterior lo archivamos en el siguiente teorema

Teorema 3.1. División Sintética de Horner. *Si* $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ *tal que* $\partial(p(x))=n$ *entonces*

$$p(x) \quad = \quad (x-c)(a_nx^{n-1}+c_nx^{n-2}+\cdots+c_1)+r$$

Donde,

$$\begin{array}{ccc} c_n & = & a_n\cdot c+a_{n-1} \\ c_{n-1} & = & c_n\cdot c+a_{n-2} \\ c_{n-2} & = & c_{n-1}\cdot c+a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-k} & = & c_{n-(k-1)}\cdot c+a_{n-(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & = & c_2\cdot c+a_0=p(c) \end{array}$$

Ejemplo 3.1.1. *Si* $p(x)=3x^3+5x^2+x+7$ *entonces para* $x=0$ *el algoritmo se comportaría como sigue:*

$$
\begin{array}{cccc|l}
3 & 5 & 1 & 7 & 0 \\ \hline
 & 3\cdot 0 & 5\cdot 0 & 1\cdot 0 & \\ \hline
3 & 5 & 1 & 7 &
\end{array}
$$

Así que, $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 7 = (x - 0)(3x^2 + 5x + 1) + 7 = x(3x^2 + 5x + 1) + 7$ *y* $p(0) = 7$

Ejemplo 3.1.2. *Si* $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 7$ *entonces para* $x = 2$ *el algoritmo se comportaría como sigue:*

$$
\begin{array}{cccc|l}
3 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ \hline
 & 6 & 22 & 46 & \\ \hline
3 & 11 & 23 & 53 &
\end{array}
$$

Así que, $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 7 = (x - 2)(3x^2 + 11x + 23) + 53$

Ejemplo 3.1.3. *Si* $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 6$ *entonces para* $x = -2$ *el algoritmo se comportaría como sigue:*

$$
\begin{array}{cccc|l}
3 & 5 & 1 & 6 & -2 \\ \hline
 & -6 & 2 & -6 & \\ \hline
3 & -1 & 3 & 0 &
\end{array}
$$

Así que, $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 2 = (x - (-2))(3x^2 + 5x + 1) + 0 = (x + 2)(3x^2 + 5x + 1)$ *y* $p(-2) = 0$

4. Raíces Racionales para polinomios con coeficientes enteros

Sea $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, es decir $a_i \in \mathbb{Z}$, para $(0 \leq i \leq n)$. Si existe $c = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ tal que r y s no tienen factores comunes[2] y $p(c) = 0$ entonces a_0 es múltiplo de r y a_n es múltiplo de s. Es decir $r|a_0$ y $s|a_n$

En efecto

[2]Esto es siempre posible, pues si en $\mathbb{Q}$, $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a\cdot r}{a\cdot s}$ entonces $\overline{\dfrac{c}{d}} = \overline{\dfrac{r}{s}}$, ver para mayor información la construcción de los números racionales.

Si $p(c)=0$ entonces debemos tener que

$$\begin{aligned}
p(c)=0 \quad &\Longrightarrow \quad a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad a_n\left(\frac{r^n}{s^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

De (5), sigue que $s|a_n$, pues, r y s no tienen factores comunes y

$$\begin{aligned}
a_n r^n &= -(a_{n-1}r^{n-1}s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n) \\
&= -(a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1})s
\end{aligned}$$

Del mismo modo de (5), sigue que $r|a_0$, pues, r y s no tienen factores comunes y

$$\begin{aligned}
a_o s^n &= -(a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}s + \cdots + a_1 r s^{n-1}) \\
&= -(a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2} + \cdots + a_1 s^{n-2})r
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1. *Sea $p(x) = 6x^3 + 5x^2 + -3x - 2$ entonces si queremos aplicar el resultado descrito en la sección 4, procedemos como sigue:*

(1) *Determinamos los divisores para este caso; $Div(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$ y $Div(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.*

(2) *Construimos los candidatos a raíces para este polinomio, en el caso son:*

$$R \;=\; \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}\right\}$$

(3) *Aplicamos, por ejemplo Horner para testear los candidatos:*

6	5	-3	-2	-1
	-6	1	2	
3	-1	-2	0	

Así que, el polinomio se reescribe como

$$p(x) = 6x^3 + 5x^2 + -3x - 2 = (x-(-1))(6x^2 - x - 2)$$

Ahora resolviendo la ecuación encontramos que sus raíces son: $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{2}{3}$. así que

$$p(x) = 6x^3 + 5x^2 + -3x - 2 = (x+1)(2x+1)(3x-2)$$

5. Conjugación Compleja y raíces de polinomios

La primera idea que abordaremos será la de la Conjugación Compleja, con la intención de mostrar que "si un complejo es raíz de un polinomio entonces su conjugado también lo es", esto nos permitirá concluir que, todo polinomio en $\mathbb{R}[x]$ de grado impar tiene una raíz real.

Definición 5.1. *Llamaremos conjugación compleja a la función,* $- : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ *tal que* $x+iy \longmapsto x-iy$*. La notación estandarizadas es* $\bar{z} = x - iy$*, y se llama el complejo conjugado de* $z = x+iy$

Ejemplo 5.1.1.

(1) $\overline{1+i} = 1-i$

(2) $\overline{3-5i} = 3+5i$

5.2. Propiedades de la Conjugación Compleja.

(1) Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ entonces $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

En efecto

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = x_1+x_2-i(y_1+y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

(2) Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ entonces $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

En efecto

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2+x_2y_1)$$

Y por otra,

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(-x_1y_2 - x_2y_1) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(3) Si $z = x+iy$ entonces $\bar{\bar{z}} = z$

En efecto

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy = z$$

(4) Si $z = x+iy$ entonces $|z| = |\bar{z}|$

En efecto

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(-y)^2} = |x-iy| = |\bar{z}|$$

(5) Si $z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ entonces $\bar{z} = |z|(\cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha))$.

En efecto

$\bar{z} = \overline{|z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)} = |\bar{z}|(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha) = |\bar{z}|(\cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha))$, pues $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$.

(6) Si $z = x + iy$ entonces $Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ e $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

En efecto

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \Longrightarrow Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

Y,

$$z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy \Longrightarrow Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

(7) Si $z = x + iy$ entonces $z = \bar{z} \Longleftrightarrow Im(z) = 0$

En efecto

De (6) sigue que $z = \bar{z} \Longleftrightarrow Im(z) = \dfrac{0}{2i} = 0$

(8) Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces $p(\alpha) = 0 \Longrightarrow p(\overline{\alpha}) = 0$

En efecto

En primer lugar, si $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $p(x)$ entonces $p(\alpha) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = 0$ o bien $p(x) \in ker(\varphi(\alpha))$

Finalmente $p(\overline{\alpha}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha}^i = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} = \overline{0} = 0$

Conclusión 5.2.1. *De las propiedades* (1), (2) *y* (3)*, sigue que la conjugación compleja es un isomorfismo de anillos.*

Conclusión 5.2.2. *De las propiedades* (4) *y* (5)*, sigue que geométricamente un complejo y su conjugado son los siguientes.*

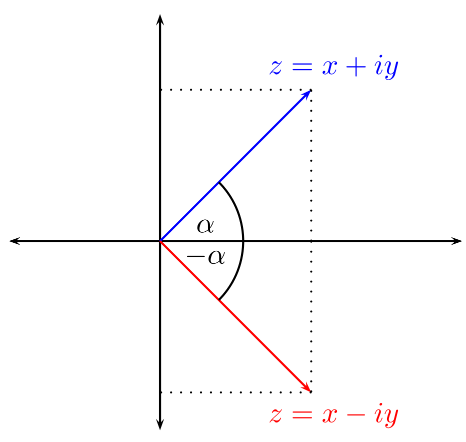

Figura 2: Un complejo y su complejo conjugado

Conclusión 5.2.3. *De* (8)*, sigue que todo polinomio de grado impar en* $\mathbb{R}[x]$*, tiene una raíz real.*

6. Cálculo de Raíces Reales

Sabemos que si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ entonces podemos observar las siguientes propiedades:

(1) $p(x)$ puede ser visto como una función real a valores reales si la definimos como:

$$p(x) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \text{ tal que } p(x)(a) = p(a)$$

Por ejemplo,

- Si $p(x) = 1 + x + x^2$ entonces $p(x)(a) = 1 + a + a^2 = p(a)$
- Si $p(x) = 6x^3 + 5x^2 + -3x - 2$ entonces $p(x)(-1) = p(-1) = 0$

(2) En el contexto anterior, tenemos además que $p(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, pues para $c \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\lim_{x \to c} p(x) = \lim_{x \to c} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i = p(c)$$

(3) Ahora combinando ambas visiones, como polinomio y como función tenemos que

$$p(c) = 0 \Longleftrightarrow \text{graf } (p(x)) \cap \text{ eje } x = \{(c, 0)\}$$

(4) Consideremos ahora, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ tal que $p(a) \cdot p(b) < 0$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ con $(a < b)$ entonces

Etapa 1. De la continuidad de $p(x)$ y del hecho que $p(a)$ y $p(b)$ tienen signo distinto en el intervalo $[a, b]$, sigue que debe existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$, es decir geométricamente tenemos.

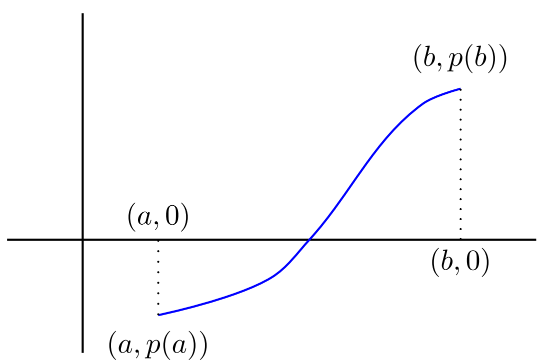

Figura 3: Caso $p(a) \cdot p(b) < 0$ y $c = \dfrac{a+b}{2}$

Etapa 2. Si $c = \dfrac{a+b}{2}$ entonces $p(a) \cdot p(c) < 0 \ \vee \ p(a) \cdot p(c) \geq 0$

- Si $p(c) = 0$ entonces el proceso termina
- Si $p(c) \neq 0$ entonces existe un nuevo intervalo, digamos $[a_1, b_1]$, donde las posibilidades son: $a_1 = a$ y $b_1 = c$ si $p(a) \cdot p(c) < 0$, o bien $a_1 = c$ y $b_1 = b$ si $p(c) \cdot p(b) < 0$, por tanto tenemos nuevamente que $p(a_1) \cdot p(b_1) < 0$.

- Iterando el proceso, podemos construir una sucesión real $S = \{c, c_1, c_2 \dots\}$ tal que $c_i = \dfrac{b_i + a_i}{2}$, pero el problema es determinar un proceso para que esta búsqueda termine sabiendo "al menos que tan cerca" se está de la raíz buscada.

Etapa 3. Paralelo a este proceso podemos calcular la amplitud del intervalo $[a_i, b_i]$, $l([a_i, b_i])]$.

- En primer lugar $l([a, b]) = \dfrac{b-a}{2^0}$

- En segundo lugar, si $b_1 = c$

$$l([a_1, b_1]) \ = \ l([a, c]) = c - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2^1}$$

  Y si $a_1 = c$ entonces

$$l([a_1, b_1]) \ = \ l([c, b]) = b - c = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2^1}$$

- Supongamos que $l([a_{n-1}, b_{n-1}]) = b_{n-1} - a_{n-1} = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$

- Entonces si $b_n = c_{n-1}$

$$l([a_n, b_n]) \ = \ l([a_{n-1}, c_{n-1}]) = c_{n-1} - a_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - a_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

Etapa 4. Del resultado anterior observamos que, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$, esto significa que podemos gestionar el error que se comete al iterar este proceso. en este contexto si consideramos $\epsilon \in \mathbb{R}; \epsilon > 0$ entonces

$$\frac{b-a}{2^n} < \epsilon \iff \frac{b-a}{\epsilon} < 2^n \Longrightarrow \ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) < n \ln 2 \Longrightarrow \frac{\ln(b-a) - \ln \epsilon}{\ln 2} < n$$

Ejemplo 6.1. *Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - 2$ entonces*

Paso 1. *Si consideramos $a = 0$ y $b = 2$ entonces $p(0) \cdot p(2) = (-2) \cdot 6 = -12$, luego existe $c \in (0, 2)$ tal que $p(c) = 0$.*

Si consideramos $\epsilon = 10^{-1}$ entonces

$$\frac{\ln 2 - \ln \epsilon}{\ln 2} \ = \ \frac{\ln 2 - \ln 10^{-1}}{\ln 2} = \frac{\ln 2 + \ln 10}{\ln 2} = 4,3219$$

Así que, para conseguir un error menor $\epsilon = 10^{-1}$ debemos considerar $n \geq 5$

Paso 2. *procedemos a las iteraciones*

- *Sea $c = \dfrac{2+0}{2} = 1$ entonces $p(1) \cdot p(2) = (-1)(6) = -6$. Luego existe una raíz en el intervalo $(1, 2)$*
- *Sea $c = \dfrac{1+2}{2} = 1.5$ entonces $p(1.5) = 1.375$. Luego existe una raíz en el intervalo $(1, 1.5)$*
- *Sea $c = \dfrac{1, 1.5}{2} = 1.25$ entonces $p(1.25) = -0.046875$. Luego existe una raíz en el intervalo $(1.25, 1.5)$*
- *Sea $c = \dfrac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375$ entonces $p(1.375) = 0.5996$. Luego existe una raíz en el intervalo $(1.25, 1.375)$*

- *Sea* $c = \dfrac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$ *entonces* $p(1.3125) = 0.26098$. *Luego existe una raíz en el intervalo* $(1.25, 1.3125)$.

- *Sea* $c = \dfrac{1.25 + 1.3125}{2} = 1.28125$ *entonces p(1.28125)=0.10330. Luego existe una raíz en el intervalo* $(1.25, 1.28125)$.

- *Sea* $c = \dfrac{1.25 + 1.28125}{2} = 1.2656$ *entonces* $p(1.2656) = 0.0272865$. *Luego existe una raíz en el intervalo* $(1.25, 1.2656)$.

- *Sea* $c = \dfrac{1.25 + 1.2656}{2} = 1.2578$ *entonces* $p(1.2578) = -0.01$. *Luego existe una raíz en el intervalo* $(1.2578, 1.2656)$, *y* $(1.2656 - 1.2578) = 0.0078 < 0.1$. *Así que obtenemos una raíz* α *con un error menor que* $\epsilon = 0.1$

$$\alpha = \frac{1.2578, 1.2656}{2} = 1.2617$$

6.2. Variante de la secante. Observamos que el tipo de razonamiento anterior, tiene como punto fundamental la existencia del valor $c = \dfrac{a+b}{2}$, o punto medio del intervalo, pero entonces este tipo de análisis puede ser hecho si conseguimos un buen ”sustituto de c”. A este caso lo llamaremos la variante de la secante y puede ser graficado como sigue:
El caso aquí es conseguir que $\{(c, 0)\}$, sea el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos $(a, p(a))$ y $(b, p(b))$ y el eje x.

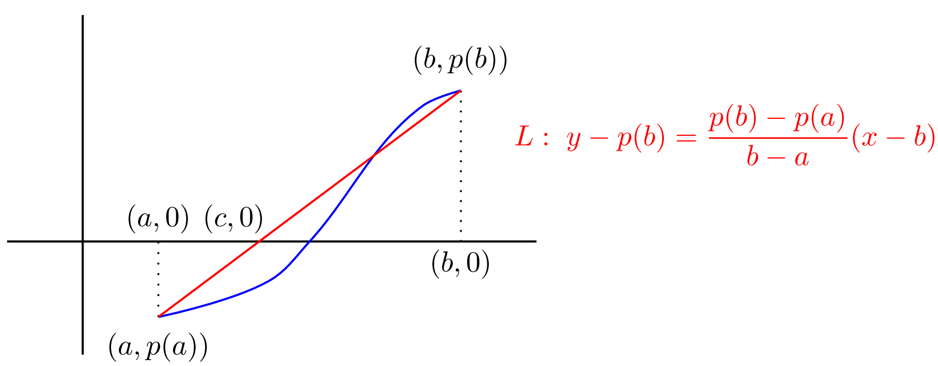

Figura 4: Caso $p(a) \cdot p(b) < 0$ y Eje $x \cap L = \{(c, 0)\}$

Inicialmente determinamos c

Como $(c, 0) \in \mathbb{L}$ y dado que la pendiente de una recta es única entonces deben verificarse las siguientes igualdades:

$$\frac{p(b) - p(a)}{b - a} = \frac{p(b)}{b - c} \iff c = b - \frac{(b - a)}{p(b) - p(a)} \; p(b)$$

$$\frac{p(b) - p(a)}{b - a} = \frac{p(a)}{a - c} \iff c = a - \frac{(b - a)}{p(b) - p(a)} \; p(a)$$

ahora procedemos al análisis del problema:

Dados los datos: a, b, $p(x)$ tal que $p(a)\cdot p(b)<0$, $\epsilon>0$ el error escogido, para el cálculo entonces

$$\begin{aligned} |b-c|<\epsilon &\implies |b-c|\to 0 \wedge \frac{(c-a)}{p(c)-p(a)}\ \ p(c)\to 0 \\ &\implies p(c)\to 0 \end{aligned}$$

Así que c es la raíz buscada.

De la misma forma,

$$\begin{aligned} |a-c|<\epsilon &\implies |a-c|\to 0 \wedge \frac{(b-c)}{p(b)-p(c)}\ \ p(c)\to 0 \\ &\implies p(c)\to 0 \end{aligned}$$

Así que c es la raíz buscada.

Podemos estructurar un procedimiento inteligente o algoritmo, para este caso como sigue:

Etapa 1. Dados a, b, $p(x)$ tal que $p(a)\cdot p(b)<0$ y $\epsilon>0$

Etapa 2. Hacemos $c:=b-\dfrac{(b-a)}{p(b)-p(a)}\ \ p(b)$

Etapa 3. Si $\min\{|a-c|,|b-c|\}<\epsilon$ entonces imprimir "c es la raíz buscada"

Etapa 4. Si $\min\{|a-c|,|b-c|\}\geq\epsilon$ y $\begin{cases} p(c)\cdot p(b)<0 & \text{entonces } a=c \text{ e ir a la Etapa 2} \\ \qquad\vee & \\ p(c)\cdot p(a)<0 & \text{entonces } b=c \text{ e ir a al Etapa 2}\end{cases}$

Ejemplo 6.2.1. *Sea $p(x)=x^2-2$ el polinomio dado y consideremos $a=0$, $b=2$ y $\epsilon=0.1$*

Etapa 1. $p(x)=x^2-2$ *y* $p(0)\cdot p(2)=(-2)\cdot 2<0$
Etapa 2. *Sea* $c=2-\dfrac{2-0}{p(2)-p(0)}\ p(2)=2-\dfrac{2}{4}\cdot 2=1$

Etapa 3. $\min\{|a-c|,|b-c|\}=\min\{|0-1|,|2-1|\}=1>\epsilon$ *y* $p(c)=p(1)=-1<0$.

- *Luego, repetimos el proceso para* $a=c=1$
- *Así que* $c=2-\dfrac{2-1}{p(2)-p(1)}\ p(2)=2-\dfrac{1}{3}\cdot 2=\dfrac{4}{3}=1.33$
- *Y,* $\min\{|a-c|,|b-c|\}=\min\{|1-1.33|,|2-1.33|\}=0.33>\epsilon$ *y* $p(c)=p(1.33)=-0.23<0$.
- *Luego, repetimos el proceso para* $a=c=1.33$
- *Así que,* $c=2-\dfrac{2-1.33}{p(2)-p(1.33)}\ p(2)=2-\dfrac{0.67}{2.23}\cdot 2=1.39$
- *Y,* $\min\{|a-c|,|b-c|\}=\min\{|1.33-1.39|,|2-1.39|\}=0.06>\epsilon$ *y* $p(c)=p(1.39)=-0.06<0$.
- *Luego, repetimos el proceso para* $a=c=1.39$

- *Así que,* $c = 2 - \dfrac{2 - 1.39}{p(2) - p(1.39)}\, p(2) = 2 - \dfrac{0.61}{2.06} \cdot 2 = 1.4$
- *Y,* $\min\{|a - c|, |b - c|\} = \min\{|1.39 - 1.4|, |2 - 1.4|\} = 0.01 < \epsilon$

Etapa 4. "$c = 1.4$ es la raíz buscada"

6.3. Variante Newton Raphson. Aquí, para determinar c hacemos lo siguiente:

(1) Determinamos la recta tangente a $y = p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ en un punto $P = (x_0, p(x_0))$, cuya ecuación es del tipo

$$\text{tg} \ : \quad y - p(x_0) = p'(x_0)(x - x_0) \iff y = p'(x_0)(x - x_0) + p(x_0)$$

donde $p'(x_0)$ es la derivada del polinomio $p(x)$ y como sabemos representa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P = (x_0, p(x_0))$.

(2) La situación la podemos ver modelada genéricamente en la siguiente:

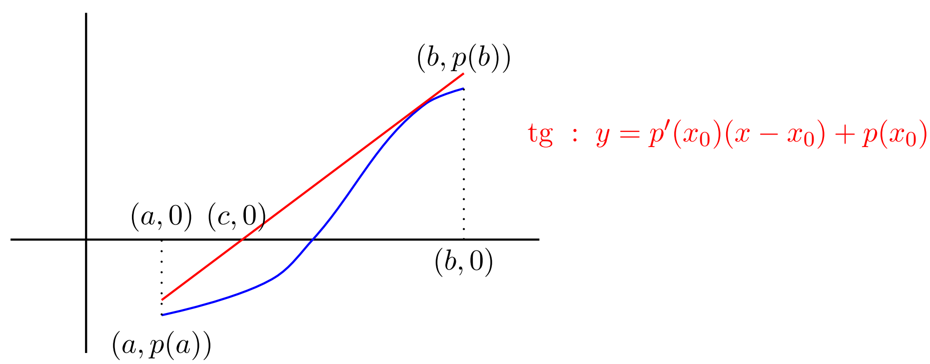

Figura 5: Caso $p(a) \cdot p(b) < 0$ y $\{(c, 0)\} =$ Eje $x \cap tg$

(3) Observamos que:
- El punto $(c, 0)$ puede ser obtenido como sigue:

$$p'(x_0)(c - x_0) + p(x_0) = 0 \iff c = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$$

- Si hacemos $c = x_1$ y determinamos la tangente al gráfico de $y = p(x)$ en el punto $P_1 = (x_1, p(x_1))$ entonces obtenemos una nueva intersección con el eje x en $(x_2, 0)$ y un cálculo análogo al hecho encima muestra que

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)}$$

- Iterando el proceso obtenemos una sucesión real $S = \left\{ x_{k+1} = x_k - \dfrac{p(x_k)}{p'(x_k)} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ tal que $p(\lim\limits_{k \to \infty} x_k) = 0$

Ejemplo 6.3.1. *Si* $p(x))x^2 - 2$ *entonces* $p'(x) = 2x$*, y para* $x_0 = 2$ *obtenemos la sucesión:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{2}{4} = 1.5 \\ x_2 &= 1.5 - \frac{0.25}{3} = 1.416 \\ x_3 &= 1.416 - \frac{0.005}{2.832} = 1.4142 \end{aligned}$$

Como se observa tanto x_1 *como* x_2 *representan buenas aproximaciones para el valor de* $\sqrt{2}$

Ejemplo 6.3.2. *Si* $p(x))x^3 - 2$ *entonces* $p'(x) = 3x^2$*, y para* $x_0 = 2$ *obtenemos la sucesión:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{6}{12} = 1.5 \\ x_2 &= 1.5 - \frac{1.375}{6.75} = 1.2962 \\ x_3 &= 1.2962 - \frac{0.1777}{5.0404} = 1.2609 \\ x_4 &= 1.2609 - \frac{0.0046}{4.7696} = 1.2599 \end{aligned}$$

Como se ve la convergencia a $\sqrt[3]{2}$ *es rápida, usando esta variante.*

7. Soluciones de la ecuación Cúbica

7.1. motivación. Consideremos $q(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ con $a \neq 0$ entonces sabemos que su gráfico es del tipo

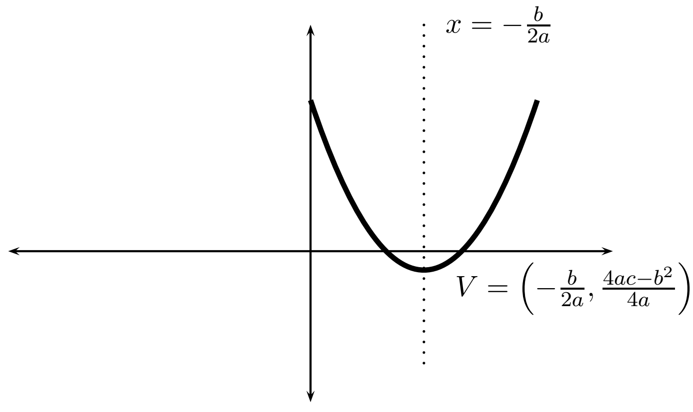

Figura 6: $q(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$

Ahora como $q'(x) = 2ax+b$ es la primera derivada de $q(x)$ entonces su punto crítico se encuentra exactamente en $q'(x) = 0$, es decir en $x = -\dfrac{b}{2a}$. Así que si hacemos en $q(x)$ una sustitución del tipo $x = u - \dfrac{b}{2a}$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} q(u) &= a\left(u-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(u-\frac{b}{2a}\right)+c\\ &= a\left(u^2-\frac{bu}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+b\left(u-\frac{b}{2a}\right)+c\\ &= au^2-bu+\frac{b^2}{4a}+bu-\frac{b^2}{2a}+c\\ &= au^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

La conclusión es la siguiente:

(1) Hemos trasladado el eje y al nuevo eje u determinado por la recta $x=-\dfrac{b}{2a}$.

(2) El eje u es el nuevo eje de simetría de la parabola $q(u)=au^2+\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$, pues

$$q(-u)=a(-u)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=au^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=q(u)$$

Este es el "significado geométrico de la eliminación de la parte lineal de $q(x)$", es decir de la desaparición del término que contiene a x.

(3) En particular, podemos obtener las soluciones que ya conocemos para la ecuación $q(x)=0$,

$$\begin{aligned} q(u)=0 &\iff au^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=0\\ &\iff au^2=-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\\ &\iff u^2=\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\ &\iff u=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\\ &\iff x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\\ &\iff x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

7.2. Soluciones de una ecuación cúbica. El objetivo es determinar un algoritmo que nos permita determinar las raíces de la ecuación cúbica general $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

(1) Nuestro análisis del problema estudiando regularidades en el comportamiento de la cúbica $c(x)=x^3$, cuyo gráfico es del tipo

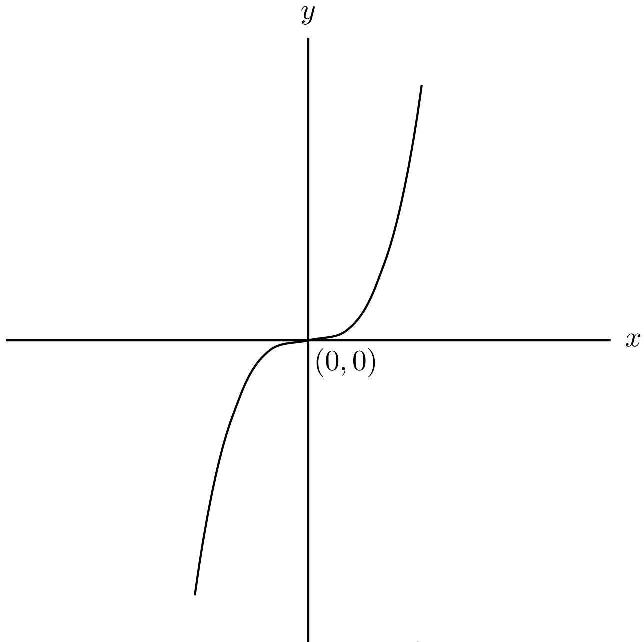

Figura 7: $c(x) = x^3$

(a) Observamos que la cúbica $c(x)$ es una función impar, es decir, verifica la relación:

$$c(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -c(x)$$

(b) Es una curva que presenta cambios de concavidad a lo largo de su dominio. Pues

$$c(x) = x^3 \Longrightarrow c'(x) = 3x^2 \Longrightarrow c''(x) = 6x$$

Luego, $c(x) = x^3$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$, ya que $c''(x) < 0$ para $x < 0$ y $c''(x) > 0$ para $x > 0$. Así que su "eje de imparidad" en el caso el eje y pasa por su punto de inflexión.

(2) Para seguir con el análisis, hagamos una traslación de esta cúbica, por ejemplo si $t(x) = (x - 1)^3$ entonces su gráfico es del tipo

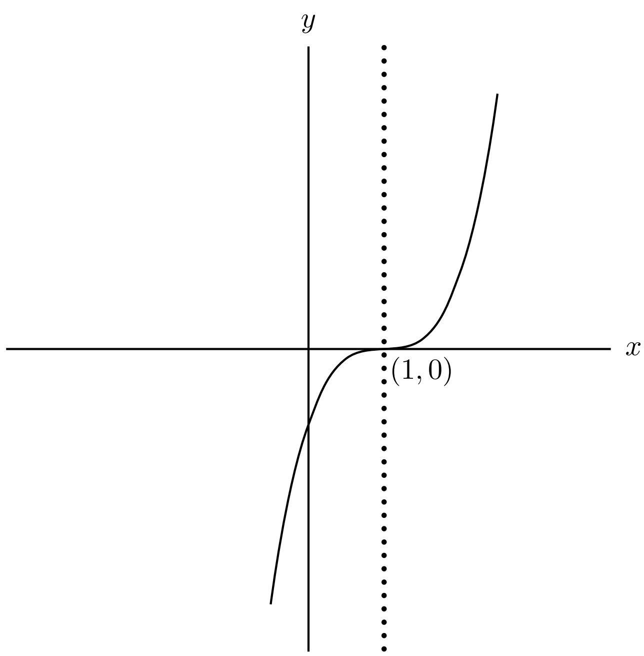

Figura 8: $t(x) = (x - 1)^3$

Recíprocamente, si consideramos la cúbica $t(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ entonces determinemos su punto de inflexión:

$$t(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \Longrightarrow t'(x) = 3x^2 - 6x + 3 \Longrightarrow t''(x) = 6x - 6.$$

Así que $6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $I = (1, 0)$ es un punto de inflexión pues

	$-\infty$	1 ∞
$t''(x)$	$t''(0) < 0$	$t''(2) > 0$
$t(x)$	$\frown$	$\smile$

Y si hacemos el cambio de variable $u = x - 1$ entonces $x = u + 1$ y tenemos que

$$\begin{aligned} t(u) &= (u+1)^3 - 3(u+1)^2 + 3(u+1) - 1 \\ &= u^3 + 3u^2 + 3u + 1 - 3u^2 - 6u - 3 + 3u + 3 - 1 \\ &= u^3 \end{aligned}$$

(3) Ahora tratemos de aplicar lo observado a la cúbica $c(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$, donde $a \neq 0$.

(a) En conformidad con lo observado, buscamos el punto de inflexión de $c(x)$.

$$\begin{aligned} c(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d &\Longrightarrow c'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ &\Longrightarrow c''(x) = 6ax + 2b \end{aligned}$$

Así que,

$$c''(x) = 0 \Longleftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

(b) Si hacemos $u = x + \dfrac{b}{3a}$, es decir u es el nuevo eje definido por $x = -\dfrac{b}{3a}$, y sustituimos en la cúbica obtenemos

$$\begin{aligned} c(u) &= a\left(u - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(u - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(u - \frac{b}{3a}\right) + d \\ &= a\left(u^3 - \frac{3u^2b}{3a} + \frac{3ub^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + bu^2 - \frac{2b^2u}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cu - \frac{bc}{3a} + d \\ &= au^3 - u^2b + \frac{ub^2}{3a} - \frac{b^3}{27a^2} + bu^2 - \frac{2b^2u}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cu - \frac{bc}{3a} + d \\ &= au^3 + \frac{ub^2}{3a} - \frac{2b^2u}{3a} + cu - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d \\ &= au^3 - \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)u + d - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} \\ &= au^3 + \left(\frac{b^2 - 3ac}{3a}\right)u + \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^2} \\ &= a\left(u^3 + 3\left(\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}\right)u + \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}\right) \end{aligned}$$

Luego, el cambio de variable $u = x + \dfrac{b}{3a}$ nos permite "eliminar" el término cuadrático, y si hacemos $g = \left(\dfrac{b^2 - 3ac}{9a^2}\right)$ y $h = \dfrac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}$; tenemos que la cúbica se transforma en

$$c(u) = a\left(u^3 + 3gu + h\right) \tag{6}$$

(4) Finalmente deseamos resolver la ecuación $c(x)=0$ entonces como $a\neq 0$ debemos resolver la ecuación

$$u^3+3gu+h=0$$

(a) Observemos en primer lugar que $(-r-s)^3=-r^3-3r^2s-3rs^2-s^3$. Así que sustituyendo $u=-r-s$ en (6) tenemos que

$$\begin{aligned} u^3+3gu+h &= (-r-s)^3+3g(-r-s)+h \\ &= -r^3-3r^2s-3rs^2-s^3-3gr-3gs+h \\ &= (-r^3-s^3+h)-3(r^2s+rs^2+gr+gs) \\ &= (-r^3-s^3+h)-3(r+s)(rs+g) \end{aligned}$$

(b) Si anulamos la cúbica obtenemos que,

$$\begin{aligned} u^3+3gu+h=0 &\Longrightarrow (r^3+s^3-h)+3(r+s)(3rs+g)=0 \\ &\Longrightarrow (r^3+s^3-h)=-3(r+s)(rs+g) \end{aligned}$$

Luego, al dividir (r^3+s^3-h) entre $(r+s)$ el resto es cero, pero un cálculo de divisibilidad nos dice que

$$\frac{r^3+s^3-h}{r+s}=r^2-rs+s^2-\frac{h}{r+s}$$

Entonces inmediatamente tenemos dos casos:

(i) Si $h=0$ entonces la cúbica es del tipo, $u^3+3gu=0$ y entnces tenmos las soluciones

$$\begin{aligned} u^3+3gu=0 &\Longrightarrow u(u^2+3g)=0 \\ &\Longleftrightarrow u=0 \quad \vee \quad u=\pm\sqrt{-3g} \end{aligned}$$

(ii) Si $h\neq 0$ debemos tener dos condiciones

$$\begin{aligned} r^3+s^3-h=0 &\Longleftrightarrow r^3+s^3=h \\ rs+g=0 &\Longleftrightarrow g=-rs \end{aligned}$$

Es decir, la ecuación de la cúbica (6) se escribe como

$$u^3+r^3+s^3-3rsu=0 \Longleftrightarrow (u+r+s)(u+\omega r+\omega s^2)(u+\omega s+\omega^2 r)=0 \tag{7}$$

(c) Observamos finalmente que estas condiciones satisfacen las relaciones $r^3+s^3=h$ y $r^3\cdot s^3=-g^3$, así que son raíces de la ecuación de segundo grado $u^2-hu-g^3=0$ entonces de lo que sabemos de la solución de una ecuación cuadrática tenemos que.

$$u^2-hu-g^3=0 \Longrightarrow u=\frac{h\pm\sqrt{h^2+4g^3}}{2}$$

De donde podemos colegir que $\Delta=h^2+4g^3$ es el discriminante de la cúbica en el sentido que determina si existe una raíz real y dos complejas o tres reales.

Ejemplo 7.2.1. *Consideremos la cúbica $x^3-6x^2+3x+16$ entonces aplicando el algoritmo descrito encima tenemos que*

(1) *En primer lugar determinaremos el punto de inflexión, en este caso el tiene por abscisa $x=2$.*

(2) *Ahora hacemos la sustitución $u=(x-2)$ y entonces la cúbica en las nuevas coordenadas queda de la forma*

$$c(u)=(u+2)^3-6(u+2)^2+3(u+2)+16=u^3-9u+6 \qquad (*)$$

(3) *La cúbica* $(*)$ *la comparamos con* $u^3 + r^3 + s^3 - 3rsu$, *y al hacerlo sucede que*

$$\left.\begin{array}{rcl} r^3 + s^3 & = & 6 \\ -3rs & = & -9 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} r^3 + s^3 & = & 6 \\ rs & = & 3 \end{array}$$

Luego, r^3 *y* s^3 *son raíces de la ecuación* $u^2 - 6u + 27 = 0$, *y entonces*

$$u^2 - 6u + 27 = 0 \Longrightarrow u = 3 \pm 3\sqrt{2}i$$

Para continuar escogemos por ejemplo $r^3 = 3 + 3\sqrt{2}i$ *y* $s^3 = 3 - 3\sqrt{2}i$. *como queremos determinar r y s entonces debemos escribir los complejos en su forma polar.*

$$3 + 3\sqrt{2}i = |3 + 3\sqrt{2}i|(cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \Longrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{3}\cos\alpha = 3 \\ 3\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha = 3\sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$$

De donde, sigue que $r = \sqrt{3}\left(cos\frac{\alpha}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}\right)$ *y* $s = \sqrt{3}\left(cos\frac{\alpha}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}\right)$

(4) *Finalmente las soluciones son:*

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & -r - s = -2\sqrt{3}\,cos\dfrac{\alpha}{3} \quad ó \\ u_2 & = & -r\omega - s\omega^2 = -2\sqrt{3}\,cos\left(\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) \quad ó \\ u_3 & = & -r\omega^2 - s\omega = -2\sqrt{3}\,cos\left(\dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{2\pi}{3}\right) \end{array}$$

Como $\tan\alpha = \sqrt{2}$ *entonces* $\alpha \approx 55^o$, *y las raíces pedidas son aproximadamente*

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \approx & -1.29 \\ x_2 & \approx & 2.70 \\ x_3 & \approx & 4.58 \end{array}$$

7.3. Ejercicios propuestos. Determine las raíces de las siguientes ecuaciones cúbicas.

(1) $x^3 - 6x^2 + 6x + 8 = 0$

(2) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

(3) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

8. Fracciones Parciales

De las secciones anteriores tenemos las siguiente conclusiones:

(1) Todo polinomio de grado impar tiene una raíz real.

(2) Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces tenemos las únicas posibilidades:

$$\begin{aligned} p(x) &= (a_1+b_1x)(a_2+b_2x)(a_3+b_3x)\cdots(a_s+b_sx) \text{ o bien} \\ p(x) &= (a_1+b_1x+c_1x^2)(a_2+b_2x+c_2x^2)(a_3+b_3x+c_3x^2)\cdots(a_s+b_sx+c_sx^2) \\ & \quad\ \text{donde } b_i^2-4a_ic_i<0 \text{ o bien} \\ p(x) &= (a_1+b_1x)(a_2+b_2x)(a_3+b_3x)\cdots(a_t+b_tx)\cdots \\ &= \cdots(a'_1+b'_1x+c'_1x^2)(a'_2+b'_2x+c'_2x^2)(a'_3+b'_3x+c'_3x^2)\cdots(a'_s+b'_sx+c'_sx^2) \\ & \quad\ \text{donde } b_i'^2-4a'_ic'_i<0 \end{aligned}$$

(3) Si definimos en $\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]-\{0\}$ la relación:

$$(p(x),q(x)) \cong (p'(x),q'(x)) \iff p(x)q'(x)=q(x)p'(x) \tag{8}$$

entonces (8) es una relación de equivalencia y escribiendo $(p(x),q(x))=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ podemos formar el conjunto de fracciones de polinomios, (recordar la construcción de los números racionales como fracciones de enteros):

$$\mathbb{R}(x)=\left\{\frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x)\in\mathbb{R}[x]\wedge q(x)\in\mathbb{R}[x]-\{0\}\right\}$$

Definición 8.1. *Diremos que* $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}\in\mathbb{R}(x)$ *es una fracción propia si y sólo si* $\partial(p(x))<\partial(q(x))$

Ejemplo 8.1.1.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{(x-1)(x^2+1)}$ *es una fracción racional propia*

(2) $f(x)=\dfrac{x^3+5}{(x^2-4)}$ *no es una fracción racional propia, pues:*

$$\partial(x^3+5)=3>\partial(x^2-4)=2$$

En este caso podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{array}{lcl} x^3+5 & : (x^2-4) & = x+1 \\ x^3-4x & & \\ \hline 4x+5 & & \end{array}$$

Luego,

$$\frac{x^3+5}{(x^2-4)} = \underbrace{(x+1)}_{\in\mathbb{R}[x]}+\underbrace{\frac{4x+5}{x^2-4}}_{propia}$$

Teorema 8.2. *Si* $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}\in\mathbb{R}(x)$ *no es una fracción propia entonces existe un polinomio* $a(x)$ *y una fracción parcial propia* $u(x)$ *tal que* $f(x)=a(x)+u(x)$

En efecto
Aplicando el algoritmo de la división a los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, tenemos que existen polinomios $a(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$p(x)=a(x)q(x)+r(x);\ (\partial(r(x))<\partial(q(x)))\Longrightarrow \frac{p(x)}{q(x)}\ =\ \underbrace{a(x)}_{\in\mathbb{R}[x]}+\underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{propia}}$$

Conclusión 8.2.1. *Finalmente, tenemos el compilado:*

Si $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$*, es una fracción propia en* $\mathbb{R}(x)$ *entonces tenemos los siguientes casos:*

(1) $f(x)$ *es una suma de fracciones propias del tipo:*

$$\frac{A_i}{a_i+b_ix};\ (i=1,2,\cdots s)\ \wedge\ r\neq t\Longrightarrow a_r+b_rx\neq a_t+b_tx$$

(2) $f(x)$ *es una suma de fracciones propias del tipo:*

$$\frac{A_i}{a_i+b_ix};\ (i=1,2,\cdots s)$$

Y existen términos del tipo, a_i+b_ix *repetidos.*

(3) $f(x)$ *es una suma de fracciones propias del tipo:*

$$\frac{A_i+B_ix}{a_i+b_ix+c_ix^2};\ (i=1,2,\cdots s)\ \wedge\ r\neq t\Longrightarrow (a_r+b_rx+c_rx^2)\neq(a_t+b_tx+c_tx^2)$$

(4) $f(x)$ *es una suma de fracciones propias del tipo:*

$$\frac{A_i+B_ix}{a_i+b_ix+c_ix^2};\ (i=1,2,\cdots s)$$

Y existen términos del tipo $a_i+b_ix+c_ix^2$*, repetidos.*

(5) $f(x)$ *es una suma de fracciones propias de los dos tipos definidos encima.*

Ejemplo 8.2.2. *Si* $f(x)=\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ *entonces*

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\\ &= \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\end{aligned}$$

Luego,

$$x-1 = Ax-3A+Bx-2B \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} A+B & = & 1 \\ -3A-2B & = & -1 \end{array}\right| \Longrightarrow B=2 \wedge A=-1$$

Así que,

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x-3}$$

8.3. Ejercicios Propuestos de Fracciones Parciales.

(1) Determine "k" de forma que $p(x)=2x^3-3x^2+4kx-2 \in ker(\varphi(2))$

(2) Determine las raíces de $p(x)=x^4-1$

(3) Descomponer en fracciones parciales sobre $\mathbb{R}$, los siguientes elementos de $\mathbb{R}(x)$

(a) $\dfrac{1}{x(x^3-1)}$ (b) $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)^2}$ (c) $\dfrac{x^6}{(x^2-5x+6)(x-1)^3}$

(d) $\dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$ (e) $\dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)}$ (f) $\dfrac{x^4-5x^3+10x^2-8x-1}{(x-1)^3(x-2)}$

(g) $\dfrac{-3x-4}{(x-2)^2(x^2+1)}$ (h) $\dfrac{1}{x^4+1}$ (i) $\dfrac{1}{(2x+1)(x+1)}$

(j) $\dfrac{2x+4}{x^3+4x}$ (k) $\dfrac{x-1}{x^3-x^2-2x}$ (l) $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético